Helyesbítés

A szerkesztőség hibájából a 2020/6. számban megjelent emelt szintű gyakorló feladatsor **4.***b*) feladatának kérdése tévesen jelent meg. A helyes szöveg:

Mekkora a legnagyobb területű téglalap alapra illeszkedő éle, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn?

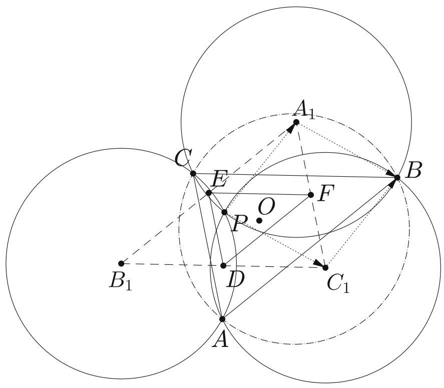
A hibáért elnézést kérünk.

Matematika feladatok megoldása

B. 5015. *Három egységsugarú kör átmegy egy közös ponton. Második metszéspontjaik A, B és C. Mekkora az ABC kör sugara?*

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. Legyen a három kör középpontja A_1, B_1 és C_1, a közös pontjuk pedig P az *ábra* szerint.



Megmutatjuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai egybeesnek (O pont). Irányítsunk a közös P pontból a körök középpontjaiba helyvektorokat: $\overrightarrow{PA_1}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{PB_1}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{PC_1}=\mathbf{c}$. (Az ábrán csak a $\overrightarrow{PA_1}$ és $\overrightarrow{PC_1}$ vektorokat tüntettük fel.) Ezek egységnyi hosszúságúak. Az A_1B, C_1B, C_1A, B_1A, B_1C, A_1C is mind egységnyiek, így

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PB},\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{PC},\quad \mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PA}.$$

Az AA_1 szakasz felezőpontjába mutató helyvektor:

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}.$$

Ugyanezt a vektort kapjuk BB_1 és CC_1 felezőpontjára is, a három felezőpont valóban egybeesik. Az $A_1B_1C_1$ háromszög O-ra vonatkozó tükörképe az ABC háromszög. Mivel az $A_1B_1C_1$ háromszög köré a P körül egységnyi sugarú kör írható, ezért tükörképe, az ABC háromszög köré is.

Stomfai Gergely (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyakorló Gimn. és Koll., 10. évf.) dolgozata alapján

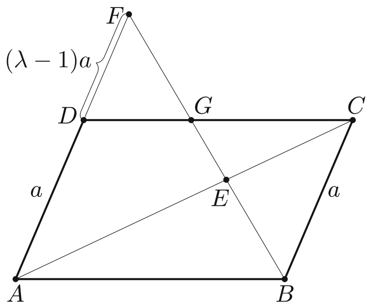
Megjegyzés. A megoldásból is látható, hogy az O pont az $A_1B_1C_1$ háromszög Feuerbach-körének középpontja, a P pont a köréírt körének középpontja, a P pont O-ra vonatkozó tükörképe, pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja, amely, mint megtudtuk az ABC háromszög köréírt körének középpontja. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög DEF talpponti háromszögét a körérírt kör P középpontjából a kétszeresére nagyítottuk, így kaptuk az ABC háromszöget.

Összesen 62 dolgozat érkezett. 3 pontos 52, 2 pontos 2 tanuló dolgozata. 1 pontot 4, 0 pontot 2 tanuló kapott. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 5031. *Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának D-n túli meghosszabbításán vegyük fel az F pontot. A BF szakasz a CD oldalt a G, az AC átlót pedig az E pontban metszi. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}.$$

(*3 pont*)



Megoldás. Legyen $AD=BC=a$ és $AF=\lambda\cdot a$. Így

$$DF=(\lambda-1)\cdot a.$$

Az AFE és CBE háromszögek hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak (illetve egymás meghosszabbításai). A hasonlósági arány $\frac{AF}{BC}=\frac{\lambda a}{a}=\lambda$. Ebből következően $\frac{FE}{BE}=\lambda$, amiből

$$\frac{BF}{BE}=\frac{BE+EF}{BE}=\lambda+1, \qquad \text{tehát} \qquad \frac{1}{BE}=\frac{\lambda+1}{BF}.$$

Az FAB és FDG háromszögek szintén hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlósági arány

$$\frac{GF}{BF}=\frac{DF}{AF}=\frac{(\lambda-1)a}{\lambda a}=\frac{\lambda-1}{\lambda},$$

amiből

$$\frac{BG}{BF}=\frac{BF-GF}{BF}=\frac{\lambda-(\lambda-1)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}, \qquad \text{tehát} \qquad \frac{1}{BG}=\frac{\lambda}{BF}.$$

A fentieket a bizonyítandó $\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}$ egyenlőségbe behelyettesítve:

$$\frac{\lambda+1}{BF}=\frac{\lambda}{BF}+\frac{1}{BF}.$$

Mivel $BF\neq 0$, ez valóban igaz.

Fraknói Ádám (Jedlik Ányos Gimn., Budapest, 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 43 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 40, 1 pontot 3 versenyző.