KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 9. szám Budapest, 2020. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: szerk@komal.hu
Internet: http://www.komal.hu
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml.

A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

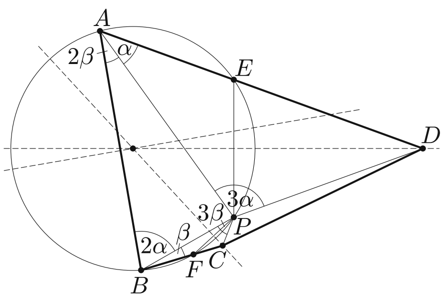
A szerkesztőség

Első nap*

1. feladat. *Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek:*

$$PAD\sphericalangle : PBA\sphericalangle : DPA\sphericalangle = 1 : 2 : 3 = CBP\sphericalangle : BAP\sphericalangle : BPC\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $ADP\sphericalangle$ és a $PCB\sphericalangle$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.



Gyimesi Péter megoldása. Legyen $PAD\sphericalangle = \alpha$, $PBA\sphericalangle = 2\alpha$ és $APD\sphericalangle = 3\alpha$, $CBP\sphericalangle = \beta$, $BAP\sphericalangle = 2\beta$ és $BPC\sphericalangle = 3\beta$. Vegyük fel az E pontot az AD egyenesen úgy, hogy $APE\sphericalangle = \alpha$ teljesüljön. Így $AEP = 180^\circ - 2\alpha$, $ABP\sphericalangle + AEP\sphericalangle = 180^\circ$, tehát $ABPE$ húrnégyszög.

$$PED\sphericalangle = 2\alpha = 3\alpha - \alpha =$$
$$= APD\sphericalangle - APE\sphericalangle = EPD\sphericalangle,$$

tehát $ED = PD$. Az $ADP\sphericalangle$ szögfelezője egyúttal az EP szakasz felezőmerőlegese.

Ezt a másik oldalon is meg lehet csinálni: Vegyük fel az F pontot a BC egyenesen úgy, hogy $BPF\sphericalangle = \beta$ legyen. Az előbbiekhez hasonlóan kijön, hogy $ABFPE$ húrötszög és a $PCB\sphericalangle$ szögfelezője a PF szakasz felezőmerőlegese.

A három húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján.

2. feladat. *Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ és $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

*A második nap feladatainak megoldását a januári számban közöljük.

Weisz Máté megoldása. Az a, b, c, d számokra a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

adódik. Így ha igazoljuk, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)\big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big) < 1,$$

abból a feladat állítása is következik. Most n szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok (egyik) legnagyobbika a_1, valamint $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, akkor

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leqslant 1.$$

Azt is látni fogjuk, hogy $n = 3$ esetén egyenlőség nem teljesülhet.

$n = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló: $a_1^3 = 1^3 \leqslant 1$. Most tegyük meg az indukciós lépést n-ről $(n+1)$-re. Azt kellene igazolnunk, hogy ha a pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ számok közül a_1 a legnagyobb, és az összegük 1, akkor

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) \leqslant 1.$$

Legyen $a_1' = a_1 + a_{n+1}$ és $a_i' = a_i$ minden $2 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Így

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1,$$

valamint az a_i' számok legnagyobbika természetesen a_1', így az indukciós feltevést használva

$$\left(a_1' + 3\sum_{i=2}^{n} a_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i')^2\right) \leqslant 1.$$

Tehát elegendő lenne igazolnunk, hogy

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) \leqslant \left(a_1' + 3\sum_{i=2}^{n} a_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i')^2\right),$$

azaz

$$\left(\left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + 2a_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) + 2a_1 a_{n+1}\right).$$

A beszorzás után mindkét oldalon megjelenő $\left(a_1+a_{n+1}+3\sum\limits_{i=2}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i^2\right)$ tagot levonva, majd $2a_{n+1}$-gyel osztva a

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2\leqslant\left(a_1+a_{n+1}+3\sum_{i=2}^{n}a_i\right)a_1=\sum_{i=1}^{n+1}a_1a_i+2\sum_{i=2}^{n}a_1a_i$$

becsléshez jutunk, ami a_1 maximális volta miatt láthatóan mindig teljesül, ezzel az indukciós lépést megtettük. Világos az is, hogy $n\geqslant 2$ esetén egyenlőség nem teljesülhet, mert a jobb oldalon a második összeg nem üres, tehát $n=3$-tól kezdve szigorúan is igaz az indukciós állítás. Alkalmazzuk a kapott eredményt $n=4$ és $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $a_4=d$ választással. Felhasználva még, hogy $b\geqslant d$ látjuk, hogy

$$(a+2b+3c+4d)(a_2+b_2+c_2+d_2)\leqslant(a+3b+3c+3d)(a_2+b_2+c_2+d_2)<1,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. feladat. *Adott* $4n$ *kavics, amelyeknek a súlya rendre* $1,2,3,\ldots,4n$. *Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:*

- *A két kupac összsúlya azonos.*
- *Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.*

Kocsis Anett megoldása. Először is párosítsuk össze az $(1,4n)$, $(2,4n-1)$, …, $(2k,2k+1)$ súlyú kavicsokat.

Ezután vegyünk egy n csúcsú gráfot, ahol a gráf csúcsai a színek. Húzzunk be $2n$ élet a gráfba a már létrehozott párjaink szerint: ha a $(2n-k,2n+k+1)$ párban az egyik a, a másik b színű, akkor húzzunk be egy ab élet a gráfban. Ekkor lehetnek többszörös és hurokéleink is. Ezután tekintsük a gráfunkat. Ez egy 4-reguláris gráf, hiszen minden színből 4 kavics van. Szeretnénk kiválasztani úgy néhány élet, hogy a kiválasztott élek egy 2-reguláris gráfot feszítsenek ki az n csúcson.Tegyük fel, hogy a gráf összefüggő; ha nem az, akkor minden összefüggő komponensre elvégezzük a következőket: Elhagyjuk a hurokéleket. Ezzel még mindig minden csúcs foka páros, azaz van benne Euler-kör. Menjünk végig ezen az Euler-körön, és számozzuk meg az éleket. Amikor olyan csúcshoz érünk, ahol az eredeti gráfban hurokél volt, ott tegyük vissza a hurokélet, és annak is adjunk sorszámot, mégpedig ha az i-edik élen jöttünk be a csúcshoz, akkor az $i+1$-ediket. Ezután tekintsük a páros sorszámú éleket. Az az állításunk, hogy ezek éppen olyan élek, amiket kerestünk.

Három típusú csúcsunk van, ezeknek az éleit vizsgáljuk:

- hurokéles csúcs: i, $i+1$, $i+2$ (az $i+1$ lesz a hurokél sorszáma, tehát ez kettő fokot ad);
- kezdő csúcs: 1, $2n$, k, $k+1$, azaz két páros és két páratlan;
- a maradék csúcsok: i, $i+1$, j, $j+1$ azaz két páros és két páratlan.
  Azaz az egyik kupacunk azok a párok lesznek, amiknek a páros élek feleltek meg, a másik kupacunk azok a párok lesznek, amiknek a páratlan élek feleltek meg.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan egész szám van, amelyre teljesül, hogy $(x+2)^3-(x-2)^3<$ <2020? (*5 pont*)

Ha barátunk találkozik egy lánnyal a vizsgaidőszakban, akkor $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szerelmes lesz belé. Ha szerelmes, akkor nem tud koncentrálni, ezért csak 10% az esélye annak, hogy fel tud készülni a vizsgáira, míg ha éppen nem szerelmes, akkor ez az arány 70%.

b) Mutassuk meg, hogy a sikeres vizsga valószínűsége 0,3. (*5 pont*)

c) Ha tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, mennyi annak a valószínűsége, hogy szerelmes? (*2 pont*)

2. *a*) Egy mértani sorozat harmadik tagja 32, a hatodik tagja 2048. Számítsuk ki a sorozat első hat tagjának az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését. (*6 pont*)

Tekintsük a következő állításokat.

A: Egy adatsokaság mediánja mindig eleme az adatsokaságnak.

B: Ha $f(x)=3x+2$ és $g(x)=|x|-1$, akkor $f\big(g(x)\big)=3\cdot|x|-1$. (Itt $f\big(g(x)\big)$ összetett függvény képzését jelöli.)

C: Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem monoton.

b) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Mindenhol indokolni is kell, példával, ellenpéldával, számolással stb. (*6 pont*)

c) Fogalmazzuk meg a *C* állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

3. *a*) Egy derékszögű trapézba kör írható. Az alapok hossza 150 cm és 300 cm. Mekkora a beírt kör sugara? (*7 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned}\log_2(x^2y)&=4,\\ \log_4 x-3\log_4 y&=-\frac{5}{2}.\end{aligned}\qquad (7\ pont)$$

4. *a*) Tekintsük a (8×8-as) sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos futólépéssel. Hány éle van az így kapott gráfnak? (A futó átlósan képes lépni akármennyit.) (*5 pont*)

b) Adott az f függvény: $f(x)=90x^2-6x^3$. Határozzuk meg a p lehetséges értékeit úgy, hogy $\int\limits_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=0$ teljesüljön. (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Melyek azok a háromjegyű pozitív egész számok, amelyekhez megadható olyan hárompontú egyszerű gráf, hogy annak fokszámai megegyeznek a háromjegyű szám számjegyeivel? Minden esetben adjuk is meg a megfelelő gráfokat. (*6 pont*)

Tekintsük a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényt:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}.$$

b) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. (*6 pont*)

c) Hány rácsponton megy át a függvény? (Rácspont: olyan pont a koordinátarendszerben, amelynek mindkét koordinátája egész szám.) (*4 pont*)

6. *a*) Jelölje p_n az n-edik pozitív prímszámot. Hány 0-ra végződik a

$$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2020}$$

szorzat? (*3 pont*)

Az ABC háromszög oldalai: $AB=9$ cm, $BC=7$ cm, $CA=6$ cm.

b) Mutassuk meg, hogy a beírt kör sugara egy tizedre kerekítve 1,9 cm. (*2 pont*)

c) Mekkora érintési szakaszok húzhatók a B csúcsból a beírt körhöz? (*4 pont*)

d) Mekkora annak a konkáv síkidomnak a területe, amelyet a B csúcsból húzott két érintési szakasz és a beírt kör íve határol? (*7 pont*)

7. *a*) Adjuk meg a $3x^2+3y^2-6x+12y=2020$ egyenletű k kör középpontját és sugarát. (*4 pont*)

b) Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái $A(1;1)$ és $C(5;3)$. Írjuk fel a négyzetbe írható kör egyenletét. (*4 pont*)

c) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek egyszerre felezik a fenti négyzet és a k kör területét. (*3 pont*)

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$3^{2(x+1)(x-2)}=9^{\frac{x+1}{x-2}}.$$ (*5 pont*)

8. *a*) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy bármely két számjegye relatív prím egymáshoz? (*7 pont*)

b) Egy dobozban cukorkák vannak, 2 narancsos és 3 citromos. Addig veszünk ki cukorkákat (a kivett cukorkákat elszopogatjuk), amíg mindkét fajtából húzunk legalább egyet. Határozzuk meg annak az öt eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, illetve 5 cukorka kihúzására lesz szükség, majd számítsuk ki a húzások számának várható értékét. (*9 pont*)

9. Bergengócia 2025-re foci világbajnokságot szeretne rendezni, melyet a frissen felépített stadionban rendeznek meg. A rendezvény logója egy 2025 pontú teljes gráf lesz, melynek éleit piros, fehér és zöld színnel színezik. (Minden élt kiszíneznek és minden él csak egyfajta színű lehet. Nem feltétlenül kell mindegyik színt használni, de csak ezeket használhatják.) Közvéleménykutatás keretében kiderítették, hogy azok a legszebb színezések, ahol a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának (és egyik sem 0).

a) Hányféle értéke lehet a piros élek számának? (*4 pont*)

Egy sajtótájékoztatón azt is elmondták, hogy a fenti színezések közül egy olyat fognak választani, amelyben a különböző színű élek számának a szorzata a legnagyobb lesz.

b) Hány piros színű éle lesz a logónak? (*6 pont*)

c) János egy szabályos tízszög átlói közül véletlenszerűen kijelöl ötöt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között az élek között lesz legalább egy a legrövidebb vagy a leghosszabb átlók közül? Az eredményt normálalakban adjuk meg. (*6 pont*)

Fridrik Richárd
Szeged

Megoldások a 2020/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Mely x valós számokra értelmezhető az*

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x-3}}{\log_2(x-2)}}$$

függvény? (*5 pont*)

b) *Adjunk meg legalább két olyan valós számot, amelyekkel a*

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+7}$$

és a

$$16^x\cdot 8^{2x}\cdot 4^{6x}\cdot\sqrt{2}=64$$

egyenletek valós gyökei valamilyen sorrendben egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai lehetnek. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A logaritmus értelmezése miatt $x-2>0$, azaz $x>2$. Ugyanakkor $\log_2(x-2)\neq 0$, tehát $x-2\neq 1$, vagyis $x\neq 3$.

A négyzetgyök értelmezéséből $x-3\geqslant 0$, illetve $x\geqslant 3$ következik. Ez az előző eredménnyel együtt azt jelenti, hogy

$$x>3. \qquad (1)$$

Ugyancsak a négyzetgyök értelmezése szerint

$$(2)\qquad \frac{1-\sqrt{x-3}}{\log_2(x-2)} \geqslant 0.$$

Ez kétféleképpen lehetséges:

- vagy $1-\sqrt{x-3} \geqslant 0$ és $\log_2(x-2) > 0$,
- vagy pedig $1-\sqrt{x-3} \leqslant 0$ és $\log_2(x-2) < 0$.

Az első esetből egyrészt azt kapjuk, hogy $1 \geqslant \sqrt{x-3}$, innen pedig azt, hogy $x \leqslant 4$. Másrészt $\log_2(x-2) > 0$, vagy másként $\log_2(x-2) > \log_2 1$ és a $g(x) = \log_2(x-2)$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt $x-2 > 1$, tehát $x > 3$.

Eredményeinket összevetve azt kapjuk, hogy a (2) egyenlőtlenség a $]3;4]$ halmazon teljesül.

Ha pedig $1-\sqrt{x-3} \leqslant 0$, akkor ebből $x \geqslant 4$ adódik, a $\log_2(x-2) < 0$ egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számokra $x < 3$ áll fenn. Ez azonban ellentmond az (1) feltételnek.

Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya ezért a $D_f =]3;4]$ számhalmaz.

b) A négyzetgyökös egyenletben szereplő első négyzetgyök értelmezése miatt $x-2 \geqslant 0$, azaz $x \geqslant 2$, ezekre a valós számokra a másik két gyökös kifejezés is értelmezett, hiszen $x \geqslant 2$ esetén $2x+3 > 0$ és $3x+7 > 0$ érvényes.

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve rendezés után a

$$\sqrt{(x-2)\cdot(2x+3)} = 3$$

egyenletet kapjuk. Ennek mindkét oldalát ismét négyzetre emelhetjük, ahonnan rendezéssel a $2x^2-x-15=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}5$. Az $x_2 = -2{,}5$ ellentmond az $x \geqslant 2$ feltételnek, ezért nem megoldás. Az $x_1 = 3$ megoldása a négyzetgyökös egyenletnek, ezt egyszerű számolással ellenőrizhetjük.

Tekintsük ezután az exponenciális egyenletet. Ez átírható:

$$2^{4x}\cdot 2^{6x}\cdot 2^{12x}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{22x+\frac{1}{2}} = 2^6,$$

ahonnan az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonsága miatt

$$22x + \frac{1}{2} = 6.$$

Ennek gyöke az $x = \frac{1}{4}$ valós szám, ez az exponenciális egyenlet megoldása.

Olyan valós számokat kell megadnunk, amelyekkel együtt az egyenletek megoldásai egy-egy számtani sorozat szomszédos tagjai lesznek. Például a megoldások számtani közepét véve:

$$a = \frac{3+\frac{1}{4}}{2} = \frac{13}{8},$$

ekkor az $\frac{1}{4}$, $\frac{13}{8}$, 3 számok egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Lehetséges az is, hogy

$$\frac{\frac{1}{4}+b}{2}=3,$$

ahonnan $b=\frac{23}{4}$, így az $\frac{1}{4}$, 3, $\frac{23}{4}$ számok egy másik számtani sorozat szomszédos tagjai.

Megjegyzés. Számtani sorozatot alkotnak a $-\frac{5}{2}$, $\frac{1}{4}$, 3 számok is, ahol a sorozat első tagját a

$$\frac{c+3}{2}=\frac{1}{4}$$

egyenletből kaptuk.

2. *Az Agatha Christie műveiből készült Poirot-novellák című tv-sorozat „A csokoládésdoboz" című epizódjának egyik jelenetében két szereplő, egy férfi és egy nő, egy operaelőadás hallgatása közben egy doboz belga csokoládét kóstolgatott. A dobozt a jelenet kezdetén bontották fel, és a dobozban kezdetben 7-féle csokoládéfigura volt, mindegyikből 4 darab az* ábra *szerint.*

A női szereplő kedvence a korona alakú csokoládé. Kóstolgatás közben az udvariasság szabályai szerint mindig a hölgy választ először, aztán a férfi, majd újra a hölgy, aztán a férfi és így tovább. A férfi tudja, hogy a hölgy kedvence a koronás csokoládé, ezért ő sosem választ magának ilyet. Ezek figyelembevételével először elfogyasztanak 7 csokoládét, mindegyik fajtából egyet-egyet, mégpedig úgy, hogy a hölgy először a kedvencéből választ.

a) Hányféle sorrendben fogyaszthatnák el a 7 csokoládét? *(6 pont)*

b) Ha a megmaradt 21 csokoládéból a hölgy egyesével, véletlenszerűen és visszatevés nélkül kiválasztana 6 darabot, akkor mennyi lenne a valószínűsége, hogy azok között legalább 2 koronás csokoládét talál? *(6 pont)*

Megoldás. *a)* A nő először a koronás csokoládéból választ, ezt 4-féleképpen teheti meg, hiszen mindegyik csokoládéból 4-4 darab van. Ebből már nem választ egyikük sem az első 7 csokoládé kóstolása során. Ezután a férfi a megmaradt 6-féle csokoládéból választ egy fajtát és kivesz belőle egyet, ezt $6\cdot 4=24$ különböző módon teheti meg.

Ezt követően ismét a hölgy választ egy csokoládét, mégpedig 5-féléből, de bármelyiket is választja a 5 fajta közül, mindegyikből 4 választási lehetősége van, ezért $5\cdot 4=20$-féleképpen választhat.

Ennek alapján könnyen látható, hogy a férfi további választási lehetőségeinek száma $4\cdot 4=16$, $4\cdot 2=8$, a nő további csokoládé-kiválasztási lehetőségeinek száma pedig $3\cdot 4=12$, $1\cdot 4=4$. A jelenetben szereplő nő és férfi tehát az első 7 csokoládét $4\cdot 24\cdot 20\cdot 16\cdot 12\cdot 8\cdot 4=11\,796\,480$ különböző sorrendben fogyaszthatná el.

b) Egyszerűbb először a komplementer esemény valószínűségét kiszámolni, vagyis azt, hogy a kiválasztottak közül egy sem lesz, illetve egy darab lesz koronás csokoládé. Legyen ezek valószínűsége p_0, illetve p_1.

Mivel egyesével és visszatevés nélkül választ a hölgy, ezért alkalmazhatjuk a hipergeometrikus eloszlási formulát. Tudjuk, hogy 3 darab koronás csokoládé maradt meg, ezért p_0 kiszámításához a kedvező esetek száma $\binom{3}{0}\cdot\binom{18}{6}=18\,564$, az összes eset száma pedig $\binom{21}{6}=54\,264$, és így

$$p_0=\frac{18\,564}{54\,264}=0{,}3421.$$

Ha p_1-et szeretnénk kiszámítani, akkor a kedvező esetek száma $\binom{3}{1}\cdot\binom{18}{5}=25\,704$, az összes eset száma ugyanannyi, mint az előbb, ezért

$$p_1=\frac{25\,704}{54\,264}=0{,}4737.$$

Annak az A eseménynek a valószínűsége tehát, hogy a jelenet női szereplője a kiválasztási feltételek figyelembevételével a 6 csokoládé között legalább 2 koronásat talál: $p(A)=1-(p_0+p_1)=0{,}1842$.

