A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1630–1636.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1630. Egy sakktábla fehér mezőire ráírtuk a számokat 1-től 32-ig úgy, hogy minden mezőbe csak egy számot írtunk, és az összes számot felhasználtuk. Ezt követően a fekete mezőkre beírtuk a szomszédos mezőkben található számok összegét. Mekkora a fekete mezőkbe írt számok összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke?

C. 1631. Egy egységsugarú körön adott az AB húr. Erre két derékszögű háromszöget emelünk: ABC-t úgy, hogy C csúcsa a körön helyezkedik el és B-nél van a derékszög, az ABD háromszöget pedig úgy, hogy AB az átfogója, és egyenlő szárú. Mekkora az AB húr hossza, ha a két háromszög területe megegyezik? Mekkora ez a terület?

Feladatok mindenkinek

C. 1632. Hány olyan különböző, pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozat létezik, melynek elemei a 24, a 744 és a 2844 is? (Két számtani sorozatot különbözőnek tekintünk, ha különböző a kezdőelemük vagy a differenciájuk.)

C. 1633. Egy egységnyi oldalú négyzet egyik oldalának belső pontja P. Tekintsük azokat a P csúcsú paralelogrammákat, amelyek minden csúcsa a négyzet egy-egy különböző oldalára esik. Igazoljuk, hogy ha P nem oldalfelező pont, akkor

(i) pontosan két téglalap van a paralelogrammák között, és

(ii) ezen két téglalap területének összege 1.

C. 1634. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot 2020}<\frac{1}{3}.$$

Feladatok 11. évfolyamtól

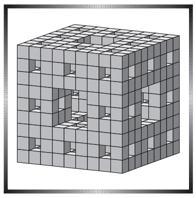
C. 1635. Adott két egymást metsző kör. Egyik metszéspontjukon át szerkesszünk* olyan szelőt, amelynek a két kör által határolt szakaszát a kiszemelt metszéspont harmadolja. Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).

*körzővel, vonalzóval: papíron, vagy számítógépes geometriai szerkesztő programmal

C. 1636. Kosztolányi Dezső diákkorában néhány hetet Párizsban töltött. Hamar szembesült azzal, hogy rásóztak egy forgalomból kivont 10 fillérest. Persze szeretett volna megszabadulni az értéktelen pénztől, de mondani sem kell, hogy sikertelenül. Kosztolányi ezt annak tulajdonította, hogy a boltosok már az arcáról leolvasták a szándékát. Ezért azt eszelte ki, hogy a rossz érméhez hozzákevert kilenc jó 10 fillérest. Ezeket a zsebébe süllyeszti és oda se néz, amikor kiad egy-egy érmét. Végül a zsebében már csak egy darab maradt – a forgalomból kivont 10 filléres. Mekkora ennek a valószínűsége?

Beküldési határidő: 2020. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5126–5133.)



B. 5126. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geqslant 3$, akkor megadható n különböző pozitív egész szám úgy, hogy reciprokaik összege 1 legyen.

(*3 pont*)

B. 5127. Adott egy konvex szögtartomány és egy k hosszúságú szakasz. Mi a mértani helye azon P pontoknak a szögtartományban, amelyeken keresztül húzható olyan egyenes, amely éppen k kerületű háromszöget metsz ki az adott szögtartományból?

(*4 pont*)

B. 5128. Adjuk meg az összes olyan (x,y) relatív prím egészekből álló számpárt, amelyre $x^2+x=y^3+y^2$.

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5129. Két játékos az x^3+ax^2+bx+c polinom a, b és c együtthatói közül felváltva választ egyet, majd annak egy tetszőleges egész értékeket ad. Bizonyítsuk be, hogy a kezdő el tudja érni, hogy (a három lépés után) a polinom mindhárom gyöke egész szám legyen (vagyis a polinomot fel lehessen bontani három elsőfokú, egész együtthatós polinom szorzatára).

(*3 pont*)

B. 5130. Adott a síkban n pont úgy, hogy bármely k $(k \geqslant 2)$ darabból kiválasztható kettő, amelyek távolsága legfeljebb egységnyi. Mutassuk meg, hogy a pontok lefedhetők $k-1$ darab egységnyi sugarú körlappal.

(*5 pont*)

B. 5131. Legyen H egy egységnyi területű szabályos háromszög, O egy rögzített pont, s tetszőleges P pontra jelölje H_P a H háromszög $\overrightarrow{OP}$-vel vett eltoltját.