3. *Anna és Boglárka unokatestvérek, az egyik megyeszékhely különböző iskoláiba járnak. Anna kilenc évvel idősebb Boglárkánál. Jelöljük Anna jelenlegi életkorát A-val, Boglárka jelenlegi életkorát B-vel (A és B pozitív egész számok).*

a) Lehetséges-e, hogy n (n pozitív egész) év múlva Anna éppen háromszor olyan idős lesz, mint Boglárka? Hány év múlva fordulhat elő, hogy Anna kétszer olyan idős lesz, mint Boglárka? (Válaszunkat indokoljuk.) (*4 pont*)

Anna és Boglárka is nagyon ügyesek matematikából. Órai teljesítményük, eddigi versenyeredményeik alapján a tanáraik benevezték őket egy matematikaversenyre. Anna matematika szakkörön is készül a versenyre. A szakkörre 21 tanuló jár, 9 lány és 12 fiú. A csoport diákjai mindannyian jó képességűek. A tanáruk úgy szeretné összeállítani a versenyre utazó 14 fős csapatot, hogy azon belül a nemek aránya azonos legyen a szakkörön belüli arányukkal.

b) Hányféleképpen állíthatja össze a versenyre utazó csapatot Anna szakkörének tanára? (*3 pont*)

Anna a matematika területein belül legjobban a geometriát szereti. Egyszer rajzolt Boglárkának egy derékszögű trapézt és elmagyarázta unokatestvérének a trapéz tulajdonságait. Anna rajza az $ABCD$ trapéz, amelyben a DA szár merőleges az AB alapra.

c) Lehetséges-e, hogy a CD, DA, AB, BC szakaszok hossza ebben a sorrendben egy mértani sorozat négy szomszédos tagja? (Válaszunkat indokoljuk.) (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Az első kérdésre az $A+n=3\cdot(B+n)$ egyenlet tanulmányozása után válaszolhatunk. Az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy $A-B=2B+2n$. Tudjuk, hogy $A-B=9$, tehát ha lehetséges volna, hogy n év múlva Anna éppen háromszor olyan idős legyen, mint Boglárka, akkor teljesülnie kellene a $9=2B+2n$

egyenletnek. Ez azonban nem lehetséges, mert az egyenlet bal oldala páratlan, míg a jobb oldal páros pozitív egész szám.

A második kérdés megválaszolásához az $A+m=2\cdot(B+m)$ egyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk, ahol m pozitív egész szám. Ismét felhasználva az $A-B=9$ feltételt, a $9=B+m$ egyenletet kapjuk. A feladat szövege szerint Boglárka már iskolába jár, ezért $B\geqslant 6$. Ugyanakkor $B<9$, hiszen $B\geqslant 9$ esetén nem teljesülne a $9=B+m$ egyenlet egyetlen pozitív egész m-re sem. Eszerint csak $m=3$, $m=2$, $m=1$ lehetséges, ekkor Boglárka rendre 6, 7, 8 éves, Anna pedig rendre 15, 16, 17 éves.

Az m szám mindhárom értékét figyelembe véve, m év múlva Anna 18, Boglárka pedig 9 éves lesz.

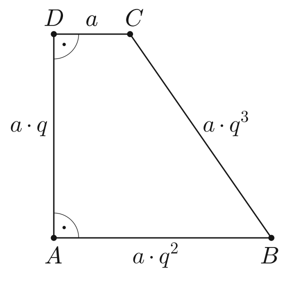
b) Anna matematika szakkörében a lányok és a fiúk számának aránya $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Ez azt jelenti, hogy a versenyre kijelölt 14 fős csoportban 6 lány és 8 fiú lesz, hiszen akkor a versenyre kijelöltek között a lányok és fiúk számának aránya $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

A feladat szövegéből tudjuk, hogy Annát a szakkör tanára benevezte a versenyre, tehát a többi lány közül még 5-öt kell kiválasztania, ezt $\binom{8}{5}=56$-féle módon teheti. A versenyre utazó fiúk kiválasztása $\binom{12}{8}=495$ különböző módon valósulhat meg.

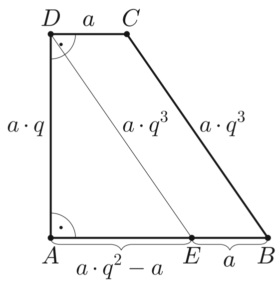
Anna szakköréből a versenyre utazó csapat kiválasztása ezért $56\cdot 495=27\,720$-féle módon lehetséges.

c) A feladat nyilvánvaló megoldása az, amikor a mértani sorozat hányadosa 1, ekkor egyszerűen belátható, hogy a trapéz minden oldala egyenlő hosszú, és mivel derékszögű is, ezért négyzet.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a mértani sorozat hányadosa nem 1, és tekintsük az ennek megfelelő *3.1. ábrát,* ahol a CD, DA, AB, BC szakaszok hosszát rendre a, $a\cdot q$, $a\cdot q^2$, $a\cdot q^3$-nel jelöltük, ahol q a mértani sorozat hányadosa.



3.1. ábra



3.2. ábra

Húzzunk párhuzamost a BC szárral a D ponton keresztül, ekkor az EDA derékszögű háromszöget és a $BCDE$ parallelogrammát kapjuk. A parallelogramma tulajdonsága miatt $DE=a\cdot q^3$, $BE=a$, így $AE=a\cdot q^2-a$ (*3.2. ábra*).

Az EDA derékszögű háromszögre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(a\cdot q)^2+(a\cdot q^2-a)^2=(a\cdot q^3)^2.$$

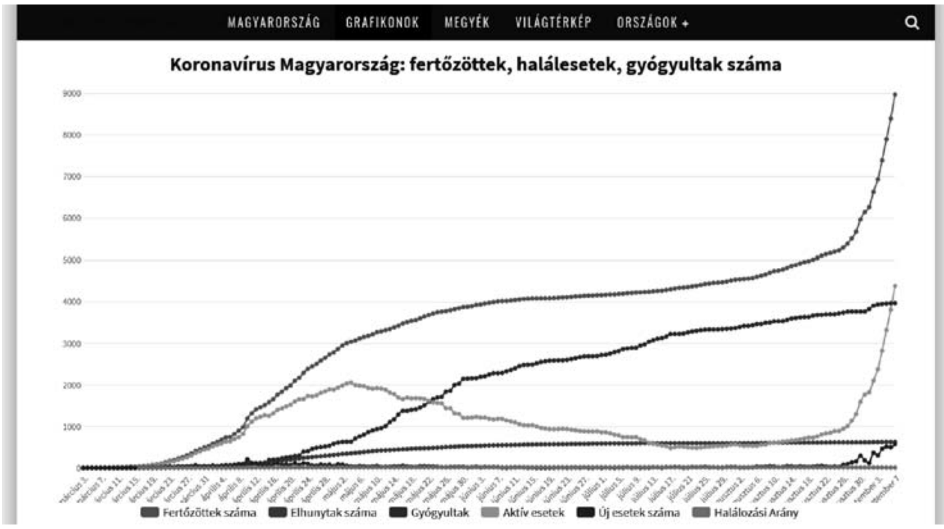
A műveletek elvégzése és az $a^2 > 0$ számmal való osztás után $q^2 + q^4 - 2q^2 + 1 = q^6$, ahonnan a $q^2 = x$ helyettesítéssel és rendezéssel az $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből szorzattá alakítással adódik, hogy $(x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0$.

Nyilvánvaló, hogy a valós számok halmazán $x^2 + 1 \neq 0$, ezért csak $x - 1 = 0$ lehetséges. Ekkor $x = 1$, azaz $q^2 = 1$, és mivel $q > 0$, ezért $q = 1$. Jelen számításainkban azonban föltettük, hogy $q \neq 1$, ezért ez nem ad újabb megoldást. A feladat egyetlen megoldása tehát az, amikor a mértani sorozat hányadosa 1, azaz, amikor a derékszögű trapéz négyzet.

Ha Anna rajza minden feltételnek megfelelt, akkor négyzetet rajzolt Boglárkának.

Megjegyzés. A számítások akkor is ugyanerre az eredményre vezetnek, ha a rajzok $0 < q < 1$ hányadost feltételezve készülnek.

4. *A koronavírus* 2020. *évi elterjedésével kapcsolatos adatokat a* grafikonon *szemlélhetjük* (*forrás:* `pandemia.hu`).



A grafikon egyes adatait táblázatba foglaltuk márciustól szeptemberig minden hónap 6*-án.*

	Fertőzöttek száma
03.06.	4
04.06.	744
05.06.	
06.06.	3990
07.06.	
08.06.	4597
09.06.	8387

A következő táblázatban két tizedesjegyre kerekítve feltüntettük a magyarországi fertőzöttek számának napi átlagos növekedését az egyes időpontok között eltelt idő alatt (a megjelölt időpontok között eltelt napok számát megállapodás szerint úgy számítjuk, hogy az időintervallum felső időpontjának napját hozzászámítjuk az intervallumhoz, az alsó értéket nem).

03.06.–04.06.	04.06.–05.06.	05.06.–06.06.	06.06.–07.06.	07.06.–08.06.	08.06.–09.06.
	78,9		6,63		

a) Töltsük ki mindkét táblázat hiányzó részeit (egy-egy napon a fertőzöttek száma csak pozitív egész szám lehet, ezért a számítások során a kerekítés szabályainak megfelelően járjunk el). (*4 pont*)

b) Egy n pontú teljes gráf élei közül 21 élet törölve egy fagráfot kapunk. Határozzuk meg n értékét. (*5 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy a $11^n+60^n\leqslant 61^n$ egyenlőtlenség $n=1$ kivételével minden pozitív egész számra teljesül. (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az első táblázat szerint március 6. és április 6. között 740-nel nőtt a fertőzöttek száma, és mivel a két időpont között 31 nap telt el (március 31 napos), ezért ez alatt az idő alatt naponta átlagosan $\frac{740}{31}=23{,}87$ fővel növekedett a fertőzöttek száma.

Április 6. és május 6. között a megállapodás szerint számolva 30 nap telt el (április 30 napos), így a május 6-án az első táblázatban szereplő értéket x-szel jelölve és felhasználva, hogy a második táblázat szerint ebben az időszakban átlagosan naponta 78,9-del nőtt a fertőzöttek száma:

$$\frac{x-744}{30}=78{,}9,$$

ahonnan egészre kerekítve $x=3111$, ennyi volt a fertőzöttek száma május 6-án. A kapott eredmény segítségével kitölthetjük a második táblázat harmadik oszlopának hiányzó adatát, figyelembe véve, hogy május 6. és június 6. között 31 nap telt el. Ekkor a fertőzöttek számának átlagos napi növekedése

$$\frac{3990-3111}{31}=28{,}35.$$

Az első táblázatnak a július 6-ára vonatkozó hiányzó adatát y-nal jelölve felírhatjuk, hogy

$$\frac{y-3990}{30}=6{,}63,$$

hiszen a két időpont között most 30 nap telt el. Ebből adódik, hogy kerekítve $y=4189$.

Első táblázatunk most már teljes, kitölthetjük a második táblázat két hiányzó értékét. Eszerint július 6. és augusztus 6., illetve augusztus 6. és szeptember 6. között (július és augusztus is 31 napos)

$$\frac{4597-4189}{31}=13{,}16;\qquad \frac{8387-4597}{31}=122{,}26$$

volt a magyarországi fertőzöttek számának napi átlagos növekedése.

Kitöltött táblázataink:

	Fertőzöttek száma
03.06.	4
04.06.	744
05.06.	3111
06.06.	3990
07.06.	4189
08.06.	4597
09.06.	8387

03.06.–04.06.	04.06.–05.06.	05.06.–06.06.	06.06.–07.06.	07.06.–08.06.	08.06.–09.06.
23,87	78,9	28,35	6,63	13,16	122,26

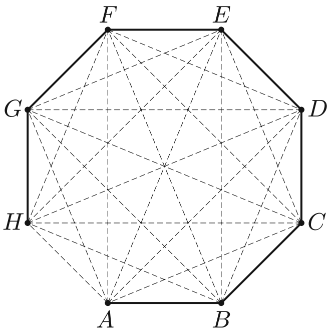
b) Az n pontú teljes gráf éleinek száma

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Ebből a teljes gráfból törlünk 21 élet úgy, hogy a kapott gráf pontjainak száma változatlan, azaz n marad. A feladat szövege szerint a 21 él törlésével fagráfot kapunk, amely gráf éleinek száma $n-1$, ezért felírható, hogy

$$\frac{n(n-1)}{2}-21=n-1.$$

Rendezéssel az $n^2-3n-40=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $n_1=8$, $n_2=-5$. Nyilvánvaló, hogy $n_2=-5$ nem megoldása a feladatnak. Az egyetlen megoldás tehát $n=8$.



Ellenőrizhető, hogy a 8 pontú teljes gráfnak 28 éle van, ebből 21-et törölve egy 7 élű gráfot kapunk. Ez önmagában nem biztos, hogy fagráf, de megadható a 8 pontú teljes gráf 21 olyan élének törlése, amelyre a megmaradt gráf fa, ahogy azt az *ábrán* láthatjuk.

A törölt éleket szaggatottan, a megmaradt 7 élt folytonos vonallal ábrázoltuk.

c) A $11^n+60^n\leqslant 61^n$ egyenlőtlenség $n=1$-re valóban nem teljesül, mert ekkor $11+60>61$. Ha $n=2$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, pontosabban az egyenlőség esete áll fenn, mert $11^2+60^2=61^2$, a $(11;60;61)$ pitagoraszi számhármas.

Legyen most $n>2$ és bizonyítsunk teljes indukcióval. Tegyük föl tehát a $k>2$ pozitív egész számra, hogy

$$11^k+60^k\leqslant 61^k.$$

Bizonyítani fogjuk az indukciós feltevés alkalmazásával, hogy az egyenlőtlenség $k+1$-re is fennáll. Mivel

$$11^{k+1}+60^{k+1}=11\cdot 11^k+60\cdot 60^k<60\cdot 11^k+60\cdot 60^k,$$

ezért

$$11^{k+1}+60^{k+1}<60\cdot(11^k+60^k).$$

Az indukciós feltevés miatt $11^k+60^k\leqslant 61^k$, így $60\cdot(11^k+60^k)\leqslant 60\cdot 61^k$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $60\cdot 61^k<61\cdot 61^k=61^{k+1}$. Az egyenlőtlenség tehát $n=k$-ból következik $n=(k+1)$-re, és mivel $n=2$-re igaz, ezért az állítás minden $n\geqslant 2$ pozitív egész számra fennáll.

II. rész

5. *a) Bizonyítsuk be, hogy a* $2014\cdot 2016\cdot 2024\cdot 2026+100$ *négyzetszám és állapítsuk meg, hogy melyik pozitív egész számnak a négyzete.* *(4 pont)*

b) Igazoljuk, hogy a $]11{,}5;\infty[$ *számhalmazon értelmezett*

$$f(x)=\sqrt{2x+28+10\cdot\sqrt{2x+3}}-\sqrt{2x+28-10\cdot\sqrt{2x+3}}$$

függvény értéke állandó. Határozzuk meg ezt az állandó értéket. *(5 pont)*

c) Hány valós megoldása van a

$$\sin^4 x+\cos^4 x-\frac{5}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}$$

egyenletnek a $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ *számhalmazon? Adjuk meg a feltételeknek megfelelő összes megoldást.* *(7 pont)*

Megoldás. *a)* Legyen $a=2020$. Ezzel a $2014\cdot 2016\cdot 2024\cdot 2026+100$ számot átírhatjuk:

$$(a-6)\cdot(a-4)\cdot(a+4)\cdot(a+6)+100,$$

vagy másként

$$(a-6)\cdot(a+6)\cdot(a-4)\cdot(a+4)+100.$$

Nevezetes azonosság alkalmazásával

$$(a^2-36)\cdot(a^2-16)+100=a^4-52a^2+676.$$

Ugyanakkor

$$a^4-52a^2+676=(a^2-26)^2.$$

Eszerint $2014\cdot 2016\cdot 2024\cdot 2026+100$ valóban négyzetszám, mégpedig

$$2014\cdot 2016\cdot 2024\cdot 2026+100=(2020^2-26)^2=4\,080\,374^2.$$

b) A megadott $]11{,}5;\infty[$ értelmezési tartomány miatt nyilvánvaló, hogy $2x+3>0$, továbbá $2x+28+10\cdot\sqrt{2x+3}>0$. Ugyanakkor a

$$2x+28-10\cdot\sqrt{2x+3}\geqslant 0$$

egyenlőtlenség is teljesül. Ezt a $]11{,}5;\infty[$ számhalmaz figyelembe vételével végzett ekvivalens átalakításokkal beláthatjuk, mert

$$2x+28 \geqslant 10\cdot\sqrt{2x+3}\,,$$
$$x+14 \geqslant 5\cdot\sqrt{2x+3}\,,$$
$$x^2+28x+196 \geqslant 25\cdot(2x+3),$$
$$x^2-22x+121 \geqslant 0,$$
$$(x-11)^2 \geqslant 0,$$

ez pedig minden valós számra igaz. Egyenlőség csak $x=11$ esetén állhatna fenn, de mivel $x\in\,]11{,}5;\infty[$, ezért $(x-11)^2>0$, és így $2x+28-10\cdot\sqrt{2x+3}>0$ is érvényes. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvényben szereplő minden négyzetgyökös kifejezés értelmezve van.

Könnyen észrevehető, hogy

$$2x+28+10\cdot\sqrt{2x+3}=\big(5+\sqrt{2x+3}\,\big)^2$$

és

$$2x+28-10\cdot\sqrt{2x+3}=\big(5-\sqrt{2x+3}\,\big)^2.$$

Ebből a $\sqrt{a}^2=|a|$ azonosság szerint az következik, hogy

$$f(x)=\big|5+\sqrt{2x+3}\big|-\big|5-\sqrt{2x+3}\big|.$$

A feltétel szerint $x>11{,}5$, ebből azt kapjuk, hogy $2x+3>26>25$, és így a $\sqrt{2x+3}$ függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt $\sqrt{2x+3}>5$, ebből pedig azonnal adódik, hogy $5-\sqrt{2x+3}<0$. Mivel pedig $5+\sqrt{2x+3}>0$ nyilván igaz, ezért az abszolútérték értelmezése szerint ez azt jelenti, hogy

$$f(x)=5+\sqrt{2x+3}-\big(-5+\sqrt{2x+3}\,\big)=10.$$

Ha tehát $x>11{,}5$, akkor az $f(x)$ függvény értéke valóban állandó és ennek az állandónak az értéke 10.

c) Az egyenlet algebrai azonosság segítségével átalakítható:

$$(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x-\frac{5}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}.$$

Mivel minden valós x-re $\sin^2x+\cos^2x=1$, ezért

$$1-2\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x-\frac{5}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4},$$

illetve 4-gyel való szorzás és rendezés után

$$8\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x+10\cdot\sin x\cdot\cos x-3=0.$$

Bevezetjük a $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ trigonometriai azonosságból adódó $\sin(2x) = y$ helyettesítést. Ezzel a $2y^2 + 5y - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $y_1 = 0{,}5$ és $y_2 = -3$.

A második gyök nem ad megoldást a feladatra, hiszen $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$.

A $\sin(2x) = 0{,}5$ egyenletből adódik, hogy

$$2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \qquad 2x = \frac{5\pi}{6} + l \cdot 2\pi;$$

illetve

$$x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi, \quad x = \frac{5\pi}{12} + l \cdot \pi \quad (k; l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott végtelen sok valós szám közül nem mindegyik esik a

$$\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] = \left]-\frac{9\pi}{12}; \frac{15\pi}{12}\right]$$

számhalmazba, ezért nem mindegyik megoldása a feladatnak.

Egyszerű számolással beláthatjuk, hogy a $k = 0$ és $k = 1$, valamint $l = -1$ és $l = 0$ egész számok megfelelő megoldást adnak, ekkor az egyenlet gyökei rendre

$$x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \frac{13\pi}{12}, \quad x_3 = -\frac{7\pi}{12}, \quad x_4 = \frac{5\pi}{12}.$$

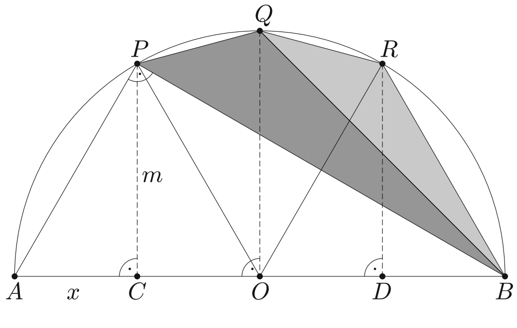
Az egyenletnek tehát a megadott intervallumban 4 valós megoldása van.

6. *Az AB szakasz felezőpontja O, az A ponthoz közelebbi negyedelőpontja C, a B ponthoz közelebbi negyedelőpontja D. A C, O, D pontokban az AB szakaszra rajzolt merőlegesek az AB átmérőjű félkört rendre a P, Q, R pontokban metszik.*

a) Határozzuk meg a BQP és BRQ háromszögek szögeit. (*8 pont*)

b) Hány százaléka a $BRQP$ négyszög területe az ABP háromszög területének? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.) (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Készítünk a feladat szövegének megfelelő rajzot, amelyen az ABP derékszögű háromszög P-hez tartozó magasságát m-mel, az AC szakasz hosszát x-szel jelöltük. Ekkor nyilvánvaló, hogy a feltételek miatt $CO = OD = DB = x$ és így $BC = 3x$.



Thalész tétele miatt $APB = 90°$. Az ABP derékszögű háromszögben felírt magasságtétel szerint:

$$m^2 = x \cdot 3x = 3x^2. \tag{1}$$

A PAC derékszögű háromszögre érvényes a Pitagorasz-tétel: $x^2 + m^2 = PA^2$, ahonnan (1) felhasználásával azonnal adódik, hogy $PA^2 = 4x^2$, és ezért $PA = 2x$.

Az AB szakasz, mint átmérő fölé írt félkör középpontja O, ezért $OA = OP = 2x$. Ebből, és a $PA = 2x$ eredményből az következik, hogy az OPA háromszög szabályos, és így $PAB\sphericalangle = 60°$, illetve $ABP\sphericalangle = 30°$. Az ábrán az A, B, valamint a P, R és C, D pontpárok az OQ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el, ezért az OPA, ORB, illetve OQP, OQR, valamint OPC, ORD háromszögek rendre egybevágók. Ebből adódik, hogy $POR\sphericalangle = 60°$, ez a Q pontot is tartalmazó PR ívhez tartozó középponti szög, így a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján $PBR\sphericalangle = 30°$; mivel azonban a PQ és QR ívek hossza a szimmetria miatt egyenlő, ezért

$$PBQ\sphericalangle = QBR\sphericalangle = 15°. \tag{2}$$

Az R pontot tartalmazó QB ívhez tartozó középponti szög derékszög, ebből azt kapjuk, hogy $BPQ\sphericalangle = 45°$, tehát a (2) összefüggést is felhasználva a BQP háromszög szögeinek nagysága: 15°, 120°, 45°. Az ORB háromszög szabályos, tehát $BOR\sphericalangle = 60°$, a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt így $BQR\sphericalangle = 30°$, vagyis a BRQ háromszög szögeinek nagysága rendre: 15°, 135°, 30°.

b) Az ABP háromszög területe egyszerűen kifejezhető az x és m segítségével, hiszen

$$T_{ABP} = \frac{AB \cdot CP}{2} = \frac{4x \cdot m}{2} = 2x \cdot m. \tag{3}$$

A $BRQP$ négyszög területét talán legegyszerűbb úgy kifejezni, hogy a $BRQPC$ ötszög területéből levonjuk a BPC derékszögű háromszög területét. Az $OQPC$ és $OQRD$ egybevágó, derékszögű trapézok, amelyek területére érvényes, hogy

$$T_{OQPC} = T_{OQRD} = \frac{OQ + m}{2} \cdot x;$$

és mivel $OQ = 2x$, ezért

$$T_{OQPC} = T_{OQRD} = x^2 + \frac{x \cdot m}{2}. \tag{4}$$

A BRD derékszögű háromszög területe pedig:

$$T_{BRD} = \frac{x \cdot m}{2}, \tag{5}$$

illetve a BPC derékszögű háromszög területe

$$T_{BPC} = \frac{3x \cdot m}{2}. \tag{6}$$

A (4), (5), (6) összefüggések alapján a $BRQP$ négyszög területe:

$$T_{BRQP} = T_{OQPC} + T_{OQRD} + T_{BRD} - T_{BPC} = 2x^2. \tag{7}$$

(3) és (7) egybevetésével azt kapjuk, hogy

$$\frac{T_{BRQP}}{T_{ABP}} = \frac{2x^2}{2x \cdot m} = \frac{x}{m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774,$$

hiszen (1) szerint $m = x \cdot \sqrt{3}$.

Eszerint a $BRQP$ négyszög területe az ABP háromszög területének kb. 57,74 %-a.

7. *Hány olyan p pozitív prímszám van, amelyre nem igaz, hogy a*

$$(p-2) \cdot x^2 + (2p+3) \cdot x + p^2 - 1 = 0$$

egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van? (*16 pont*)

Megoldás. Ha nem igaz, hogy a $(p-2) \cdot x^2 + (2p+3) \cdot x + p^2 - 1 = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós megoldása van, akkor legalább két megoldásának kell lennie.

Az egyenletben az x változó második hatványon szerepel, így az egyenlet legfeljebb másodfokú. De elsőfokú nem lehet, mert az elsőfokú egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van. Ez éppen azt jelenti, hogy a $p = 2$ prímszám nem megoldása a feladatnak, mert ekkor behelyettesítéssel a $7x + 3 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása egyébként $x = -\frac{3}{7}$. Ha $p \neq 2$, akkor az egyenlet másodfokú. A fentiek szerint ennek pontosan két valós megoldása kell, hogy legyen (kettőnél több nyilván nem lehet). Ezért azokat a p számokat keressük, amelyre az egyenlet diszkriminánsa pozitív.

Felírva a diszkriminánst:

$$D = (2p+3)^2 - 4 \cdot (p-2) \cdot (p^2 - 1) > 0,$$

amelyből a műveletek elvégzésével és rendezéssel a

$$4p^3 - 12p^2 - 16p < 1 \tag{1}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Vizsgáljuk a továbbiakban az $f(p) = 4p^3 - 12p^2 - 16p$ harmadfokú függvényt. Először keressük meg a függvény zérushelyeit (eltekintve egyelőre attól, hogy p pozitív prím). Szorzattá alakítással:

$$f(p) = 4p \cdot (p^2 - 3p - 4),$$

ebből azt kapjuk, hogy $f(p)$ zérushelyei $p_1 = -1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 4$.

Az $f(p) = 4p \cdot (p^2 - 3p - 4)$ függvényt szorzat alakba írva az egyenlőtlenség:

$$4p \cdot (p+1) \cdot (p-4) < 1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget kell a feltételek figyelembe vételével megoldani.

Mivel p pozitív prím, ezért a szorzatban $4p$ és $(p+1)$ is 1-nél nagyobb egész szám. A $(p-4)$ tényező $p=2$ és $p=3$ esetén negatív, így a bal oldal negatív, tehát kisebb, mint 1. A $p=5$, vagy annál nagyobb prímekre a $(p-4)$ szorzótényező is pozitív egész szám, így a szorzat 1-nél nagyobb lesz. Az egyenlőtlenség tehát csak a $p=2$ és $p=3$ prímszámokra teljesül.

A $p=2$ esetet már kizártuk, ezért $p=3$ az egyetlen megoldás.

A $p=3$ értékre az eredeti egyenlet

$$x^2+9x+8=0,$$

ennek valóban két gyöke van, mégpedig $x_1=-1$, $x_2=-8$.

Megjegyzés. A $p=3$ megoldást más módon is megtalálhatjuk. Meghatározzuk az $f(p)$ differenciálhányadosát:

$$f'(p)=12p^2-24p-16=4\cdot(3p^2-6p-4).$$

Az $f'(p)$ függvény zérushelyei:

$$p_1'=\frac{3-\sqrt{21}}{3}\approx -0{,}528; \qquad p_2'=\frac{3+\sqrt{21}}{3}\approx 2{,}528.$$

Az $f'(p)$ másodfokú függvény ezeken a helyeken előjelet vált, ezért p_1' és p_2' az $f(p)$ szélsőértékhelyei.

Most figyelembe vesszük, hogy p pozitív prím. Eszerint az $f(p)$ függvényt nem vizsgáljuk a $p<p_1'$ intervallumon, noha a p_1' helyen szélsőértéke van, és így előfordulhat, hogy (1) valamilyen negatív p számra fennáll. Nem szükséges vizsgálni az $f(p)$ függvényt a $]p_1';p_2'[$ halmazon sem, mert ebben az intervallumban csak a $p=2$ prímszám fordul elő, ez pedig, mint láttuk, nem megoldása a feladatnak.

A p_2' helyen az $f'(p)$ másodfokú függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt $f(p)$ csökkenő függvényből növekvőbe megy át. Ez pedig azt jelenti, hogy elegendő vizsgálni az (1) egyenlőtlenség teljesülését a $p>p_2'$ prímszámokra. Az első ilyen prím a $p=3$. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ekkor (1) bal oldalának értéke -48, erre nyilván fennáll (1), tehát $p=3$ megoldása a feladatnak.

A következő prím $p=5$, erre (1) bal oldalának értéke 120, vagyis erre (1) nem teljesül, és így $p=5$ nem megoldás. A $p>5$ prímszámokat már nem szükséges vizsgálnunk, hiszen itt $f(p)$ növekvő, tehát biztosan 120-nál nagyobb értéket kapnánk egy következő prím behelyettesítésekor. A $p>5$ prímszámok tehát nem megoldásai a feladatnak, így az egyetlen megoldás $p=3$.

8. *Egy kocka minden élének hossza n, ahol n pozitív egész szám. A kocka minden lapját fehérre festjük, majd a kockát a lapjaival párhuzamos síkok mentén n^3 darab egységnyi élű kockára daraboljuk.*

a) Hányszorosa a kis kockák felszínének összege az eredeti kocka felszínének? (*2 pont*)

Ezután az összes kis kocka lapjait megszámozzuk a következő szabály szerint: először azoknak a kis kockáknak a 6-6 lapját számozzuk meg a pozitív egész számokkal 1-től kiindulva, amelyeknek egyetlen lapja sem fehér, ezután a számozást *folytatjuk azon kis kockák lapjaival, amelynek egy oldala fehér, utána a két fehér lappal rendelkező kis kockák következnek, végül azok a kis kockák, amelyeknek három lapja fehér. Ezzel az eljárással elérjük, hogy minden kis kocka minden lapján szerepel egy-egy pozitív egész szám és ezek a számok mind különbözők.*

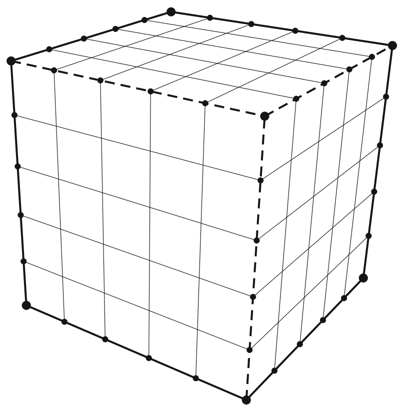
b) Legalább mekkora az n szám, ha biztosan tudjuk, hogy a 2020 *szám olyan kis kockára kerül, amelynek nincs fehérre festett lapja?* (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a pozitív egész n számot, ha a fenti számozással a 4326 *szám az utolsó olyan kis kocka utoljára megszámozott egyik lapjára kerül, amelynek pontosan két lapja fehér.* (*6 pont*)

d) Az n^3 *számú kis kockából véletlenszerűen kiválasztunk egy darabot. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott kis kockának legalább az egyik lapja fehér, ha* $n=8$? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az eredeti kocka felszíne $6n^2$, az n^3 darab egységkocka felszínének összege pedig $6n^3$, ez éppen n-szerese az eredeti kocka felszínének.

b) Az n élű kockát úgy tudjuk a lapjaival párhuzamos élű síkokkal n^3 darab egységkockára darabolni, ha három, egymásra merőleges élét egyenként $n-1$, az adott élre merőleges síkkal elvágjuk az *ábrának* megfelelően (a 3 kiválasztott élet szaggatottan ábrázoltuk).



Az ábra azt is megmutatja, hogy a kis kockák közül éppen 8-nak lesz három lapja befestve (a kocka 8 csúcsánál), pontosan két lapját olyan kis kockáknak festjük be, amelyek az eredeti kocka élei mentén helyezkednek el, de egyetlen csúcsuk sem esik egybe az eredeti kocka valamelyik csúcsával, ebből pedig a nagy kocka 12 éle mentén összesen $12\cdot(n-2)$ van.

Innen azt is láthatjuk, hogy egy lapjával befestett kis kocka éppen $6\cdot(n-2)^2$ darab lesz, olyan kis kocka pedig, amelynek egyetlen lapja sincs befestve, pontosan $(n-2)^3$.

Most már válaszolhatunk a *b*) feladat kérdésére is. Számozási feltételeink figyelembevételével ugyanis azt kapjuk, hogy

$$6\cdot(n-2)^3\geqslant 2020,\quad \text{azaz}\quad n-2\geqslant\sqrt[3]{\frac{2020}{6}}\approx 6{,}96.$$

Ebből az következik, hogy $n\geqslant 8{,}96$, tehát n értéke legalább 9.

c) A *b*) feladat megoldásánál már láttuk, hogy olyan kis kocka, amelynek egyetlen lapja sem fehér, $(n-2)^3$ darab van, ezek számozására összesen az első $6\cdot(n-2)^3$ pozitív egész számot használtuk fel. Olyan kocka pedig, amelynek egy lapja fehér, $6\cdot(n-2)^2$ darab van, ezek számozására a következő $6\cdot6\cdot(n-2)^2$ számot használtuk, végül $12\cdot(n-2)$ olyan kis kocka van, amelynek pontosan két lapja fehér. Ezen kockák lapjaihoz a számozási szabály szerint ezután következő $6 \cdot 12 \cdot (n-2)$ darab pozitív egész számot használtuk. Felírható a következő egyenlet:

$$6 \cdot (n-2)^3 + 36 \cdot (n-2)^2 + 72 \cdot (n-2) = 4326,$$

6-tal való osztás után

$$(n-2)^3 + 6 \cdot (n-2)^2 + 12 \cdot (n-2) = 721. \tag{1}$$

Az (1) egyenlet az $n-2=x$ helyettesítéssel átírható:

$$x^3 + 6x^2 + 12x = 721,$$

illetve

$$x \cdot (x^2 + 6x + 12) = 721. \tag{2}$$

A (2) egyenlet bal oldalának mindkét szorzótényezője pozitív egész.

Az x osztója a 721-nek, amelynek prímtényezős felbontása $721 = 7 \cdot 103$, tehát x lehetséges értékei 1; 7; 103; 721. Nyilván $x = 1$ nem értelmezhető a feladat szempontjából, ezért csak a maradék 3 számot kell megvizsgálnunk. Egyszerű számolással kapjuk, hogy csak $x = 7$ a megoldás, mert a többi értékre a (2) egyenlet zárójeles tényezője 721-nél nagyobb lesz.

A megoldás tehát az $n-2=7$, azaz $n=9$.

d) Ha $n = 8$, akkor az előzőek szerint $(8-2)^3 = 216$ kis kocka lapjai nincsenek befestve, $6 \cdot (8-2)^2$ darab kis kockának pontosan egy lapja fehér, $12 \cdot (8-2) = 72$ kis kockának pontosan két lapja van befestve, végül 8 kis kockának pontosan három lapja fehér, ez összesen $8^3 = 512$ darab kis kocka.

A komplementer esemény valószínűségével számolunk, vagyis annak valószínűségét keressük, hogy a kiválasztott kocka egyetlen lapja sem fehér. Ekkor a kedvező esetek száma az előzőek szerint $k = 216$, az összes eset száma nyilván $n^3 = 512$. Ezért

$$P(\overline{A}) = \frac{216}{512} = \frac{27}{64},$$

és így a feladat megoldása

$$P(A) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

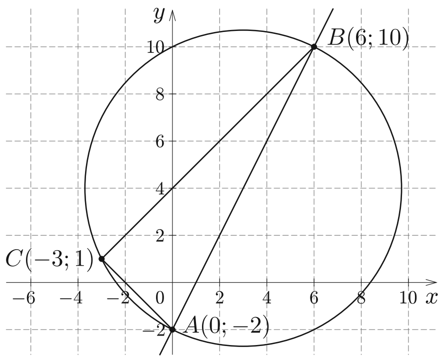
9. *Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;-2)$, $B(6;10)$, $C(-3;1)$.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy az ABC derékszögű háromszög.* (*3 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy az $y = -x^2 + 8x - 10$ egyenletű parabolának a BC oldal egyenesével nincs közös pontja, de az AB oldal egyenesével két közös pontja is van. Határozzuk meg az AB oldal egyenese és az $y = -x^2 + 8x - 10$ egyenletű parabola metszéspontjainak koordinátáit.* (*5 pont*)

c) *Számítsuk ki, hogy az ABC háromszög területének hányadrészét fedik le azok a pontok, amelyekre $y \leqslant -x^2 + 8x - 10$ teljesül.* (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Ábrázoljuk a pontokat a derékszögű koordináta-rendszerben, amelyben megrajzoltuk a háromszög körülírt körét is. Az *ábra* alapján az a sejtésünk alakulhat ki, hogy az ABC háromszög derékszögű csúcsa a C pontban van.



Kiszámítjuk a $\overrightarrow{v}_{CA}$ és $\overrightarrow{v}_{CB}$ vektorok koordinátáit a végpontok és a közös kezdőpont koordinátáinak különbségeként: $\overrightarrow{v}_{CA}(3;-3)$ és $\overrightarrow{v}_{CB}(9;9)$. A két vektor skaláris szorzata felírható a megfelelő koordináták szorzatának összegeként:

$$\overrightarrow{v}_{CA}\cdot\overrightarrow{v}_{CB}=3\cdot 9+(-3)\cdot 9=0.$$

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor zérus, ha a két vektor merőleges egymásra.

Ez éppen azt jelenti, hogy CA merőleges CB-re, vagyis az ABC háromszög C csúcsnál levő belső szöge valóban derékszög.

II. megoldás. Kiszámítjuk az AB, BC és CA oldalak hosszát:

$$AB=\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180},\quad BC=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{162},\quad CA=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}\,.$$

Mivel $BC^2+CA^2=\sqrt{162}^2+\sqrt{18}^2=\sqrt{180}^2=AB^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az ABC háromszögben a C csúcsnál levő belső szög valóban derékszög.

b) Felírjuk a BC és az AB oldalak egyeneseinek egyenletét. Mivel már tudjuk, hogy $\overrightarrow{v}_{CB}(9;9)$ vagy $\overrightarrow{v}_{CB}(1;1)$, ezért a BC oldal irányvektoros egyenletét felírva $x-y=-4$. Az AB oldal egy irányvektora $\overrightarrow{v}_{AB}(6;12)$, vagy $\overrightarrow{v}_{AB}(1;2)$, ezért az AB oldal egyenlete $2x-y=2$. Keressük először az $x-y=-4$, $y=-x^2+8x-10$ másodfokú egyenletrendszer megoldásait. Behelyettesítéssel: $x-(-x^2+8x-10)=$ $=-4$, ahonnan $x^2-7x+14=0$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása, mert a diszkriminánsa $D=-7$.

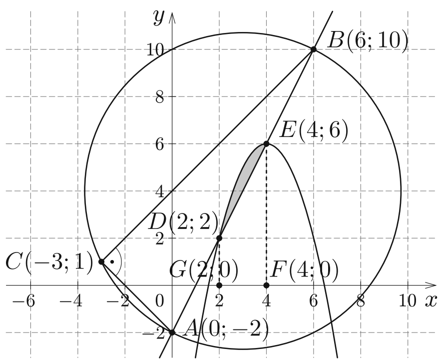
Ez azt jelenti, hogy az $y=-x^2+8x-10$ parabolának a BC oldal egyenesével valóban nincs közös pontja.

Az $2x-y=2$, $y=-x^2+8x-10$ másodfokú egyenletrendszer megoldása:

$$2x-(-x^2+8x-10)=2,\quad \text{innen}\quad x^2-6x+8=0.$$

Az egyenlet megoldásai az $x_1=2$ és $x_2=4$ valós számok.

Visszahelyettesítve megkapjuk az AB egyenes és a parabola közös pontjait: $D(2;2)$, $E(4;6)$.



c) Ábrázoljuk együtt a koordinátarendszerben a háromszöget és a parabolát, a besatírozott rész területét akarjuk kiszámítani.

Mivel a BC egyenesének és a parabolának nincs közös pontja, ezért a BC egyenes a parabola fölött helyezkedik el. Az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{BC \cdot CA}{2} = \frac{\sqrt{162} \cdot \sqrt{18}}{2} = $$
$$= 27 \text{ (területegység).}$$

A parabola alatti területnek az $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ határok közé eső része a Newton–Leibniz-formula alkalmazásával:

$$T_1 = \int_2^4 (-x^2 + 8x - 10)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 10x\right]_2^4 =$$
$$= \left(-\frac{64}{3} + 64 - 40\right) - \left(-\frac{8}{3} + 16 - 20\right) = \frac{28}{3}.$$

Az ábrán a $DEFG$ trapéz területe: $T_2 = \frac{DG+EF}{2} \cdot FG = \frac{2+6}{2} \cdot 2 = 8$ (területegység). A szürkített területet a T_1 és T_2 területek különbségeként kapjuk:

$$T = T_1 - T_2 = \frac{28}{3} - 8 = \frac{4}{3} \text{ (területegység).}$$

Ebből az következik, hogy

$$\frac{T}{T_{ABC}} = \frac{\frac{4}{3}}{27} = \frac{4}{81},$$

tehát a szürkített terület az ABC háromszög területének pontosan $\frac{4}{81}$-ed része.

Bíró Bálint
Eger

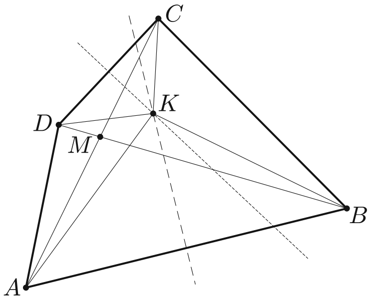
Matematika feladat megoldása

B. 5042. *Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy nem trapéz, valamint, hogy AC és BD átlói egyenlő hosszúak. Az átlók metszéspontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy az ABM és CDM körök második, M-től különböző metszéspontja a BMC szög felező egyenesére esik.*

(*4 pont*)

Megoldás. Az AB és CD szakaszok felezőmerőlegesei messék egymást a K pontban. A K pont biztosan létezik, hiszen ellenkező esetben $AB \parallel CD$, viszont a feltétel szerint $ABCD$ nem trapéz.

Egy szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától, így $KA=KB$ és $KC=KD$. Azt is tudjuk, hogy $AC=BD$, így az AKC és BKD háromszögekben az oldalak páronként egyenlő hosszúak, azaz a két háromszög egybevágó. Az egybevágóság alapján $KAM\sphericalangle = KAC\sphericalangle = KBD\sphericalangle = KBM\sphericalangle$. A kerületi szögek tételének megfordítása miatt az A, B, K és M pontok egy körön vannak. Hasonlóan azonnal látható, hogy a C, D, M, K pontok is egy körön vannak.



Ezzel beláttuk, hogy az (ABM) és (CDM) körök második metszéspontja a K pont.

Az AKC és BKD háromszögek egybevágóságából következően a K pont ugyanolyan messze van az AC és BD egyenesektől, tehát mindenképpen rajta van az AC és BD egyenesek egyik szögfelezőjén. Ez a szög nem lehet az $AMB\sphericalangle = CMD\sphericalangle$ szög, hiszen az $AMKB$ és $DMKC$ húrnégyszögek, tehát konvexek.

A K pont így biztosan a BMC szög felezőjére illeszkedik.

Bán-Szabó Áron (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 55 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 50, 3 pontot 2 tanuló. 1 pontos 1, 0 pontos 2 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (674–678.)

K. 674. Anna néni udvarában 120 állat él: barna tyúkok, fehér kacsák, barna malacok és fehér nyulak. A fehér állatok száma 64, a kétlábú állatok száma 84. Kétszer annyi barna tyúk él itt, mint fehér nyúl. Melyik fajta állatból hány él Anna néni udvarában?

K. 675. Egy nagy cégnél karácsonyi partit rendeztek, és többen elvitték a házastársukat is magukkal. A partin 5-ször annyi férfi volt jelen, mint nő. Este 10 órakor néhány férfi a feleségével együtt hazaindult, ekkor a partin jelenlevő nők száma a jelenlevő férfiak számának hetedrészére csökkent. A férfiak hányadrésze ment haza 10 órakor?

K. 676. Egy 6×6-os sakktáblát 18 darab 1×2-es dominóval átfedés nélkül lefedünk. Mutassuk meg, hogy a sakktábla kettévágható egy egyenessel úgy, hogy az egyetlen dominót sem vág ketté.

K. 677. Az S számhalmaznak 5 eleme van. Az elemeket páronként összeadva a következő összegeket kapjuk: 0, 6, 11, 12, 17, 20, 23, 26, 32 és 37. Adjuk meg S elemeit.

(*Texas Mathematical Olympiad*)

K. 678. Az asztalon egy sorban egymás mellett fekszik 2020 db pénzérme váltakozva fej, írás, fej, írás, ... sorrendben. Egy lépésben egyszerre bármelyik három szomszédos pénzérmét átfordítjuk a másik oldalára. Elérhető-e ilyen lépések sorozatával, hogy minden pénzérme írást mutasson?

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1637–1643.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1637. Sárkányországban minden hétfejű sárkány tüzet okád, de nem minden hétfejű tűzokádó lény sárkány. A legutóbbi lényszámlálás szerint az országban pont ugyanannyi sárkány él, mint tűzokádó lény. Igaz-e, hogy minden sárkány hétfejű?

C. 1638. Melyek azok a nem szabályos háromszögek, amelyek magasságpontja, köré írt körének középpontja, beírt körének középpontja és két csúcsa egy körre esik?

Feladatok mindenkinek

C. 1639. Gondoltunk öt számra. Közülük minden lehetséges módon kiválasztottunk hármat-hármat és összeadtuk őket. Összegként a következő értékeket kaptuk: 41, 42, 44, 51, 52, 53, 54, 54, 55, 64. Mi volt az öt gondolt szám?

Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

C. 1640. Az $ABCD$ négyszögben jelöljük az ABC háromszög súlypontját S-sel, az ACD háromszög súlypontját pedig P-vel. Igazoljuk, hogy az AC és BD átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezi az SP szakaszt.

C. 1641. Határozzuk meg, hogy mi lesz az $a^3b^2c^5$ kifejezés együtthatója az $(a+b+c)^{10}$ hatványkifejezés kifejtésében.

Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1642. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, a három párhuzamos oldalpár egymástól való távolsága megegyezik, és az A és D csúcsánál derékszög van. Bizonyítsuk be, hogy a BE és CF átlók által bezárt szög $45°$.

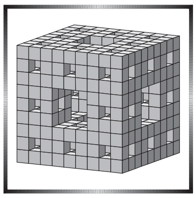
C. 1643. Számológép használata nélkül határozzuk meg a

$$(\log_{10} 11)\cdot(\log_{11} 12)\cdot(\log_{12} 13)\cdot\ldots\cdot(\log_{99} 100)$$

kifejezés értékét.

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5134–5141.)



B. 5134. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre a $\sqrt{\frac{3n-5}{n+1}}$ kifejezés szintén egész.

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5135. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból húzott magasságok talppontjai rendre A_1, B_1 és C_1; az AA_1 és BB_1 magasságok felezőpontjai pedig rendre G és H. Igazoljuk, hogy a C_1GH háromszög körülírt köre áthalad az AB oldal F felezőpontján.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5136. A kishitűek és nagyotmondók szigetén minden ember vagy kishitű vagy nagyotmondó. Egyszer egy külföldi tévedt a szigetre, és egy társaság meghívta vacsorázni. A vacsora végén megkérdezte a társaság mindegyik tagjától, hogy hány nagyotmondó van a társaságban. A kishitűek az igazságnál kisebb, a nagyotmondók pedig nagyobb számot válaszoltak. Igaz-e, hogy a kapott válaszok ismeretében egyértelműen meghatározható a nagyotmondók száma?

(*5 pont*) *Dürer Verseny* egy feladata alapján

B. 5137. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok körében:

$$x + y^2 = z^3,$$
$$x^2 + y^3 = z^4,$$
$$x^3 + y^4 = z^5.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5138. Az ABC nem egyenlő szárú háromszög A-ból, illetve B-ből induló belső szögfelezője a szemközti oldalt az A', illetve B' pontban metszi. Bizonyítandó, hogy $A'B'$ felezőmerőlegese akkor és csak akkor megy át a beírt kör középpontján, ha $AB' + BA' = AB$.

(*5 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5139. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ADM háromszög területe nagyobb a BCM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, AD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint 1.

(*5 pont*)

B. 5140. Egy szigeten 10 ország található, ezek közül némelyek szomszédosak egymással, mások nem. Mindegyik ország egy saját valutát használ. Mindegyik országban egyetlen pénzváltó működik, a következő szabályok szerint: aki az adott ország valutájából 10 darabot befizet, az kap az összes szomszédos ország valutájából 1-1 darabot. Arisztid és Tasziló fejenként 100-100 egységgel rendelkeznek mindegyik ország valutájából. Ezután mindketten a nekik tetsző sorrendben váltogatják a pénzüket a különböző országok pénváltóiban, amíg csak van olyan valutájuk, amit tudnak váltani (tehát legalább 10 darab van belőle). Bizonyítsuk be, hogy a végén pontosan ugyanannyi bergengóc tallérja lesz Arisztidnek és Taszilónak (a bergengóc tallér a sziget egyik országának valutája).

(*6 pont*) *Mészáros Gábor* (Budapest) ötletéből

B. 5141. Bizonyítsuk be, hogy

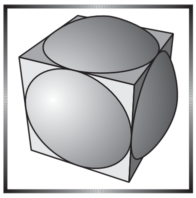
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+1}{j+1} = 2^{2n}.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Nagy Dávid* (Cambridge)

❄

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (789–790.)

A. 789. Legyen $p(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \ldots + a_1x + 1$ egész együtthatós polinom, melynek minden gyöke valós és 1/3-nál kisebb abszolút értékű. A $p(x)$ polinom minden együtthatója a $[-2019a, 2019a]$ intervallumba esik egy rögzített a pozitív egész számra. Bizonyítsuk be, hogy ha $p(x)$ felbontható két alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzatára, akkor legalább az egyik szorzótényezőben mindegyik együttható kisebb, mint a.

Javasolta: *Navid Safaei* (Teherán, Irán)

A. 790. András és Berta a következő játékot játssza: adott két kupac, az egyikben a, a másikban b darab kavics található. Az első körben Bea választ egy k pozitív egész számot, András pedig az egyik kupacból elvesz k darab kavicsot (ha k nagyobb a kupacban lévő kavicsok számánál, az egész kupacot elveszi). A második körben fordított a szereposztás: András mond egy pozitív egész számot, és Berta veszi el a kavicsokat valamelyik kupacból; és így tovább, felváltva. A játékot az veszti el, aki elveszi az utolsó kavicsot.

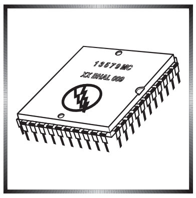
Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Kacifántos kerítés – II. rész

Az első részben az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpia (CEOI) Kacifántos kerítés című feladatát oldottuk meg egy egyszerű, de nem elég hatékony algoritmussal. A megoldás a kerítésen keresett téglalapokat úgy, hogy végighaladt a kerítéselemeken és minden lehetséges bal felső csúcs magasságához megkereste a legtávolabbi jobb alsó csúcsot, majd egy kombinatorikai képlettel megadta az ebben a részben lévő téglalapokat.

A megoldás hatékonyságának növelése érdekében a kerítés egy más felosztását kellett találnunk, ahol nincs szükség keresésre. Ez a felosztás a kerítés alakjából következik: azok a csúcsok egy kerítéselemen, amelyek y koordinátája nagyobb mindkét szomszédos kerítéselem magasságánál csak olyan téglalapok csúcsai lehetnek, amelyek abban a kerítéselemben vannak. Az ezekből választott bal felső csúcsok jobb alsó párja a kerítéselem jobb alsó csúcsa, tehát azonnal adódik, keresésre nincs szükség.

Nézzük például a hátsó belső borítón megtalálható *1. ábrán* a $(6,4), L, K, J$ négyszöget. A rajta található téglalapok $y>4$ koordinátájú bal felső csúcsaihoz csak olyan jobb alsó csúcsok tartozhatnak, amelyek csak ezen a kerítéselemen lehetnek, a legtávolabbi jobb alsó csúcs a $(8,0)$. Ugyanakkor az is látszik, hogy az $y \geqslant 4$ koordinátájú csúcsok csak olyan téglalapok jobb alsó csúcsai lehetnek, amelyek bal felső csúcsa ebben a kerítéselemben van, és a bal felső csúcs y koordinátája 4-nél nagyobb.

Miután megszámoltuk az $y>4$ bal felső csúcsokhoz tartozó téglalapokat, ezeket a pontokat elhagyhatjuk, mivel jobb alsó csúcsként is már megszámoltuk őket. Tehát a számolás után a kerítés egyszerűsíthető: a szomszédai közül kiemelkedő kerítéselem mindkét szomszédjánál magasabban fekvő csúcsai elhagyhatók. Így egy olyan kerítéselemünk marad, amely valamelyik szomszédjával azonos magasságú. Az előbbi példában a J és K csúcsokkal határolt kerítéselem felső vonalát a továbbiakban a $(6,4)$ és L csúcsok alkotják.

Az előző lépés tovább folytatható: a $(6,3), N, M, (6,4)$ téglalap (amely már két kerítéselem része) $y>3$ csúcsaival képzett téglalapok megszámolása után az $y>3$ csúcsok elhagyhatók. Folytatásként az $I, (12,2), P, (6,3)$ téglalap, majd a $(0,1), Q, (12,2), (0,2)$ téglalap következik. Ez az utolsó lépés természetesen csak akkor következhet, ha a $(0,2)$ és $HGFEDBC$ csúcsok által határolt részben lévő téglalapokat már megszámoltuk. Ezek az elhagyások addig folytathatók, amíg végül egy téglalap marad a kerítésből. Az ezen található téglalapok megszámolása az előzőekhez hasonlóan történhet.

A bemutatott eljárás minden lépésében egy „kiemelkedő" téglalapot kapunk, amelynek alsó és jobb oldala kivételével minden pontja olyan téglalapok bal felső csúcsa, melyekhez csak az adott kiemelkedésben és alatta találhatóak a számolásnál figyelembe veendő jobb alsó csúcsok. Az előbbi példában bemutatott $(6,4), L, K, J$ téglalap esetében a (b,f) bal felső csúcsok koordinátáira igaz, hogy $6 \leqslant b < 8$ és $4 < f \leqslant 6$, és a hozzájuk tartozó (j,a) jobb alsó csúcsok koordinátáira teljesül, hogy $b < j \leqslant 8$ és $0 \leqslant a < f$.

Nézzük általánosan, tehát legyen egy, az eljárásban talált téglalap bal felső csúcsa $(\mathit{bal}, \mathit{fent})$ és jobb alsó csúcsa $(\mathit{jobb}, \mathit{lent})$. Az elhagyása előtt megszámolandó téglalapok (b,f) bal felső csúcsának koordinátáira teljesül, hogy $\mathit{bal} \leqslant b < \mathit{jobb}$ és $\mathit{lent} < f \leqslant \mathit{fent}$, míg (j,a) jobb alsó csúcsainak koordinátáira igaz, hogy $b < j \leqslant \mathit{jobb}$ és $0 \leqslant a < f$. Egy adott (b,f) bal felső csúcshoz tartozó téglalapok száma tehát $(\mathit{jobb}-b)\cdot(f-0)$. Ezeket összegezve a lehetséges (b,f) csúcsokra a téglalapok száma:

$$\sum_{b=\mathit{bal}}^{\mathit{jobb}-1} \sum_{f=\mathit{lent}+1}^{\mathit{fent}} (\mathit{jobb}-b)\cdot(f-0).$$

Ebben az összegben minden előforduló $(jobb - b)$ tényezőt megszorzunk minden f értékkel. A szorzás és az összeadás asszociativitása következében ezt úgy is végezhetjük, hogy először összegezzük a tényezőket külön-külön, majd az így kapott mennyiségeket szorozzuk össze. Tehát a kifejezés kevesebb szorzással fölírva:

$$\sum_{b=bal}^{jobb-1} (jobb - b) \cdot \sum_{f=lent+1}^{fent} f.$$

Ebben két számtani sorozat szorzata szerepel, tehát az összegképlet alapján az eredmény:

$$\frac{(jobb - bal + 1) \cdot (jobb - bal)}{2} \cdot \frac{(lent + 1 + fent) \cdot (fent - lent)}{2}.$$

A téglalapok megszámolását tehát megkapjuk a fenti eredmény alapján. Most már csak az a kérdés, hogy miként találjuk meg az „elhagyható” kerítésrészeket, amelyek a szomszédos kerítésrészeknél magasabbak. Az algoritmus nem végezhet a kerítéselemeken átnyúló keresést, tehát például a kerítéselemek eredeti sorrendjében kellene haladnia.

1. feladat: Vizsgáljuk meg az *1. ábrát,* és vegyük észre, hogy milyen jellemző tulajdonságok alapján találjuk meg a keresett kiemelkedéseket!

Haladjunk a kerítés felső vonalán. Az első kiemelkedés a $(2,3), F, E, D$, amelyet az F csúcs zár. Ezt a részt elhagyva és a kerítés vonalán lefelé haladva a $(4,3)$ pontban érünk a C csúcs magasságába, így a $C, (4,3), G, (2,4)$ téglalapot találjuk. Ennek levágása után a kerítés vonalán tovább menve a H csúcsban érünk egy kiemelkedés legjobboldalibb és legalsó pontjához, így elhagyhatjuk a $(0,2), H, (4,3), B$ téglalapot.

Megfigyelhető, hogy a kerítés vonalán egy csúcstól az alatta lévő csúcsig haladva találunk olyan pontot, amely egy kiemelkedés jobb alsó sarka. A megtaláláshoz csak azt kell tudnunk, hogy a vizsgált kerítésrész jobb oldalához melyik bal oldal tartozik. Nézzük a borítón lévő *2. ábrát.* Az első lefelé haladás az EF szakaszon történik, ahol az F csúcs egy jobb alsó sarok, melynek bal alsó párja a kiemelkedés bal oldalán, a CD szakaszon található. Számoljuk meg a talált kerítésrészhez tartozó téglalapokat, majd hagyjuk el a D és E csúcsokat, és vegyünk föl egy új csúcsot, D'-t. A kerítés vonalán a következő lefelé haladás a GH szakaszon történik, a bal oldal pedig továbbra is a CD' szakaszra esik, így a $G'C$ szakasz feletti rész téglalapjai megszámolandók és a D', F, G csúcsok elhagyhatók. Az ábrán a kiemelkedések jobb alsó csúcsától a bal alsó csúcsáig egy-egy nyíl mutat.

Továbbhaladva a kerítés vonalán lefelé a H pontba jutunk, azonban a hozzá tartozó bal oldal már nem a CD egyenesre esik, hanem az attól balra eső AB szakaszra. Ez éppen az a rész, ahol a CD szakaszt megelőzően fölfelé haladtunk. Így látható, hogy a kerítés vonalán a fölfelé és lefelé haladó mozgások szakaszai párba állíthatók. Ha továbbhaladunk a kerítés vonalán, akkor megfigyelhetjük ezeket a párokat az $IJKLMNOPQ$ részen haladva is. Itt az utolsó szakaszon lefelé mozogva a Q ponthoz tartozó bal alsó csúcs ismét az AB szakaszra esik, miután az $P'I$ fölötti kerítésrészt is elhagytuk.

2. feladat: Adjuk meg, hogyan lehetne könnyen megtalálni egy-egy „kiemelkedés" jobb alsó csúcsához a bal alsó csúcsot, tehát a *2. ábrán* jelölt nyilak végpontját!

Induljunk el a kerítés bal alsó csúcsától fölfelé és haladjunk végig a kerítés vonalán annak jobb oldali legalsó csúcsáig. Minden fölfelé haladásnak megvan a lefelé haladás párja a kerítés vonalán való mozgás során. Ezek a párok alkotják a kiemelkedések bal és jobb oldali szakaszát. A párok úgy következnek a kerítés vonalán, mint egy kifejezés nyitó és csukó zárójelei, vagyis egymásba ágyazva. Ha egy felfelé mozgás megelőz egy másikat, akkor a hozzá tartozó lefelé haladás később jön, a másikhoz tartozó lefelé mozgás után. Ez egy helyesen zárójelezett kifejezésnél is pontosan így van. Amikor egy kifejezést kiértékelünk, akkor a legbelső zárójelben lévő részt számoljuk ki, majd a zárójeleket elhagyva folytatjuk a számolást. Itt pontosan ugyanezt kell tennünk, csak a kifejezés helyett a téglalapok megszámolását végezzük el, majd a kiemelkedő részt elhagyjuk, ahogyan a kifejezésnél a zárójeleket.

Az egymásba ágyazás, a belső párok elhagyása azt sugallja, hogy használjunk vermet a bal oldali szakaszok tárolására. A verem tetején mindig az a szakasz lesz, amelynek jobb oldali párja elsőként következik. A kerítés vonalán való haladás során minden felfelé mozgás egy új pár bal oldalát helyezi a veremre, míg a lefelé haladás egy párt vesz majd ki a veremből. Illetve ez csak akkor teljesül, ha a felfelé és lefelé haladás ugyanolyan magasról indult, tehát például a *2. ábrán* az $RSTU$ kiemelkedésnél. Általában kicsit összetettebb a helyzet. Például az I csúcstól fölfelé mozogva először tegyük a verem tetejére az IJ szakaszt, majd a KL szakaszon lefelé haladva a verem tetején lévő szakaszt cseréljük az IJ' szakaszra. Továbbhaladva a kerítésen az MN szakaszon lefelé változtassuk a verem tetején lévő szakaszt $I''J$-re. Innen továbblépve a PP' szakaszon lefelé haladva vesszük ki az IJ'' szakaszt a veremből. Figyelnünk kell tehát, hogy a lefelé mozgások során a verem tetején lévő szakasz alsó csúcsa és a lefelé mozgás szakaszának alsó csúcsa hogyan viszonyul egymáshoz. Innen látszik, hogy elegendő a veremben a felfelé haladó szakaszok alsó csúcsát elhelyezni, a felső csúcsra nincs szükség.

A program elkészítéséhez először be kell olvasnunk az adatokat, majd azokból meg kell adnunk a kerítés vonalán haladáskor érintett csúcsokat. Az *1. ábrán* ezeket a csúcsokat betűkkel jelöltük, melyeken ABC rendben fogunk végighaladni. Ezek a csúcsok a bemenetként kapott kerítéselemek magasságából és szélességéből számíthatók, a bemenet sorrendjében követik egymást. Így a bemenet feldolgozásakor egy lineáris futásidejű algoritmussal megadhatjuk a csúcsokat. Ennek a programrésznek az elkészítését az olvasóra bízzuk. Feltételezzük a továbbiakban, hogy a következő programrészek futása előtt már rendelkezésünkre áll egy $2N+2$ méretű `pont[0..2N+1]` tömb, amely sorrendben tartalmazza a kerítés vonalán érintett csúcsok (x,y) koordinátáit.

Ezen előkészítés után következzen a kerítés vonalának bejárása. Vegyünk föl egy `v` vermet, amely a `pont[ ]` tömb csúcsainak sorszámát tárolja, azaz a futás során legföljebb $2N+1$ csúcs indexét. Helyezzünk a verem tetejére egy 0-t, az első csúcs sorszámát. Amikor ez a csúcs kikerül a verem tetejéről, akkor bejártuk a kerítés teljes vonalát, tehát az üres verem jelzi a műveletsor végét. A `bal` és `jobb` változók mutatják, hogy a bejárás melyik csúcsokat vizsgálja. Kezdetben az első kerítéselem két felső pontjának sorszámát tartalmazzák.

```
1. Függvény KacifantosKerites2(N,h[0..N-1],w[0..N-1]) : Egész
2.     BeolvasasCsucsepites(N,h,w,pont)
3.     darab := 0
4.     v.Verembe(0)
5.     bal := 1
6.     jobb := 2
7.     Ciklus amíg nem v.Üres()
```

A végeredményt adó függvényt több részletben írjuk le, tehát az algoritmus-részletek és magyarázatok felváltva követik egymást. A jobb érthetőség érdekében a függvény sorait számozzuk. A ciklusmagban egy elágazás szerepel, amelyben először megállapítjuk, hogy a kerítésen történő mozgás a jobb és az utána következő csúcs között milyen irányú. Ha felfelé haladunk a kerítés vonalán, akkor vermeljük a jobb oldali alsó csúcsot, vagyis megjegyezzük, hogy itt van egy kerítésrész bal oldali alsó csúcsa, majd továbblépünk a következő kerítéselemre. Ha azonos magasságú kerítéselemek vannak egymás mellett, akkor egyszerűen átmegyünk a következőre.

```
8.         Ha pont[jobb].y < pont[jobb+1].y akkor
9.             v.Verembe(jobb)
10.            bal := jobb+1
11.            jobb := jobb+2
12.        egyébként ha pont[jobb].y = pont[jobb+1].y akkor
13.            jobb := jobb+2
14.        egyébként
```

Az elágazás utolsó része a leginkább összetett, vagyis amikor lefelé haladunk a kerítés vonalán, tehát amikor pont[jobb] > pont[jobb+1]. Ekkor három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a verem tetején lévő csúcs milyen magasan van a jobb után következő csúcshoz képest.

```
15.            Ha pont[v.Felső()].y > pont[jobb+1].y akkor
16.                szamol(darab,pont[v.Felső()].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[v.Felső()].y)
17.                pont[jobb].y := pont[v.Felső()].y
18.                v.Veremből()
19.                bal := v.Felső()+1
```

Amikor a verem tetejéhez tartozó csúcs van magasabban, akkor csak az ő magasságáig lévő téglalapot mint kiemelkedést számoljuk meg és hagyjuk el. A példában ilyen eset a GH szakaszon történő lefelé mozgás. Ekkor a veremben az A és a C csúcs indexe van, a tetején a C csúcs sorszáma. Mivel a C csúcs magasabban van, mint a G csúcs, ezért a jobb indexnél lévő G csúcsot módosítjuk G'-re (ezzel hagytuk el a kiemelkedést), majd kivesszük a veremből a C csúcs sorszámát, ahol most egyedül az A csúcs indexe van. Ezután megadjuk a bal változóban a bal oldali felfelé menő rész felső csúcsának indexét, a példában a B csúcsot. Így a folytatásként szóba jöhető kiemelkedés a bal oldala az AB szakasz, jobb oldala a $G'H$ szakasz.

```
            egyébként ha pont[v.Felső()].y = pont[jobb+1].y akkor
               szamol(darab, pont[v.Felső()].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[v.Felső()].y)
               v.Veremből()
               Ha nem v.Üres() akkor
                  bal := v.Felső()+1
                  jobb := jobb+2
               Elágazás vége
```

Amikor a verem legfelső eleme által hivatkozott csúcs azonos magasságban van a lefelé mozgás alsó csúcsával, akkor a kiemelkedés megszámolása után elhagyjuk ezt a kerítésrészt, vagyis kivesszük a veremből a tetején lévő elemet és továbblépünk előre a jobb változóval. Természetesen ezt csak akkor tehetjük meg, ha nem a 0-ás csúcsot vettük ki a veremből, hiszen azzal már befejeztük a bejárást. Az ábrán például az $RSTU$ kiemelkedésnél az R csúcsra mutat a verem felső száma és a TU szakaszon mozgunk lefelé. Ekkor a számolás után a verem tetején az A csúcs sorszáma található, a bal változó a B'' csúcsra, míg a jobb a V csúcsra hivatkozik.

```
            egyébként
               szamol(darab, pont[v.Felső()].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[jobb+1].y)
               pont[bal].y := pont[jobb+1].y
               jobb := jobb + 2
            Elágazás vége
         Elágazás vége
      Ciklus vége
      KacinfatosKerates2 := darab
   Függvény KacifantosKerites2 vége
```

A harmadik eset az a lehetőség, amikor a verem teteje által mutatott csúcs magassága kisebb, mint a lefelé mozgás alsó csúcsának magassága. Ekkor szintén megszámoljuk a kiemelkedő téglalaprészben lévő téglalapokat, majd a bal oldali szakasz felső csúcsának magasságát állítjuk a jobb oldali szakasz alsó csúcsának magasságára. Ez történik a példában, amikor az MN szakaszon mozgunk lefelé, és a J' csúcsból a J'' csúcsba lépünk.

A megoldást adó függvény a ciklus befejezése után nem tesz mást, mint a megszámolt téglalapok darab változóban lévő értékét visszaadja. Ehhez az algoritmusban többször is szereplő szamol(darab,bal,fent,jobb,lent) függvényt hívja meg minden kiemelkedő rész elhagyása előtt. A függvényben csak szorzás és 2-vel való osztás szerepel a korábban kiszámított képlet alapján. Csupán arra kell ügyelnünk, hogy a kifejezésben lévő mennyiségek szorzata igen nagy lehet, ezért túlcsordulás történhet. Ennek elkerülésére a mennyiségek 1 000 000 007-tel vett maradékait kell szoroznunk, illetve a szorzat maradékát hozzáadnunk a darab eddigi értékéhez. Ennek a függvénynek a megírását is az olvasóra bízzuk azzal a megjegyzéssel, hogy a 2-vel való maradékos osztásnál figyeljünk arra, hogy a szorzatok tényezői közül csak a párosakat osszuk.

Ezen algoritmus lépésszáma a bemenet N elemszámával arányos, tehát a program lineáris futásidejű, így a versenyen is megállta volna a helyét hatékonyság szempontjából is.

Schmieder László

Informatikából kitűzött feladatok

I. 523. András egy szabályos sokszög csúcsaiba pozitív egész számokat írt föl egymás után, az óramutató járásával azonos irányban haladva. Ezután az első csúcsnál lévő számú lépést tett a csúcsokon elindulva ettől a csúcstól az óramutató járásával ellentétes irányba. Megérkezett egy csúcshoz, majd innen kiindulva az előző iránnyal ellentétes irányba lépett a csúcsnál lévő számnak megfelelő számú lépést. Ismét megérkezett egy csúcshoz, ahonnan elindult az előző iránnyal ellentétes irányba, és ismét a csúcsnál lévő számnak megfelelő számú lépést tett. Ezt a folyamatot egészen addig folytatta, amíg egy olyan csúcsba nem ért, ahol már korábban is járt.

Készítsünk programot, amely a számsorozat alapján megadja, hogy melyik szám áll annál a csúcsnál, ahol befejeződött a folyamat.

A standard bemenet első sorában a számok N darabszáma áll (N értéke legföljebb 100), míg a második sorában N darab pozitív egész (egyik sem nagyobb 500-nál). A standard kimenet egyetlen sorába írjuk az annál a csúcsnál lévő számot, ahol befejeződött a folyamat.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`5` `13 9 11 12 15`	`13`

Beküldendő egy tömörített `i523.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 524. Ármin bácsi és unokája, Jancsi elutazott a fáraók által építtetett piramisok megcsodálására. Az egyik piramist szeretnék megmászni, ami jó erőnlétet igényel tőlük. A piramis hatalmas faragott kőtömbökből áll, amelyek egymásra épülő szinteket alkotnak. A piramis egyik oldalán az egymást követő szinteket több párhuzamos lépcsősor is összeköti, amelyek különböző számú lépcsőt tartalmaznak. Egyik szintről a következő szintre érve a lépcsősor nem folytatódik tovább, hanem a tőle balra vagy jobbra eső új lépcsősoron lehet továbbhaladni.

A turistákat tájékoztató anyagban megtalálható, hogy a szinteket összekötő lépcsősorok hány darab lépcsőből állnak. Ármin bácsi a lassabb, így ő az összesen legtöbb lépcsőből álló útvonalat szeretné választani, míg a gyorsabb Jancsi a legkevesebből állót.

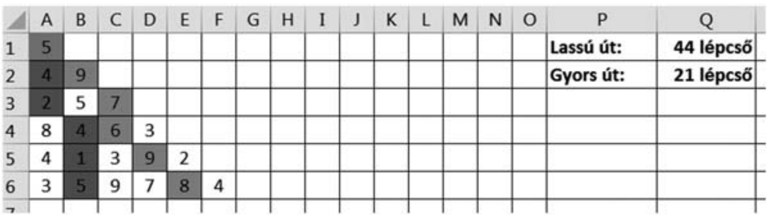
A példában az útvonalat felülről lefelé a lépcsők száma adja meg.

Minta (7 szintes piramisra)	**Eredmény**
5 4 9 2 5 7 8 4 6 3 4 1 3 9 2 3 5 9 7 8 4	Lassú út: 44 lépcső (5 9 7 6 9 8) Gyors út: 21 lépcső (5 4 2 4 1 5)

Rendelkezésünkre áll egy 15 szintből álló piramis tájékoztató anyagából a szinteket összekötő lépcsők száma a `piramis.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.

Ármin bácsi és Jancsi útvonal-kijelölését segítsük táblázatkezelővel.

1. Ármin bácsi kívánságának megfelelően számítsuk ki, hogy hány lépcsőből áll a leglassabb útvonal.
2. Adjuk meg, hogy a fürge Jancsi legkevesebb hány lépcsőfokon juthat fel a piramis tetejére.
3. Szemléltessük feltételes formázás használatával a két útvonalat.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	5															**Lassú út:**	**44 lépcső**
2	4	9														**Gyors út:**	**21 lépcső**
3	2	5	7														
4	8	4	6	3													
5	4	1	3	9	2												
6	3	5	9	7	8	4											

A táblázatot készítsük fel arra, hogy a piramis 15 szintje ugyan változatlan, de a lépcsők száma a szintek között a folyamatos pusztulás és renoválás következtében változhat. A megoldást hivatkozásokkal készítsük el, hogy a válasz az adatok módosításait kövesse. Segédszámításokat az R oszloptól jobbra végezhetünk, melyek értelmezését feliratokkal segítsük.

Beküldendő egy tömörített `i524.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

Letölthető állomány: `piramis.txt`.

I. 525 (É). Egy frissen alakult tanfolyamszervező cég szeretne segíteni a koronavírus miatt elbocsátott embereken, ezért igen kedvezményes áron jónéhány tanfolyamot indítana. A szervezők egy adatbázist hoztak létre a szervezés megkönnyítésére.

Az adatbázis három táblából áll:

ÁFA-kulcs:

OKJ (logikai): Azt jelzi, hogy az ÁFA-kulcs OKJ-s tanfolyamra vonatkozik-e (ez a kulcs).

ÁFA (Szám): Az ÁFA kulcsa százalék formátumban.

Jelentkezések:

Sorszám (Szám): Az adott jelentkező sorszáma (ez a kulcs).

Tanfolyam_Az (Szám): Annak a tanfolyamnak az azonosítója, amelyen ez a jelentkező szeretne tanulni.

Név (Szöveg): A jelentkező neve.

Előleg (Szám): A jelentkezéskor befizetett előleg.

Tanfolyamok:

Azonosító (Szám): A tanfolyam azonosítója (ez a kulcs).

Megnevezés (Szöveg): A tanfolyam neve.

Max_létszám (Szám): Az adott tanfolyamra legfeljebb ennyien tudnak jelentkezni.

Ár (Szám): A tanfolyamra jelentkezőnek ezt a bruttó (ÁFÁ-s árat) kell kifizetnie a részvételért.

OKJ-s (logikai): Azt jelzi, hogy a tanfolyam OKJ-s-e.

A táblák kapcsolatát ez az ábra mutatja:

Hozzunk létre `i525` néven egy adatbázist.

Importáljuk az UTF-8 kódolású, a táblák nevével megegyező nevű szövegfájlokból az adatokat. Ügyeljünk a kapcsolatok megadására.

Az adattáblák tartalma egy adott napi, mondjuk január 11-ei állapotát tartalmazza az addigi jelentkezéseknek. Készítsük el az alábbi kérdésekre válaszoló lekérdezéseket, és a zárójelben adott néven mentsük őket.

1. Adjuk meg, hogy aznapig hányan jelentkeztek az egyes tanfolyamokra. (01létszámok)
2. Adjuk meg az OKJ-s tanfolyamok nevét. (02OKJ)
3. Adjuk meg, hogy melyik a két legdrágább tanfolyam. (03legdrágábbak)
4. Adjuk meg, hogy melyik a legolcsóbb OKJ-s tanfolyam. (04legolcsóbbOKJ)
5. Adjuk meg, hogy az egyes tanfolyamoknál a férőhelyek hány százalékára jelentkeztek már. (05telítettség)
6. Adjuk meg, melyik tanfolyamok teltek már be. (06betelt)
7. Azokat a tanfolyamokat a cég visszamondja, amelyekre nem jelentkezik legalább a maximális létszám fele. Adjuk meg, melyek ezek a tanfolyamok. (07lemondás)
8. Adjuk meg névsorba rendezve azon jelentkezők nevét és befizetett előlegét, akiknek a lemondás miatt vissza kell azt fizetni. (08előlegvissza)

9. Adjuk meg a cég bevételét úgy, hogy már visszafizették azok előlegét, akik tanfolyamát lemondták, és a többiek mind befizették a teljes tanfolyamdíjat. (09bevétel)
10. Számítsuk ki, hogy mennyi ÁFÁ-t kell a cégnek befizetnie a bevétele alapján. (10ÁFA)

Beküldendő egy `i525.zip` tömörített mappában az adatbázis, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott adatbázis-kezelő neve, verziószáma.

I/S. 49. Egy forgalmas vasútállomáson egy nagy kijelzőn tájékoztatják az utasokat az induló vonatokról. A vonatokat indulási sorrendben jelenítik meg. Minden járat egy új sorba kerül, mely tartalmazza az indulási időt, a járat azonosítóját, nevét és a vágányt, amelyikről majd indulni fog.

Nem akarják, hogy valaki a kijelzőn a járatát meglátva felszálljon egy ugyanarról a vágányról, de korábban induló vonatra. Ezért egy vonat indulásáról szóló információt addig nem jelenítik meg, amíg az összes, vele azonos vágányról korábban induló vonat el nem hagyta az állomást.

Adjuk meg minden sorra a bemenet sorrendjében, melyik az az első időpont, amikor a vonat indulásáról szóló információ megjeleníthető. Minden vonat időben indul. Ha két vonat egyszerre hagyja el az állomást, akkor azok biztosan különböző vágányról indulnak.

Bemenet: az első sor tartalmazza a ma induló járatok N számát. Minden további sor egy-egy járatot ír le. Az első mező az indulási idő óra:perc formátumban. Utána az azonosító és a járat neve következik. Ezek az angol abc kis- és nagybetűiből állnak. A név tartalmazhat ezen felül szóközkaraktert is. Az utolsó mező a vágány v sorszáma, melyről a vonat indul.

Kimenet: N sort kell kiírni: a k-adik sor megadja a k-adik járat lehetséges legkorábbi indulási időpontját. Ha az adott vonat az első, amelyik a vágányt azon a napon használja, akkor a 0:00 időpontot kell kiírni.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
5 8:00 AT01 Budapest Vienna 3 / 12:00 AT01 Budapest Vienna 5 13:02 HR205 Zagreb 12 / 16:00 AT01 Budapest Vienna 3 15:02 HR205 Zagreb 12	0:00 / 0:00 / 0:00 / 8:01 13:03

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant h \leqslant 23$, $0 \leqslant m \leqslant 59$, $1 \leqslant v \leqslant 100$. *Időkorlát:* 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 40%-a kapható, ha $v = 1$ minden sorban.

Beküldendő egy `is49.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 148. Adott egy N csúcsú fa. Megkértek minket, hogy töröljük ennek a fának az egyik levelét, tehát egy olyan csúcsot, aminek pontosan egy éle van. Jelöljük ezt a levelet L-lel. A törlés után visszamarad egy $N-1$ csúcsú fa. Ebben az új fában jelöljük D-vel két, egymástól legmesszebb levő pont távolságát, és P-vel azon (nem rendezett) pontpárok számát, amelyek távolsága D. Adjuk meg P minimális értékét és azt, hogy ehhez hányféleképpen választhatjuk meg az L levelet (amit törlünk).

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot. A csúcsokat 0-tól indexeljük. A következő $N-1$ sor mindegyike egy x és egy y számot tartalmaz, ami azt jelenti, hogy az x-edik és y-adik csúcsot él köti össze.

Kimenet: adjuk meg P minimális értéket, és azt, hogy az hányféleképpen érhető el.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`7 / 0 1 / 1 2 / 1 3 / 3 4 / 3 5 / 5 6`	`1 2`

Magyarázat: ha töröljük a 0-s csúcsot, akkor $D=4$, és a 2-es és 6-os csúcsok távolsága 4, tehát $P=1$. Ha töröljük a 2-es csúcsot, akkor $D=4$, és a 0-s és 6-os csúcsok távolsága 4, tehát $P=1$. Két esetben kaptunk minimális $P=1$-et, a többi esetben P nagyobb lesz.

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant x, y \leqslant N-1$. *Időkorlát:* 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

Beküldendő egy `s148.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. január 15.

❄

Kik lettek 2020 Ericsson-díjasai?

Már 2019 decemberében közzétettük a következő évi kiírást, hiszen a pályázatok leadásának határideje február 10. volt. A korai időpont célja, hogy minél előbb döntés születhessen és a tavasz folyamán elkészülhessenek a kiváló tanárokat bemutató kisfilmek, amelyeket a tanév végi rendezvényen az Ericsson székházában a nyilvánosság előtt bemutathassanak.

A rangos matematika- és fizikatanári díj odaítélése több, mint két évtizede hasonlóképpen zajlik; 2020-ban már februárban megszavazta az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Bolyai János Matematikai Társulat díjbizottsága a jelölteket, akiket a MATFUND Alapítvány kuratóriuma március 11-én jóváhagyott. Az alapítvány szokás szerint elküldte az eredményt az Ericsson Magyarország részére, és értesítette az érdekelt tanárokat is.

Azonban az már márciusban látszott, hogy a díjkiosztó ünnepséget nem lehet megtartani az eredeti tervek szerint május végén. Sajnos az ősszel tartandó (több, mint százfős) rendezvény sem lett volna biztonságos a koronavírus-járvány miatt, így az Ericsson azt a döntést hozta, hogy bár a díjakat december 17-én online átadják, de az ünneplést jövőre halasztják.

Az Ericsson és a MATFUND Alapítvány is nagyon reméli, hogy a 2020-as és a 2021-es év 8-8 Ericsson-díjasát együtt fogjuk tudni megünnepelni legkésőbb egy év múlva.

Jelentés a 2020. évi Ericsson-díjazottakról

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános- vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, méltassa és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A közel kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1300 fős Kutatás-Fejlesztési Központjával a legnagyobb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. A most díjazott pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása hozzájárul ahhoz, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az Ericsson-díj 2020. évi pályázati kiírása szerint általános- vagy középiskolákban 2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógusnak az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” díjat, további 2 matematikát és 2 fizikát oktatónak pedig az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díjat ítélik oda, egyenként 400 000 Ft összeggel.

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat február 24-én, a Bolyai János Matematikai Társulat február 26-án tartotta meg Ericsson-díjbizottsági ülését. A matematika népszerűsítéséért díjra 15, tehetségeinek gondozásáért díjra 16 pedagógust terjesztettek fel. A fizika népszerűsítéséért díjra 14, tehetségeinek gondozásáért díjra 5 jelöltet javasoltak. Közülük választotta ki a két társulat bizottsága az idei díj várományosait. A javaslatokat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány kuratóriuma 2020. március 11-i ülésén jóváhagyta. Ennek alapján:

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2020. évi díját matematikából

Szilágyiné Manasses Melinda, a Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium tanára és

Győry Ákos, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára kapja.

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2020. évi díját fizikából

Siposs András, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium tanára és
Hömöstrei Mihály, a Budapesti Német Iskola tanára kapja.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2020. évi díját matematikából
Juhász Péter, a budapesti Szent István Gimnázium tanára és
Lángné Juhász Szilvia, a Szegedi Gregor József Általános Iskola tanára kapja.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2020. évi díját fizikából
Rudolf Tamásné, a budapesti Áldás Utcai Általános Iskola tanára és
Szabó László Attila, a Csongrádi Batsányi János Gimnázium tanára kapja.

Budapest, 2020. március 13. **Oláh Vera**
a MATFUND Alapítvány kuratóriuma nevében

A bizottságok tagjai a következők voltak:
Az Eötvös Társulattól: *Tél Tamás* elnök (az ELTE TTK Fizikai Intézetének egyetemi tanára), *Halbritter András* (a BME Fizikai Intézet Fizika Tanszékének egyetemi tanára), *Horváth Norbert* (a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium tanára), *Horváthné Fazekas Erika* (a szegedi SZTE Juhász Gyula Gyakorló Általános Iskola tanára), *Ispánovity Péter Dusán* (az ELTE TTK Fizikai Intézetének adjunktusa), *Mester András* (Miskolc, Rátz Tanár Úr Életműdíjas nyugalmazott tanár), *Nagy Anett* (a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium tanára), *Tasi Zoltánné* (Fontos Sándor Általános és Alapfokú Művészetokt. Intézmény, Üllés, Ericsson-díjas tanár), *Trócsányi Zoltán* (akadémikus, ELTE TTK és Debreceni Egyetem Fizikai Intézet), és *Zubonyainé Pelka Zsuzsanna* (a budapesti Kőrösi Csoma Sándor Kéttannyelvű Általános Iskola tanára).
A Bolyai Társulattól: *Csordás Mihály* elnök (a kecskeméti Kodály Zoltán Általános Iskola Ericsson-díjas és Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára), *Békefi Zsuzsanna* (a veszprémi Lovassy László Gimnázium Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára), *Csorba Ferenc* (a győri Krúdy Gyula Gimnázium és Szakközépiskola Ericsson-díjas és Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára), *Deli Lajos* (a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium és Szakközépiskola Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára), *Lajos Józsefné* (a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának Ericsson-díjas tanára), *Katz Sándor* (Bonyhád, Ericsson-díjas és Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanár), *Róka Sándor* (Nyíregyháza, Ericsson-díjas és Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanár), *Somfai Zsuzsa* (a budapesti Eötvös József Gimnázium Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára), *Tarcsay Tamás* (a szegedi SZTE Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium Ericsson-díjas és Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanára) és *Veres Pál* (a miskolci Földes Ferenc Gimnázium korábbi igazgatója).
A MATFUND Alapítvány kuratóriumának tagjai: *Katona Gyula* elnök (akadémikus, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutató professzora), *Benczúr András* (az ELTE egyetemi tanára), *Nagy Dénes Lajos* (egyetemi tanár, a Wigner Fizikai Kutatóközpont tudományos tanácsadója), *Oláh Vera* (a Bolyai János Matematikai Társulat budapesti alelnöke, a MATFUND alapítvány képviselője), *Tichy Géza* (az ELTE egyetemi tanára).

Beszámoló a 2020. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2020. évi Eötvös-versenye október 9-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen† került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 48 versenyző adott be dolgozatot, 11 egyetemista és 37 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

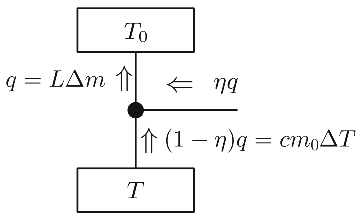
❄

1. feladat. *Egy m_0 tömegű, állandó c fajhőjű minta hőmérséklete kicsivel a nitrogén T_0 forráspontja alatt van. Rendelkezésünkre áll m tömegű, forrásban lévő folyékony nitrogén és egy hőszivattyú. Mekkora minimális hőmérsékletre lehet lehűteni a mintát, mire elforr az összes nitrogén? A nitrogén forráshője L.*

(*Tichy Géza*)

Megoldás. Egy $\eta=\frac{T_2-T_1}{T_2}$ hatásfokú, hőerőgépként üzemeltetett Carnot-féle körfolyamat esetén a felső hőtartályból kivett hő η-ad része mint munkavégzés jelenik meg, $(1-\eta)$-ad része pedig az alsó hőtartályba kerül. Hőszivattyúként üzemeltetve munkát kell befektetnünk, az alsó hőtartályból szivattyúzzuk át az energiát a felsőbe, azaz a hő előjele változik ellenkezőre.

A Carnot-körfolyamattal általában úgy találkozunk, hogy a gép két állandó hőmérsékletű hőtartály között működik. Feladatunkban a Carnot-gép felső hőtartálya a forrásban lévő nitrogén, amelynek hőmérséklete végig T_0, az alsó hőtartály pedig a minta, amely viszont lassan hűl, T hőmérséklete nem állandó. Egy ciklus során azonban a minta hőmérséklete állandónak tekinthető.



1. ábra

Ebből a lassan változó hőmérsékletű hőtartályból vonunk el egy kis lépésben $cm_0\Delta T$ hőt. Ez a hő a felső hőtartályba érkező q hőnek

$$1-\eta=1-\frac{T_0-T}{T_0}=\frac{T}{T_0}\text{-szorosa,}$$

ahogy az *1. ábrán* is látható.

†Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Ha Δm mennyiségű nitrogén forrt el, akkor a felső hőtartálynak $L\Delta m$ hőt kellett kapnia. Ebből a

$$cm_0\Delta T = \frac{T}{T_0}L\Delta m$$

összefüggéshez jutunk. Ez a

$$\frac{cm_0\,\mathrm{d}T}{T} = \frac{L\,\mathrm{d}m}{T_0}$$

differenciális összefüggéséhez vezet. Ezt kell integrálni a kezdeti állapottól a végső állapotig. Az alsó hőtartály T hőmérséklete T_0-ról $T_{\min}$-re csökken, és közben a folyékony nitrogén tömege m-ről nullára csökken. Tehát

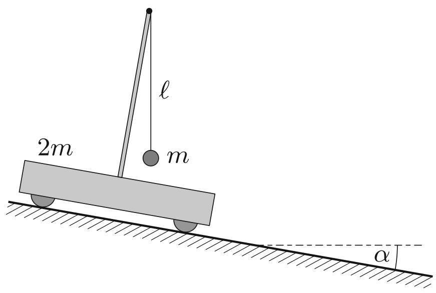
$$cm_0 \ln\frac{T_0}{T_{\min}} = \frac{Lm}{T_0},$$

amiből a keresett minimális hőmérséklet

$$T_{\min} = T_0 e^{-\frac{Lm}{T_0 cm_0}}.$$

Megjegyzés. Aki tudja, hogy a Carnot-körfolyamat közben az entrópia állandó, és ismeri az entrópia kifejezéseit, az azonnal megkapja az integrálásból kapott összefüggést.

2. feladat. *Könnyen gördülő, $2m$ tömegű kiskocsira egy árbóc van rögzítve, aminek felső végére ℓ hosszúságú fonállal egy m tömegű kis golyót függesztettünk. A kiskocsit egy nem túl meredek, α hajlásszögű lejtőre helyezzük, majd megvárjuk az inga lengéseinek lecsillapodását, és végül a kocsit elengedjük* (2. ábra).



2. ábra

a) A mozgás során mennyire tér ki a fonál a függőlegestől?

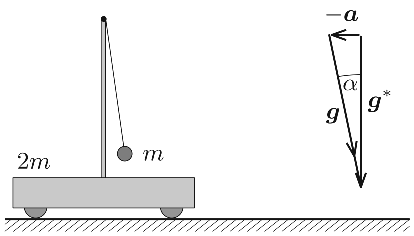
b) Mekkora utat tesz meg a kiskocsi, amíg a fonál újra függőlegessé válik?

(*Vigh Máté*)

Megoldás. Az ingából és kiskocsiból álló rendszerre lényegében csak a nehézségi erő és a lejtőre merőleges irányú kényszererők hatnak, hiszen a kerekek gyorsuló forgásához szükséges tapadási súrlódási erőt a „könnyen gördülő” kifejezés miatt elhanyagolhatjuk. Lejtőirányú komponense csak a nehézségi erőnek van, ezért a rendszer tömegközéppontja a lejtővel *párhuzamos* irányban állandó, $g\sin\alpha$ gyorsulással mozog. A tömegközéppont a mozgás során a lejtőre *merőleges* irányban is gyorsul, ez azonban a további gondolatmenet szempontjából nem lényeges.

Üljünk bele a zérus kezdősebességű, a lejtővel párhuzamosan $|\boldsymbol{a}| = g\sin\alpha$ nagyságú gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerbe! Egy gyorsuló rendszerben bármely m' tömegű testre a Newton-törvények csak úgy maradnak érvényben, ha a valójában rá ható (kölcsönhatásból származó) erők mellett bevezetjük a rendszer

$\boldsymbol{a}$ gyorsulásával ellentétes irányú, $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erőt is. A $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erő és az $m'\boldsymbol{g}$ nehézségi erő vektori összege $m'\boldsymbol{g}^*$ alakban is felírható, ahol $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. A gyorsuló rendszerben tehát minden test úgy mozog, mintha egy $\boldsymbol{g}^*$ effektív nehézségi gyorsulású erőtérben helyezkedne el. Esetünkben a vonatkoztatási rendszer $\boldsymbol{a}$ gyorsulása éppen megegyezik a $\boldsymbol{g}$ nehézségi gyorsulás lejtőirányú összetevőjével, ezért az effektív $\boldsymbol{g}^*$ nehézségi gyorsulás a lejtőre *merőleges* irányú, nagysága pedig $g\cos\alpha$. Mivel a gyorsuló rendszerben $\boldsymbol{g}^*$ határozza meg a függőleges irányt, célszerű a feladat ábráját elforgatni, ahogy az a *3. ábrán* is látható.



3. ábra

A mozgást a gyorsuló vonatkoztatási rendszerünkben elemezve azt látjuk, hogy a kiskocsi és az ingatest nyugalomból indul, az inga kezdeti szögkitérése $\boldsymbol{g}^*$ irányától mérve jobbra éppen α. Az inga lengése során a rendszer tömegközéppontja külső lejtőirányú erő hiányában nem mozdul el, így mind a kiskocsi, mind pedig az ingatest mozgásba jön. A mechanikai energia megmaradásából és a tömegközéppont-tételből következik, hogy az inga szögkitérésének legnagyobb értéke $\boldsymbol{g}^*$-hoz viszonyítva a túlsó oldalon szintén α lesz, ami akkor következik be, amikor a kiskocsi és az ingatest először áll meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti vonatkoztatási rendszerben az inga a kezdeti helyzetéhez képest (azaz $\boldsymbol{g}$-hez viszonyítva) maximálisan 2α szöggel tér ki. Ezzel a feladat *a*) kérdésére válaszoltunk.

Térjünk most rá a *b*) részre. A gyorsuló rendszerben az ingatest és a kiskocsi is periodikus mozgást végez az egyensúlyi helyzet körül, amelyben az inga fonala éppen párhuzamos $\boldsymbol{g}^*$-gal. Az inga legkorábban T periódusidő múlva érkezik vissza a kiindulási helyzetbe. Ebben a pillanatban a tömegközéppont elmozdulása

$$s = \frac{1}{2} g\sin\alpha\cdot T^2,$$

és ugyanekkora a kocsi elmozdulása is, hiszen a kocsi relatív helyzete a tömegközépponthoz viszonyítva éppen ugyanaz, mint az indítási állapotban volt. Feladatunk tehát a rezgés T periódusidejének meghatározása.

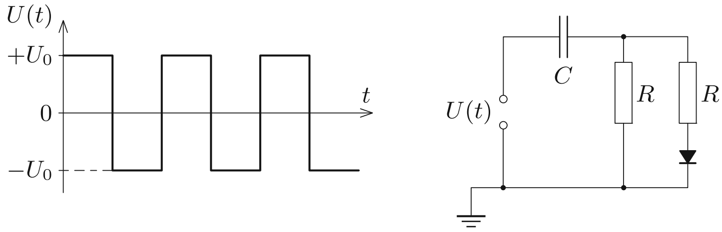
A gyorsuló rendszerben a tömegközéppont megmaradása miatt a kocsi kitérése minden pillanatban feleakkora és ellentétes irányú, mint az ingatest lejtővel párhuzamos irányú kitérése. Ezért a fonál felső harmadolópontja lényegében nem mozdul el (valójában a lejtőre merőleges irányban mégis, de elhanyagolható mértékben). Az ingatest tehát úgy mozog a $|\boldsymbol{g}^*| = g\cos\alpha$ nehézségi gyorsulású erőtérben, mintha egy $2\ell/3$ hosszúságú fonálra lenne felfüggesztve. Egy ilyen inga lengésideje *kis kitérések* esetén:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g\cos\alpha}}.$$

Vajon alkalmazható-e most ez az összefüggés? A feladat szövege szerint a lejtő *nem túl meredek*. Egy 45°-os lejtő már elég meredeknek számít, de az ekkora szögben kitérített inga lengésideje is csak kb. 4%-kal nagyobb a fenti képlettel számolt lengésidőnél. Ha a lejtő csak 30°-os, az eltérés 2%-nál is kisebb. Jó közelítéssel tehát azt mondhatjuk, hogy a kocsi elmozdulása addig a pillanatig, amíg az inga újra függőlegessé válik

$$s \approx \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot 4\pi^2 \frac{2\ell}{3g\cos\alpha} = \frac{4\pi^2}{3} \ell \operatorname{tg}\alpha.$$

3. feladat. *Egy ideális diódából, két $R = 2$ kΩ nagyságú ellenállásból, egy kezdetben töltetlen, $C = 100$ μF kapacitású kondenzátorból és egy feszültséggenerátorból a 4. ábrán látható kapcsolást állítottuk össze. A feszültséggenerátoron $f = 5$ kHz frekvenciájú, $+U_0$ és $-U_0$ között változó szimmetrikus négyszögjelet állítunk be, ahol* $U_0 = 3{,}6$ V.



4. ábra

a) Mekkora maximális feszültségre töltődik fel a kondenzátor?

b) A kondenzátor töltetlen állapotától számítva körülbelül mennyi idő után éri el a kondenzátor feszültsége a maximális érték felét?

(*Vankó Péter és Vigh Máté*)

Megoldás. A kapcsolásban félperiódusonként felváltva $+U_0$ és $-U_0$ feszültséget kapcsolunk egy soros RC kapcsolásra, ahol a kondenzátor kapacitása mindvégig C, az ellenállás pedig az áramiránytól függően $R_1 = \frac{R}{2}$, illetve $R_2 = R$. Jól ismert, hogy ha egy töltetlen, C kapacitású kondenzátorból és egy R ellenállásból álló soros RC kapcsolásra U_0 feszültséget kapcsolunk, akkor a kondenzátor feszültsége az

$$U(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

függvény szerint változik, ahol az időállandó $\tau = RC$.

Vegyük észre, hogy a mi esetünkben az (egyik) időállandó $\tau = RC = 0{,}2$ s (a másik ennek fele), a négyszögjel periódusideje pedig $T = \frac{1}{f} = 0{,}2$ ms, és így $T \ll \tau$. Emiatt egy fél periódusnyi idő alatt a töltődő kondenzátor feszültsége nagyon jó közelítéssel lineárisan változik.

Legyen a kondenzátor feszültsége egy adott időpillanatban $U_\mathrm{C}(t)$, a kondenzátoron átfolyó áram pedig $I(t)$. A négyszögjel első fél periódusában (amikor a dióda nyitva van, és mindkét ellenálláson folyik áram)

$$U_0 - U_\mathrm{C} = R_1 I_1(t) = \frac{R}{2} I_1(t), \quad \text{amiből} \quad I_1(t) = \frac{2}{R}\big[U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Egy fél periódus alatt ez az áram $I_1(t)\frac{T}{2}$ töltést szállít a kondenzátorra, így a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_\mathrm{C}(t)=\frac{1}{C}I_1(t)\frac{T}{2}=\frac{T}{RC}\big[U_0-U_\mathrm{C}(t)\big]=\frac{T}{\tau}\big[U_0-U_\mathrm{C}(t)\big].$$

A másik fél periódusban (amikor a dióda lezár, és csak az egyik ellenálláson folyhat áram)

$$-U_0-U_\mathrm{C}=R_2I_2(t)=RI_2(t),\quad \text{amiből}\quad I_2(t)=\frac{1}{R}\big[-U_0-U_\mathrm{C}(t)\big],$$

és a fél periódus alatt a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_\mathrm{C}(t)=\frac{1}{C}I_2(t)\frac{T}{2}=\frac{T}{2RC}\big[-U_0-U_\mathrm{C}(t)\big]=\frac{T}{2\tau}\big[-U_0-U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Egy teljes periódus alatt a feszültség teljes megváltozása a két fél periódus alatti változás összege:

$$\Delta U_\mathrm{C}(t)=\frac{T}{2\tau}\big[U_0-3U_\mathrm{C}(t)\big]=\frac{3T}{2\tau}\left[\frac{U_0}{3}-U_\mathrm{C}(t)\right].$$

A kondenzátor feszültsége akkor nem nő tovább, ha $\Delta U_\mathrm{C}(t)=0$, azaz ha $U_\mathrm{C}(t)=\frac{U_0}{3}$, tehát a kondenzátor hosszú idő után $U_\mathrm{C}(\infty)=\frac{U_0}{3}=1{,}2$ V feszültségre töltődik fel.

Ezután áttérünk a *b*) kérdés megválaszolására. Mivel a periódusidő sokkal kisebb az időállandónál, az egy periódus alatti feszültségváltozás nagyon kicsi, a kondenzátor sok perióduson át töltődik. Ezen az időskálán a félperiódusok alatti töltődések és kisülések kis ingadozása nem is látszik. Egy olyan folyamatot kapunk, ahol a kondenzátor feszültsége lényegében folyamatosan nő a kezdeti $U_\mathrm{C}(0)=0$ értéktől az $U_\mathrm{C}(\infty)$ értékig.

Az utolsó egyenletünk alapján

$$\frac{\mathrm{d}\big[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\big]}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\Delta\big[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\big]}{T}=-\frac{3}{2\tau}\big[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Ez pedig egy ugyanolyan differenciálegyenlet, mint amely leírja egy kondenzátor feltöltődését (és amely jól ismert a radioaktív bomlástörvényből is), megoldása:

$$\big[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\big]=\big[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(0)\big]e^{-\frac{3t}{2\tau}},$$

amiből látható, hogy a kondenzátor akkor töltődik fel a maximális érték felére, ha

$$e^{-\frac{3t}{2\tau}}=\frac{1}{2},\quad \text{azaz}\quad t=\frac{2}{3}\tau\ln 2=0{,}0924\ \text{s}.$$

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetés és díjkiosztás a járványhelyzet miatt elmaradt. Helyette az eredetileg meghirdetett időpontban, 2020. november 20-án délután 3 órakor a verseny honlapjára került fel mindaz, ami az eredményhirdetésen elhangzott volna. Ismertetésre kerültek az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny feladatai, és az akkori díjazottak egy részének visszaemlékezései: az 50 évvel ezelőttiek közül *Horváth Péter* és *Tichy-Rács Ádám,* a 25 évvel ezelőttiek közül *Lovas Rezső, Tóth Gábor Zsolt* és *Varga Dezső* küldött üzenetet.

Ezt követte a 2020. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása (az 1. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vigh Máté, a 3. feladatét Vankó Péter írta le), majd az eredmények közlése:

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes és a harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *második díjat* nyert **Bonifert Balázs,** a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa és **Pácsonyi Péter,** a BME mechatronikai mérnök alapszakos hallgatója, aki a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett *Pálovics Róbert* tanítványaként.

A második és a harmadik feladat kicsit hiányos megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Molnár Szabolcs,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként.

Az első feladat hibátlan megoldásáért *dicséretet* kapott **Fekete Dezső Domonkos,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként, **Selmi Bálint,** a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Simon Péter, Kotek László* és *Pálfalvi László* tanítványa, valamit **Sepsi Csombor Márton,** a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Tibor* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 75 ezer, a harmadik díjjal 55 ezer, a dicsérettel 35 ezer forint pénzjutalom jár. A díjazottak tanárai az *Eötvös Loránd emlékalbumot* kapják. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulatot a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* és az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* támogatja. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté

Mérési feladatok megoldása

M. 395. *Mérjük meg egy hajszárító léghozamát (időegységenként kifújt levegő térfogatát) különböző fokozatok esetén!*

(*6 pont*) Közli: *Varga György,* Pilis

Megoldás. A mérés elvégzésére több, elvileg különböző módszert találtak a versenyzők. *Ludányi Levente* (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.)

a leginkább kézenfekvő megoldást választotta. Egy 1900 W teljesítményű, két fokozatú hajszárítóval egy olyan tartályt fújt fel, aminek ismert a térfogata, egyértelműen látható, hogy mikor telik meg levegővel, és a hajszárító jól rögzíthető a tartály bemenetéhez úgy, hogy minél kevesebb levegő szökhessen ki a felfújás közben. Ezeknek a kritériumoknak leginkább egy 240 literes szemeteszsák felelt meg. A zsák „száját" a hajszárító köré csavarta, és kézzel szorosan rajta tartotta. Az időt stopperrel mérte.

A körbetekerés során a zsák vesztett a (névleges) térfogatából. A térfogatveszté s becsült értékéből meghatározta az új (effektív) térfogatot. A becslést úgy végezte, hogy megmérte a kiterített zsák ℓ hosszát, valamint a betekert rész x hosszát. A térfogat közelítőleg arányos d^3-nal, ahol $d=\ell-x$, tehát

$$\frac{V_{\text{eff.}}}{240\ \text{liter}}=\frac{(\ell-x)^3}{\ell^3}.$$

Mindkét fokozatnál 10 mérést végzett, és a mért időket átlagolta. A léghozamot a $\frac{V_{\text{eff.}}}{t_{\text{átlag}}}$ képlettel számolta. A mérés pontosságára az ℓ és x hosszúság mérési hibájából, az időtartamok „szórásából" (az átlagtól való átlagos eltéréséből) a hibaterjedés törvényének alkalmazásával tudott következtetni.

A léghozamra az I. fokozatban $4{,}7\pm 0{,}2$ liter/másodperc, a II. fokozatban pedig $12{,}6\pm 1{,}0$ liter/másodperc értéket kapott.

Pácsonyi Péter (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.) a hajszárító légáramának átlagos sebességét mérte meg, majd ezt a hajszárító nyílásának keresztmetszetével szorozva kiszámította a léghozamot. A sebesség mérését visszavezette kicsiny nyomáskülönbség mérésére, amiből – a Bernoulli-törvény alkalmazásával – kiszámította az áramlás sebességét. Hajlékony gumicsövek és szívószálak felhasználásával a *fényképen* látható Pitot-csövet állította össze, majd az elkészült eszközt egy kartonpapírból készült „állványra" ragasztotta.

A csőbe valamennyi vizet töltött, és megjelölte a vízszintet. Ezután a működő hajszárítót a cső szájához tette, majd újra megjelölte a beállt vízszinteket mindkét fokozatnál. A vízszintek magasságkülönbségét körzővel átmérte egy négyzetrácsos papírra, majd vonalzóval leolvasta annak Δh nagyságát. Az áramlási sebességet a Bernoulli-törvényt felhasználva így számolta:

$$v=\sqrt{\frac{2\varrho_{\text{víz}}\Delta h}{\varrho_{\text{levegő}}}}.$$

(A levegő sűrűségét a kis nyomáskülönbségek miatt állandónak tekintette.) A mérési eredmények kiértékelése után az I. fokozatban 17 $\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}$, a II. fokozatban 27 $\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}$ léghozamot kapott. A becsült relatív hiba a gyengébb fokozatnál 10%, az erősebbnél 6% volt. A mérési hiba becsülhető része a vízszintek magasságkülönbségének és a légáram keresztmetszetének pontatlan meghatározásából adódott. Emellett néhány szisztematikus hibaforrást is felsorolt a jegyzőkönyv. A levegő áramlási sebessége nem feltétlenül azonos az áramlási tér minden pontjában. A léghozamot ilyen esetben az áramlási sebességeloszlásnak a hajszárító nyílására vett „fluxusaként" lehetne kiszámítani. Mivel a sebességkülönbségeket a mérésnél használt eszköz nem mutatta ki, a nyílás közepénél vett sebességgel számolt a kiértékelésnél. Maga az eszköz is befolyásolja az áramlási mintázatokat, így ez is torzítja a mérést.

Fodor Marcel (Wuppertal, Carl-Fuhlrott-Gymnasium, 10. évf.) kétféle módszert próbált ki. Először alumíniumfólia darabkákat ejtett a hajszárítóból kiáramló levegőbe, és videófelvételen akarta elemezni a darabkák sodródását. Ezt meglehetősen bizonytalannak találta, ezért áttért egy másféle, érdekesebb módszerre: a hajszárító elektromos teljesítményét, valamint a be- és a kimenő levegő hőmérsékletkülönbségét mérte. A levegő hőkapacitásának ismeretében meghatározható egy adott idő alatt átáramló és felmelegedő levegő mennyisége. (Feltételezés: a hajszárító által felvett elektromos teljesítmény elsősorban a levegő felmelegítésére fordítódik, a levegő mozgásba hozatalanál végzett munka pedig nem számottevő.)

A hőmérséklet mérését digitális hőmérővel végezte. Megfigyelte, hogy a kiáramló levegő hőmérséklete erősen függ attól, hogy melyik helyen mérjük. Meglepve tapasztalta, hogy a kiáramló levegő a légáram szélénél magasabb hőmérsékletű, mint a közepénél. (A kiértékelésnél a legnagyobb hibaforrásként a helyről helyre változó hőmérsékletet jelölte meg.)

Megállapította, hogy a hajszárító névleges teljesítménye lényegesen eltér a ténylegesen felvett elektromos teljesítménytől. Erre a következtetésre a lakóház – meglehetősen pontosnak tekinthető – mérőórájának megfigyeléséből jutott. Nehézséget okozott, hogy nem tudott minden más elektromos berendezést (pl. a fűtést) lekapcsolni a mérés idejére.

A mérés kiértékelése után azt állapította meg, hogy a hajszárító alacsony vagy magas fokozatú beállításától függően a léghozam 5,0 vagy 8,8 liter/másodperc lehet. A mérés becsült pontossága 15% körül van, és főleg a kiáramló levegő ismeretlen hőmérsékleti profiljának tudható be. Amiatt, hogy a mérés kiértékelése számos feltétel teljesüléséhez kötődik, további szisztematikus hibák is felléphetnek.

7 mérési jegyzőkönyv érkezett. 6 pontot kapott Fodor Marcel, Ludányi Levente és Pácsonyi Péter munkája. Kicsit hiányos (5 pont) 2, hiányos (2 pont) 2 dolgozat.

M. 397. *Gyertyával bekormozott fémlemez hőmérsékletét mérve határozzuk meg, hogy mennyi energia érkezik a Napból egységnyi idő alatt a sugárzásra merőleges, egységnyi nagyságú felületre! (A fémlemez anyagának fajhőjét vegyük táblázatból.)*

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

Megoldás. *1. Elméleti áttekintés.* A Napból egységnyi felületre eső sugárzási teljesítményt meg tudjuk mérni, ha egy fémdarabot napsugárzásnak teszünk ki. Ekkor a test hőmérséklete megnő, ahogy energiát nyer a környezetétől. Az abszolút fekete test az a test, ami a ráérkező sugárzást teljes mértékben elnyeli. Ennek az idealizált esetnek a megközelítése érdekében feketére kormozom a fémdarabot, hogy az a sugárzás minél nagyobb hányadát elnyelje. A mérés során a következő egyenletet használom fel:

$$\Delta t \cdot S \cdot A = c \cdot m \cdot \Delta T,$$

ahol S a napállandó, A a testnek a napsugárzásra merőleges felszíne, c a test anyagának fajhője, m a test tömege, ΔT a test hőmérséklet-változása és Δt az eltelt idő. A test egy idő után termikus egyensúlyba kerül a környezetével, ekkor a fenti egyenlet nem igaz, hiszen hiába telik az idő, a hőmérséklet nem fog már változni. Emiatt nem fogok nagyon hosszú ideig mérni. A fajhő hőmérsékletfüggő mennyiség, de ebben a mérésben ettől eltekintünk.

2. A mérés menete. A mérés során egy rozsdamentes acélból készült kés pengéjét használtam, amit gyertyával kormoztam be, így a pengét (első közelítésben) fekete testnek tekinthettem. A hőmérsékletet egy digitális tűhőmérővel mértem, ennek a pontossága 1,5%. Az időt 30 másodpercig mértem, hiszen nem akartam, hogy a hőmérséklet-különbség túl nagy legyen, és a termikus egyensúly közelébe kerüljünk. A mérést más napokon is elvégeztem, nagyjából ugyanabban az időben. Többször is borult, esős idő volt Szegeden a hét folyamán, így összesen 4 nap alkalmával tudtam méréseket végezni.

Először is meg kellett határoznom a pengére jellemző adatokat. A legegyszerűbb a tömeg mérése volt, ezt egy konyhai mérleggel végeztem el és $m = 23$ g-ot kaptam. A mérleg nem digitális, hanem analóg volt, aminek pontossága a mutató vastagsága és beosztások távolsága alapján $\Delta m \approx 2$ g-ra becsülhető.

A kés anyaga rozsdamentes acél (más néven inox a francia inoxydable szóból), ami egy minimum 10,5% krómot tartalmazó acélötvözet. Ennek fajhőjét kinéztem egy online táblázatból. Nem találtam meg a penge típusát, ezért a különböző anyagú rozsdamentes acélok fajhőjének $c = (480 \pm 20)\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ átlagos értékét fogadtam el.

Nehezebb feladat volt a kés felszínének és a térfogatának meghatározása. A kés pengéjének szélessége nem állandó, de nem is egyenletesen változik, hanem a tövénél lassabban csökken, mint a végén. A kés felszínét úgy becsültem, mintha egy trapézból és egy mellé helyezett derékszögű háromszögből állna. A teljes pengehossz 20 cm, a trapéz oldalai: $a = 4{,}3$ cm, $c = 3{,}0$ cm, és a hosszanti mérete $\ell = 15{,}0$ cm. Tehát a háromszög befogói $b = 3{,}0$ cm, $d = 5{,}0$ cm. Ezekkel az adatokkal a kés egyik oldalának felszíne:

$$A = \frac{a+b}{2}\,\ell + \frac{b\,d}{2} = 62{,}3\ \mathrm{cm}^2.$$

Mivel a trapéz és háromszög határát önkényesen választottam, ezért a felszín ebből eredő ΔA hibáját meg tudom becsülni, ha változtatom a trapéz magasságát és lemérem újra az oldalakat. Ezen számítások alapján $\Delta A = \pm 1{,}5\ \mathrm{cm}^2$-nek vehető.

3. Mérés eredmények. A négy napi mérés összesített (átlagolt) eredménye szerint $\Delta t = 30{,}6 \pm 0{,}4$ másodperc alatt a felmelegedés mértéke $\Delta T = (18{,}6 \pm 0{,}6)$ °C volt. (A táblázatba foglalt mérési és kiértékelési adatokat a beküldött jegyzőkönyv tartalmazza – a szerk.) A napállandó számított értéke

$$S = \frac{c\,m\,\Delta T}{A\,\Delta t} = (1015 \pm 114)\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2},$$

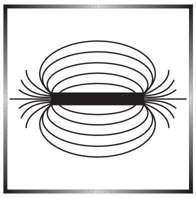
ami 11%-os mérési pontosságnak (relatív hibának) felel meg.

4. Hibaforrások. A statisztikus hibán túl a következő hibaforrások említhetők meg:
– a vonalzón egy beosztás nem pontosan 1 mm;
– nem abszolút fekete test volt a bekormozott penge;
– nem volt minden nap ugyanolyan a felhőzet;
– a hőmérő kerekítési pontatlansága;
– lineárisnak feltételezett hőmérséklet-változás;
– a penge összetételét nem ismertem pontosan;
– leolvasási pontatlanság és kerekítési hiba.

Ludányi Levente (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 12. évf.)

12 mérési jegyzőkönyv érkezett. 6 pontot kapott Horváth Anikó és Ludányi Levente megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



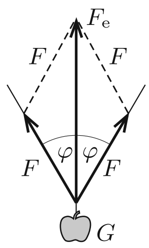
P. 5231. *Egy almát a szára tövénél három egyforma hosszú, egyforma teherbírású fonálon tartunk. A fonalak felső végeit vízszintes síkban lassan távolítjuk egymástól úgy, hogy a fonalak páronként mindig ugyanakkora szöget zárnak be egymással. A fonalak akkor szakadnak el, amikor páronként éppen merőlegesek egymásra. Ha két ugyanilyen fonálhoz erősítenénk ugyanezt az almát, majd a fonalak felső végeit ugyanúgy vízszintes síkban távolítanánk egymástól, milyen szöget zárnának be egymással a fonalak, amikor elszakadnának?*

(*4 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Budapest

Megoldás. *a*) *Három felfüggesztő fonál esete.* A fonalak egyenlő hosszúak és derékszöget zárnak be egymással, tehát felfoghatók egy kocka valamelyik csúcsából kiinduló élekként. Legyen az alma súlya G, a fonalakat feszítő erő F, a három fonálerő eredőjének nagysága pedig F_e. Egyensúly esetén $F_\mathrm{e} = G$.

Az eredő erő vektora éppen a kocka testátlója irányába mutat, nagysága $F_\mathrm{e} = \sqrt{3}F$. A fonalak teherbírása ezek szerint

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}}F_\mathrm{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}G.$$



b) Két felfüggesztő fonál esete. Az *ábra* azt a helyzetet mutatja, amikor a fonalak éppen elszakadnak, vagyis mindegyik fonalat $F = G/\sqrt{3}$ nagyságú erő feszíti. A fonálerők eredője az alma súlyával egyezik meg. A koszinusztétel szerint:

$$F^2 = F^2 + F_e^2 - 2FF_e\cos\varphi,$$

vagyis

$$\cos\varphi = \frac{F_e}{2F} = \frac{G}{2G/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 30^\circ.$$

A fonalak tehát $2\varphi = 60^\circ$-os szöget zárnak be egymással, amikor elszakadnak.

Németh Kristóf (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 11. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

P. 5241. *Az erős délnyugati szél hatására 1962. május 14-én 9 óra alatt* 45 cm-*rel csökkent Keszthelynél a Balaton vízszintje, amíg Alsóörsnél* 51 cm-*t emelkedett. Adjunk nagyságrendi becslést a szélnek a víz emelésére fordított teljesítményére! (Becslésünkhöz felhasználhatjuk az interneten elérhető adatokat is.)*

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Becslésünkben a Balaton felületét téglalap alakúnak tekintjük. A téglalap hosszabb oldala $a = 60$ km (kb. a Keszthely–Alsóörs távolság), és ez az oldal párhuzamos a szél irányával. A téglalap rövidebb oldala: $b = 10$ km a Balaton átlagos szélessége. Ennek a közelítésnek az az alapja, hogy így mind a Balaton felszínére, mind a térfogatára valós adatot kapunk, ha az átlagos vízmélységet 3,2 m-nek vesszük, ami szintén elfogadható érték. Az, hogy az így kapott „medence” két szélénél a süllyedés, illetve az emelkedés nem egyezik meg, azzal magyarázható, hogy a szélfútta víz felülete nem teljesen sík. Becslésünkben úgy vesszük, hogy az emelkedés és a süllyedés a két oldalon a két megadott érték átlagával, $h = 0{,}48$ m-rel egyezik meg.

A szél munkája abból ered, hogy „elferdítette” a Balaton vízét; eközben (legalább) annyi munkát végzett, mint amennyivel nőtt a víz helyzeti energiája. Képzeljük el, hogy a víz áthelyeződése úgy történt, hogy a Keszthely és Alsóörs közötti távolság felezővonaltól délnyugatra eső, háromszög alapú hasábnyi víztömeget a felezővonal körül 180°-kal elforgatva áthelyezzük az északkeleti részre, miközben a téglalap rövidebb középvonala helyben marad. Ekkor a végzett munka ezen vízhasáb helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő.

Megjegyzés. A víztömeg nehezen leírható, tényleges mozgása, a víz átrendeződése nyilván nem a fent leírt átforgatással történik, de mivel a kezdeti- és a végállapot bármilyen közbenső vízmozgás esetén ugyanaz, a mechanikai munkavégzés is ugyanannyi, mint a megfelelő vízmennyiség merev testként történő átfordítása során lenne.

Egy derékszögű háromszög súlypontja egy befogótól egyharmad olyan messze van, mint a befogó és a rá nem illeszkedő csúcs távolsága. Ez nyilván érvényes az ilyen alapú hasábra is. Esetünkben az „átfordított" háromszög alapú hasáb súlypontja kezdetben $h/3$ távolsággal a vízfelszín alatt, 9 óra elteltével pedig $h/3$ távolsággal a kezdeti vízfelszín felett volt. Ezek szerint a végzett munka:

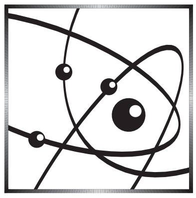
$$W = mg\Delta h = mg\frac{2h}{3} = \varrho gV\frac{2h}{3} = \frac{2}{3}\varrho gh\left(\frac{a}{2}\,\frac{h}{2}\,b\right) = \frac{ab}{6}\varrho gh^2 \approx 2{,}3\cdot 10^{11}\ \mathrm{J}.$$

Ebből a $t = 9$ óra $= 32\,400$ s időtartamra jutó átlagos teljesítmény: $P = W/t \approx$ ≈ 7 MW.

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

18 dolgozat érkezett. Helyes Tóth Ábel, Gurzó József, Koleszár Benedek és Mihalik Bálint megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



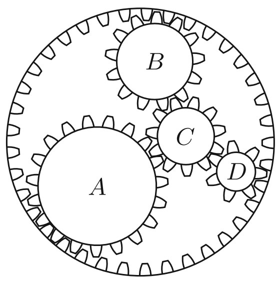
M. 400. Vizsgáljuk meg, hogy egy, a tövénél levágott fenyőág súlypontja a hosszának hányad részénél helyezkedik el! Végezzük el a mérést a levágott oldalágakra is, figyelve, hogy a fenyőágak ne nagyon hajoljanak meg! Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket! A fenyőág lehet egy karácsonyfa legalsó ága, amelyet tőben választunk le a törzsről, mielőtt a tartólábakat felszereljük.

(*6 pont*) Közli: *Horváth Norbert,* Budapest

G. 725. A Bükkben haladó, Miskolcot Egerrel összekötő kacskaringós hegyi út kb. 50 km hosszú. Egy nyári vasárnap délelőtt mindkét irányban erős volt a forgalom. Az átlagosan 35 km/h sebességű autók mindkét irányban haladva átlagosan 1 percenként találkoztak egy-egy szembejövő gépkocsival. Becsüljük meg, hány (oda- és visszafelé haladó) autó tartózkodott egyszerre ekkor a teljes útszakaszon!

(*3 pont*)

G. 726. Az *ábrán* látható négy belső fogaskerék körbejár, a külső pedig áll. (A fogaskerekek mozgása a honlapon megtekinthető.)



a) Hasonlítsuk össze a fogaskerekek keringési idejét!

b) Rakjuk a fogaskerekeket a középpontjuk sebessége szerint növekvő sorrendbe!

(*4 pont*)

G. 727. Egy vonatszerelvény 93,5 m hosszú. A vonat nyugalomból indul, és állandó gyorsulással egyenes pályán mozog. Az indulás pillanatában egy autó, amely a vonattal párhuzamosan, állandó sebességgel halad, éppen a vonat végénél van, majd 14 s múlva az autó eléri a vonat elejét. Újabb 16 s elteltével az autó megint a vonat végénél van.

a) Mekkora az autó sebessége?

b) Mekkora a vonat gyorsulása?

c) Mekkora utat tesz meg az autó, ameddig a vonat végleg lehagyja?

(*3 pont*) Közli: *Demeter Piroska,* Szeged

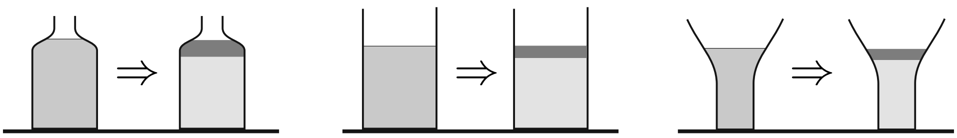
G. 728. Vannak olyan folyadékok, például a nyers tej vagy az olívaolajos-balzsamecetes salátaöntet, melyeket ha állni hagyunk, akkor a folyadék két alkotóelemére válik szét. Az olaj kerül az öntet tetejére, illetve zsíros tejszín lesz a tej tetején, miközben a teljes térfogat nem változik. Ha az ilyen folyadékokat

a) felfelé keskenyedő üvegben tartjuk;

b) hengeres mérőpohárba töltjük;

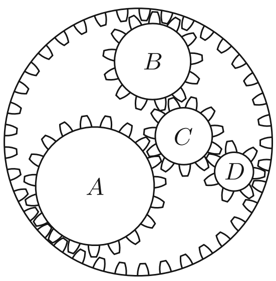
c) felfelé szélesedő pohárba öntjük,

majd megvárjuk az alkotóelemek szétválását, akkor a folyadék aljánál a hidrosztatikai nyomás megnő, lecsökken vagy változatlan marad?



a) *b*) *c*)

(*4 pont*)

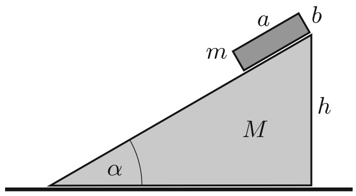


P. 5272. Az *ábrán* látható négy belső fogaskerék körbejár, a külső pedig áll. (A fogaskerekek mozgása a honlapon megtekinthető.)

Mekkora az A, B és C jelű fogaskerék fordulatszáma, ha a legkisebb, D jelű fogaskerék másodpercenként egyszer fordul körbe?

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

P. 5273. Az *ábrán* látható, vízszintes síkon elhelyezett, $\alpha = 30°$-os, $M = 1$ kg tömegű, $h = 60$ cm magasságú derékszögű lejtő tetején nyugvó $m = 0{,}5$ kg tömegű, $a = 20$ cm alapú, $b = 10$ cm magasságú téglatestet kezdetben nyugalomban tartjuk. Egy adott pillanatban a téglatestet elengedjük. A súrlódás mindenütt elhanyagolható.



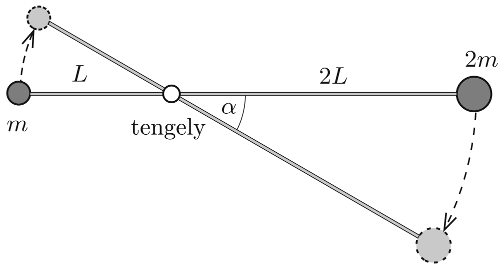
a) Mekkora a két test sebességének nagysága, amikor a téglatest a talajhoz ér?

b) Mennyi idő alatt jut el a tégla a talajhoz?

c) Mekkora utat tesz meg ezalatt a téglatest?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5274. Az *ábrán* látható, $3L$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű, merev rúd a bal oldali végétől L távolságra lévő, rögzített vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat a függőleges síkban. A rúd végeihez m, illetve $2m$ tömegű, kis méretű testeket erősítünk, és a rudat vízszintes helyzetben tartjuk. Egy adott pillanatban a rudat elengedjük.



a) Mekkora a rúd által a tengelyre kifejtett erő rúdirányú összetevője abban a pillanatban, amikor a rúd α szöget zár be a vízszintes iránnyal?

b) Határozzuk meg az α szöget abban a pillanatban, amikor a rúd által a tengelyre kifejtett teljes erő $4mg$ nagyságú!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5275. Az egyik kaposvári szökőkútból 1 perc alatt 1 köbméter víz szökik fel függőlegesen 5 m magasra.

a) Mekkora a villanymotor felvett teljesítménye, ha a szivattyúzás hatásfoka 75%?

b) Mekkora sebességgel áramlik ki a víz a csőből?

c) Mekkora a kilépő vízáram átmérője?

d) Mekkora a vízsugár átmérője 2,5 m magasságban?

A légellenállástól és a vízsugár cseppekre szakadásától tekintsünk el.

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5276. Egy 25 cm-es átmérőre felfújt, gömb alakú lufival beszállunk Európa legnagyobb emelkedésű drótkötélpályájának kabinjába, és a hegytetőig utazunk. A kabin nem zár légmentesen, de a belső hőmérsékletét mindvégig a beszállóhely hőmérsékletén tartják. A kabin a tengerszint feletti 1000 m-es magasságból indul, és majdnem 3000 m magasba viszi fel a turistákat a Zugspitze csúcsáig. A lufin belüli nyomás mindvégig alig nagyobb a külső légnyomásnál.

Becsüljük meg, mekkora lesz a lufi átmérője, amikor kiszállunk a kabinból!

(*4 pont*) Közli: *Miklós Ildikó,* Tésa

P. 5277. Egy fényképezőgép lencséjének fókusztávolsága 50 mm, a lencse átmérője 20 mm. A lencsét úgy állítottuk be, hogy 5 m távoli tárgyat képez le élesen. Mekkora az a legnagyobb és legkisebb távolság, amelyen belül egy pontnak a képe még kisebb, mint egy 0,05 mm átmérőjű folt a filmen? Hogyan változik ez az intervallum, ha a lencse átmérőjét leszűkítjük 10 mm-re?

(*5 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

P. 5278. Mennyire világítanak, ha sorba kapcsolunk és 230 V feszültségre kötünk

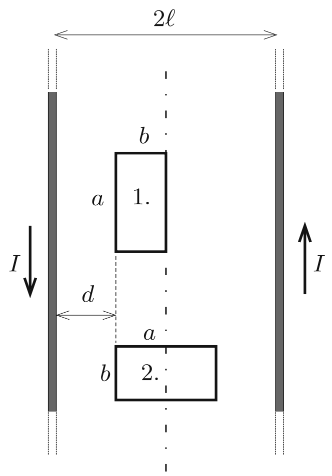
a) egy 230 V, 25 W-os izzót és egy 230 V, 100 W-os izzót;

b) egy 110 V, 25 W-os izzót és egy 110 V, 100 W-os izzót;

c) egy 110 V, 25 W-os izzót és egy 230 V, 100 W-os izzót;

d) egy 230 V, 25 W-os izzót és egy 110 V, 100 W-os izzót?

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



P. 5279. Két nagyon hosszú, egymástól 2ℓ távol lévő egyenes vezető huzal mindegyikében I erősségű, de ellentétes irányú áram folyik. A vezetők síkjában, az egyik vezetőtől $d = \ell - b$ távolságban egy a és b oldalhosszúságú téglalap alakú vezetőkeretet helyeztünk el, először az *ábrán* látható 1-es, majd a 2-es helyzetben ($0 < a - b < \ell$). Melyik esetben nagyobb a kereten átmenő mágneses fluxus?

(*4 pont*) *Cserti József* (Budapest) feladata nyomán

P. 5280. A 1,98 g/cm^3 sűrűségű kálium-klorid ionkristály szerkezete a kősóéval egyezik meg. Mekkora ebben a kristályban az egymáshoz legközelebb lévő pozitív és negatív ionok középpontja közötti távolság?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5281. Legfeljebb mekkora töltésre tesz szert az a szigetelőállványra rögzített, 50 mm sugarú, kezdetben töltetlen fémgömbhéj, ha hosszú ideig olyan UV lámpával világítjuk meg, melynek legalacsonyabb kisugárzott hullámhossza 280 nm? A gömbhéj anyagának kilépési munkája 3,7 eV, a levegő vezetőképességétől eltekinthetünk.

(*4 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5282. Légpárnás asztalon mágneskorong mozog egy fémlap felett. Az örvényáramok hatására a sebességgel arányos fékezőerő hat a korongra. Egy alumíniumlap felett haladva a korong 30 cm út megtétele után áll meg, egy rézlap felett ugyanez a távolság csak 20 cm. Mekkora út megtétele után áll meg a mágneskorong, ha először egy 15 cm széles rézlap felett halad el, majd egy alumíniumlap felett folytatja mozgását? (A korong kezdősebessége mindhárom esetben ugyanakkora.)

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

❄

Beküldési határidő: 2021. január 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 9. December 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 537): **K. 674.** In the backyard of aunt Ann, there are 120 animals: brown hens, white ducks, brown pigs and white rabbits. The number of white animals is 64, and the number of two-legged animals is 84. There are twice as many brown hens as white rabbits. How many of each species of animal live in aunt Ann's backyard? **K. 675.** A large company was giving a Christmas party to its employees. Some of them brought their spouses along. There were five times as many men present at the party as women. At 10 p.m., some husbands left for home with their wives, and thus the number of women dropped to one seventh of the number of men remaining. What fraction of the men left at 10 p.m.? **K. 676.** A 6×6 chessboard is tiled with eighteen 1×2 dominoes without overlaps. Show that it is possible to cut the chessboard with a straight line that will not cut across any domino stone. **K. 677.** The five elements of a number set S are pairwise added to produce the sums 0, 6, 11, 12, 17, 20, 23, 26, 32 and 37. Find the elements of S. (*Texas Mathematical Olympiad*) **K. 678.** There are 2020 coins lying on the table, lined up and showing heads, tails, heads, tails, ... alternating. In one move, it is allowed to reverse any three consecutive coins. With an appropriate sequence of such moves, is it possible to achieve that every coin should show tails?

New exercises for practice – competition C (see page 538): **Exercises up to grade 10: C. 1637.** In Dragonland, every seven-headed dragon blows fire, but not all seven-headed, fire-blowing creatures are dragons. According to the latest census figures, the number of dragons in Dragonland is equal to the number of fire-blowing creatures.

Is it true that every dragon has seven heads? **C. 1638.** Determine those non-regular triangles for which the orthocentre, the circumcentre, the incentre and two vertices are concyclic. **Exercises for everyone: C. 1639.** We have five numbers in mind. By selecting three numbers in every possible way and adding them together, we got the following sums: 41, 42, 44, 51, 52, 53, 54, 54, 55, 64. What are the five numbers? (Proposed by *S. Kiss,* Nyíregyháza) **C. 1640.** In a quadrilateral $ABCD$, let S denote the centroid of triangle ABC, and let P denote the centroid of triangle ACD. Prove that the line segment connecting the midpoints of diagonals AC and BD bisects the line segment SP. **C. 1641.** In the expansion of the power $(a+b+c)^{10}$, determine the coefficient of the term in $a^3b^2c^5$. (Proposed by *S. Kiss,* Nyíregyháza) **Exercises upwards of grade 11: C. 1642.** The opposite sides of a convex hexagon $ABCDEF$ are parallel, the distances separating the parallel pairs of sides are equal, and the angles at vertices A and D are right angles. Prove that the diagonals BE and CF enclose an angle of 45°. **C. 1643.** Without using a calculator, evaluate the expression $(\log_{10} 11)\cdot(\log_{11} 12)\cdot(\log_{12} 13)\cdot\ldots\cdot(\log_{99} 100)$.

New exercises – competition B (see page 539): **B. 5134.** Find all integers n for which the number $\sqrt{\frac{3n-5}{n+1}}$ is also an integer. (*3 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5135.** The feet of the altitudes drawn from vertices A, B, C of an acute-angled triangle ABC are A_1, B_1 and C_1, respectively; and the midpoints of the altitudes AA_1 and BB_1 are G and H, respectively. Prove that the circumscribed circle of triangle C_1GH passes through the midpoint F of side AB. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5136.** The population of an island consists of underdogs and overlords. When a stranger visited the island, he was invited for dinner with a company of inhabitants. At the end, he asked each member of the company how many overlords were present. The underdogs all gave figures less than the true value and the overlords all gave figures larger than the true value. Is it true that the number of overlords can always be determined from the answers? (*5 points*) (Based on a problem of the *Dürer Competition*) **B. 5137.** Solve the following simultaneous equations over the set of real numbers: $x+y^2=z^3$, $x^2+y^3=z^4$, $x^3+y^4=z^5$. (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5138.** Triangle ABC is not isosceles. The interior angle bisectors drawn from vertices A and B intersect the opposite sides at points A' and B', respectively. Prove that the perpendicular bisector of $A'B'$ will pass through the centre of the inscribed circle if and only if $AB'+BA'=AB$. (*5 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 5139.** The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ intersect at M. The area of triangle ADM is greater than that of triangle BCM. The midpoint of side BC of the quadrilateral is P, and the midpoint of side AD is Q, $AP+AQ=\sqrt{2}$. Prove that the area of quadrilateral $ABCD$ is smaller than 1. (*5 points*) **B. 5140.** There are 10 countries on an island, some of which share a border, and some do not. Each country uses a currency of its own. Every country operates a single exchange office, by the following rules: if you pay 10 units of the currency of that country, you will get 1 unit of each of the currencies of the bordering countries. Initially Arthur and Theodore each own 100 units of the currency of every country. Then each of them shops around the exchange offices of various countries in any order they like, and keeps exchanging money while they can (that is, while they have at least 10 units of a kind). Prove that Arthur and Theodore will have the same number of Bergengocian dollars at the end (the Bergengocian dollar is the currency of one of the countries on the island). (*6 points*) (Based on the idea of *G. Mészáros,* Budapest) **B. 5141.** Prove that $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+1}{j+1}=2^{2n}$. (*6 points*) (Proposed by *Dávid Nagy,* Cambridge)

New problems – competition A (see page 541): **A. 789.** Let $p(x)=a_{21}x^{21}+a_{20}x^{20}+\cdots+a_1x+1$ be a polynomial with integer coefficients and real roots such that the absolute value of all of its roots are less than 1/3, and all the coefficients of $p(x)$ are lying in the interval $[-2019a, 2019a]$ for some positive integer a. Prove that if this polynomial is reducible in $\mathbb{Z}[x]$, then the coefficients of one its factors are less than a. (Submitted by *Navid Safaei,* Tehran, Iran) **A. 790.** Andrew and Barry plays the following game: there are two heaps with a and b pebbles, respectively. In the first round Barry chooses a positive integer k, and Andrew takes away k pebbles from one of the two heaps (if k is bigger than the number of pebbles in the heap, he takes away the complete heap). In the second round the roles are reversed: Andrew chooses a positive integer and Barry takes away the pebbles from one the two heaps. This goes on, in each round the two players are reversing the roles. The player that takes the last pebble loses the game. Which player has a winning strategy? (Submitted by *András Imolay,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 569)

M. 400. Investigate the position of the centre of mass of a pine branch, which was cut off near the trunk. That is, at what fraction of the length of the branch is the centre of mass? Carry out the measurement with the cut-off side branches as well. Take care, not to bend the branches too much. Compare the results. The pine branch can be a lowest branch of the Christmas tree, which had been cut off before the tree was put into its stand.

G. 725. The winding road in Bükk Mountains, which connects the cities Eger and Miskolc is approximately 50 km long. On a summer Sunday morning the traffic was heavy in both directions. Cars in both directions travelled at an average speed of 35 km/h, the oncoming cars passed each other on an average of one minute. Estimate the number of cars on the road at the same time (travelling in both directions). **G. 726.** The four inner cogwheels shown in the *figure* are moving round, whilst the outer one is at rest. (The motion of the cogwheels can be seen on the homepage.) *a*) Compare the periods of the cogwheels. *b*) Order the speeds of the centres of the cogwheels increasingly. **G. 727.** The length of a train is 93.5 m. The train starts from rest and travels at a constant acceleration along a straight railway. At the starting moment of the train a car, moving along a straight road parallel to the railway at a constant speed, is next to the end of the train, and after 14 seconds the car reaches the front of the train. After another 16 s, the car is again at the end of the train. *a*) What is the speed of the car? *b*) What is the acceleration of the train? *c*) How much distance does the car travel until the train finally passes it? **G. 728.** Some liquids – like raw milk or salad dressing made from olive oil and balsamic vinegar – when left to rest separate to their constituents. The oil will be on the top of the dressing and greasy cream will be on the top of the milk, while the total volume of the liquid does not change. How does the hydrostatic pressure at the bottom of the bottle into which the liquid is poured change when it is left to rest (increases, decreases or does not change) if the bottle *a*) is tapering upward; *b*) has a cylinder shape; *c*) is broadening out upward?

P. 5272. The four inner cogwheels shown in the *figure* are moving round, whilst the outer one is at rest. (The motion of the cogwheels can be seen on the homepage.) What are the values of the number of turns of the cogwheels labelled with the letters A, B and C if the smallest cogwheel labelled with D completes a full revolution in each second? **P. 5273.** A cuboid of mass $m = 0.5$ kg, base-side $a = 20$ cm and of height $b = 10$ cm is initially held at rest on the top of a right-angled inclined plane of mass M shown in the *figure.* The angle of elevation of the inclined plane is $\alpha = 30^\circ$ and its height is $h = 60$ cm. The cuboid is released at a certain moment. Friction is negligible everywhere. *a*) What is the ratio of the speeds of the two objects when the cuboid touches the ground? *b*) How long does it take for the cuboid to reach the ground? *c*) How much distance is covered by the cuboid? **P. 5274.** A rigid rod of length $3L$, shown in the *figure* can be rotated frictionlessly in a vertical plane about a horizontal axle, which is at a distance of L from the left end of the rod. The mass of the rod is negligible. Two small objects of masses m and $2m$ are attached to the ends of the rod, and the rod is held horizontally. Then the rod is released at a certain moment. *a*) What is the magnitude of that component of the force exerted on the axle by the rod which is parallel to the rod at the moment when the angle between the rod and the horizontal is α? *b*) Determine the angle of α at the moment when the magnitude of the total force exerted by the rod on the axle is $4mg$. **P. 5275.** One of the fountains in city Kaposvár jets 1 cubic metre of water into the air to a height of 5 m in each minute. *a*) What is the power of the electric motor if the efficiency of pumping is 75%? *b*) At what speed does the water flow out of the nozzle? *c*) What is the diameter of the water flowing out of the nozzle? *d*) What is the diameter of the water at a height of 2.5 m? Do not consider air-drag and that the water is separated to small drops. **P. 5276.** With a sphere-shaped balloon of diameter 25 cm we get into the cabin of a cable car and travel up to the top of the peak called Zugspitze. The cabin is not air-tight, but the temperature inside is kept to be the same as it is at the bottom station. The cabin starts at a height of 1000 m above sea level and goes up to a heigh of nearly 3000 m above sea level. The pressure inside the balloon is only a little greater than the ambient air pressure during the whole the journey. Estimate the diameter of the balloon when we get off. **P. 5277.** The focal length of a camera is 50 mm, the diameter of the lens is 20 mm. The lens is adjusted such that it forms the sharp image of an object which is at a distance of 5 m from the lens. What is the smallest and greatest distance of a point-like object from the film, between which the image formed on the film is smaller than a spot of diameter 0.05 mm? How will this interval change if the diameter of the lens is decreased to 10 mm? **P. 5278.** How much do the bulbs glow if they are connected in series to a voltage supply of 230 V? The voltage and power ratings of the bulbs are the following: *a*) one bulb rated as 230 V, 25 W and another rated as 230 V, 100 W; *b*) one of them is rated as 110 V, 25 W and the other as 110 V, 100W; *c*) one of them is rated as 110 V, 25 W and the other as 230 V, 100 W; *d*) one of them is rated as 230 V, 25 W and the other is rated as 110 V, 100 W? **P. 5279.** Electric current of magnitude I flows in two pieces of a very long parallel wire, which are at a distance of 2ℓ, in the opposite direction. A rectangle-shaped loop of wire is placed in the plane of the two wires at a distance of $d = \ell - b$ from one of the wires, first in position 1 and next in position 2, shown in the *figure.* The sides of the rectangle are a and b, where $0 < a - b < \ell$. In which case will the flux linkage of the loop be greater? **P. 5280.** The structure of potassium chloride ion crystal of density 1.98 g/cm^3 is the same as that of rock salt. What is the distance between the centres of the nearest positive and negative ions in this crystal? **P. 5281.** What will the maximum charge be on an initially uncharged metal spherical shell of radius 50 mm, which is mounted on an insulating stand, if it is illuminated for a long time with a UV light source? The shortest wavelength of light emitted by the source is 280 nm, and the work function of the metal of the shell is 3.7 eV. Neglect the conducting effect of air. **P. 5282.** A magnetic disc is moving on an air-cushioned table above a metal sheet. Due to the generated eddy currents there is a retarding force exerted on the disc, which is proportional to the speed of the disc. Moving above a sheet made of aluminium the disc stops after covering a distance of 30 cm, but when the sheet is made of copper the disc stops after covering only 20 cm. How much distance will the disc cover if first it travels above a piece of copper sheet of width 15 cm, and then continues its motion above an aluminium sheet? (The initial speeds of the disc are the same in all the three cases.)

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 70. évfolyamának tartalomjegyzéke (2020)

Közlemények:

Emelt szintű matematika érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

Megoldások:

C gyakorlatok megoldásai:

B feladatok megoldásai:

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

A B pontversenyben kitűzött feladatok:

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok:

Angol nyelvű kivonatok:

Az I pontversenyben kitűzött feladatok:

Az S pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok:

Mindkét pontversenyben kitűzött I/S nehezebb feladatok:

INFORMATIKA

Cikkek:

FIZIKA

Cikkek, közlemények:

Versenyek, versenybeszámolók:

Mérési feladatok megoldásai:

Fizika gyakorlatok megoldásai:

Fizika feladatok megoldásai:

Kitűzött mérési feladatok:

Kitűzött gyakorlatok:

Kitűzött elméleti feladatok:

Angol nyelvű kivonatok:

A pontversenyben megoldott és kitűzött matematika és fizika példák csoportosítása tárgykörök szerint

A példák száma mögött zárójelben az oldalszám olvasható, ha két szám fordul elő, az első a kitűzés, a második a megoldás helyét jelöli. A matematika feladatok felsorolásának sorrendje: A jelű nehezebb feladatok, B feladatok, C gyakorlatok, K gyakorlatok. A fizika feladatok felsorolásának sorrendje: M mérési feladatok, G gyakorlatok, P feladatok.

MATEMATIKA

Aritmetika, algebra (műveletek számokkal, kifejezésekkel, azonosságok):
A. 769 (99); 776 (228); 788 (480); – B. 5072 (31); 5079 (98); 5106 (290); 5111 (355); 5126 (479); – C. 1585 (30); 1587 (30); 1589 (96); 1592 (97); 1604 (226); 1606 (226); 1607 (226); 1613 (289); 1616 (354); 1618 (354); 1620 (354); 1623 (417); 1627 (417); 1628 (418); 1632 (478); 1634 (478); 1639 (538); 1643 (539); – K. 644 (28); 646 (29); 649 (95); 653 (96); 654 (159); 655 (159); 657 (159); 658 (160); 660 (353); 663 (353); 667 (416); 669 (477); 674 (537); 675 (537); 677 (538).

Számelméleti feladatok (egész számok, prímszámok, oszthatóság, számrendszerek):
A. 770 (99); 773 (163); 778 (291); 785 (420); 787 (480); – B. 5074 (31); 5086 (161); 5088 (161); 5095 (227, 350); 5100 (227); 5109 (291); 5113 (355); 5118 (418); 5128 (479); 5134 (539); – C. 1528 (151); 1581 (29); 1585 (30); 1590 (97); 1595 (160); 1597 (160); 1599 (160); 1607 (226); 1611 (289); 1625 (417); – K. 645 (28); 650 (95); 655 (159); 657 (159); 665 (416); 666 (416); 671 (477); 673 (477).

Halmazok (ponthalmazok is):
A. 769 (99); 775 (228); – C. 1637 (538).

Valószínűség, kombinatorika, statisztika (kiválasztás, leszámolás, binomiális együtthatók):
A. 772 (162); 776 (228); 785 (420); – B. 5027 (158); 5084 (98); 5090 (162); 5092 (162); 5112 (355); 5115 (356); 5123 (419); 5132 (480); 5140 (540); 5141 (540); – C. 1557 (152); 1594 (97); 1602 (225); 1604 (226); 1611 (289); 1615 (289); 1636 (479); 1641 (539); – K. 646 (29); 652 (96); 659 (353); 672 (477); 673 (477).

Logikai kérdések (játékok, színezések, táblázatok, sakktábla):
A. 767 (32); 780 (356); 783 (419); 790 (541); – B. 4992 (286); 5052 (413); 5070 (31); 5098 (227); 5105 (290, 351); 5120 (418); 5136 (539); – C. 1630 (478); 1636 (479); 1637 (538); – K. 664 (416); 676 (538); 678 (538).

Az összes C gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

Az összes B feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

FIZIKA

Az összes mérési feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

Az összes gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

Az összes feladat megoldása a feladatok sorrendjében: