Határozzuk meg az AB oldal egyenese és az $y=-x^2+8x-10$ egyenletű parabola metszéspontjainak koordinátáit. (*5 pont*)

c) Számítsuk ki, hogy az ABC háromszög területének hányadrészét fedik le azok a pontok, amelyekre $y \leqslant -x^2+8x-10$ teljesül. (*8 pont*)

Bíró Bálint
Eger

Megoldásvázlatok a 2020/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Melyek azok az x, y egész számok, amelyekre egyszerre teljesül, hogy:*

a) $x^2+y^2 \leqslant 25$;

b) $|x|+|y| \geqslant 5$;

c) $\log_2(y+1-x^2) \geqslant 0$? (*12 pont*)

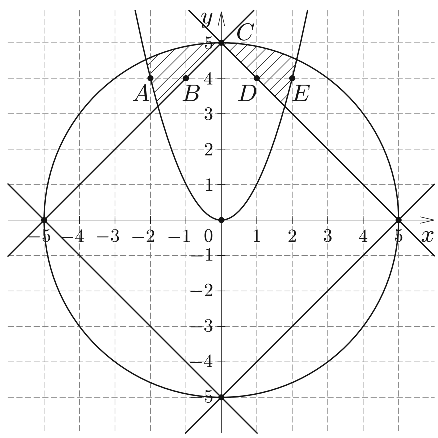
Megoldás. Az *a*) feltételnek megfelelő valós számpárok halmaza a koordinátarendszerben egy origó középpontú, 5 egység sugarú zárt körlemezzel szemléltethető.

b) Itt a négy negyedben az alábbiak szerint alakulnak a halmazok:

ha	$x \geqslant 0$ és $y \geqslant 0$,	akkor $y \geqslant -x+5$;
ha	$x \leqslant 0$ és $y \geqslant 0$,	akkor $y \geqslant x+5$;
ha	$x \leqslant 0$ és $y \leqslant 0$,	akkor $y \leqslant -x-5$;
ha	$x \geqslant 0$ és $y \leqslant 0$,	akkor $y \leqslant x-5$.

c) $\log_2(y+1-x^2) \geqslant 0$, $\log_2(y+1-x^2) \geqslant \log_2 1$ $\Rightarrow$ (mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növő) $y+1-x^2 \geqslant 1$, tehát $y \geqslant x^2$ (a normálparabola és belső pontjai). (Ekkor $y+1-x^2>0$, tehát a logaritmus értelmezett.)

Ha mindezeket, továbbá azt is figyelembe vesszük, hogy egész számokat keresünk, akkor a vonalkázott tartományban, illetve a határán levő rácspontok koordinátáit kapjuk.



A megoldások:

$A(-2;4)$	$x_1=-2$;	$y_1=4$;
$B(-1;4)$	$x_2=-1$;	$y_2=4$;
$C(0;5)$	$x_3=0$;	$y_3=5$;
$D(1;4)$	$x_4=1$;	$y_4=4$;
$E(2;4)$	$x_5=2$;	$y_5=4$.

2. *a) Az egyszerű hétpontú gráf csúcsainak foka rendre* $3, 2, 4, 1, 2$; *a másik kettőt nem ismerjük. Állapítsuk meg ezeket, ha a gráfnak* 11 *éle van, valamint a gráf megrajzolható egy folytonos vonallal úgy, hogy mindegyik élén pontosan egyszer haladtunk át.*

b) Adjunk meg három különböző irracionális számot úgy, hogy a három szám összege és bármelyik kettő szorzata is racionális szám legyen.

c) Mutassuk meg, hogy az A és B kijelentések tetszőleges logikai értékére igaz a $\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$ *egyenlőség.* *(12 pont)*

Megoldás. *a)* Az egyszerű gráf csúcsai fokainak összege az élek számának kétszerese, ezért az ismeretlen fokszámok összege 10. A hétpontú gráf csúcsának foka legfeljebb 6 lehet, így a két fokszám 5, 5 vagy 4, 6. Az utolsó feltétel miatt a megoldás 4, 6, mert a másik esetben négy páratlan foka volna a gráfnak, ekkor azonban nem lenne nyitott Euler-vonala. Mivel ekkor van 6-odfokú csúcs, így a gráf összefüggő is, és ezért van nyitott Euler-vonala.

b) Pl.: $i_1 = \sqrt{2}$,$i_2 = 2\sqrt{2}$, $i_3 = -3\sqrt{2}$. A számok irracionálisak és különbözőek.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad i_1 \cdot i_2 = 4; \quad i_1 \cdot i_3 = -6; \quad i_2 \cdot i_3 = -12.$$

c) I. megoldás. Készítsük el az igazságtáblázatot:

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$A \wedge \neg B$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	h
h	h	i	h	h

Az utolsó két oszlopban rendre ugyanazok a logikai értékek vannak, tehát a két kifejezés egyenlő.

II. megoldás. Ismert az $A \to B = \neg A \vee B$ azonosság. $\neg(A \to B) = \neg(\neg A \vee B)$, most alkalmazzuk a De-Morgan azonosságot: $\neg(\neg A \vee B) = \neg\neg A \wedge \neg B = A \wedge \neg B$.

3. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

egyenletet. *(13 pont)*

Megoldás. Kikötés: $\cos(2x) \neq 0$; alakítsuk az egyenlet jobb oldalát:

$$\sin x + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x};$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos x - \sin x,$$

(itt egy újabb feltétel adódott: $\cos x \geqslant \sin x$),

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \cos x - \sin x, \quad 1 + \sin(2x) = \cos x - \sin x.$$

Emeljünk négyzetre:

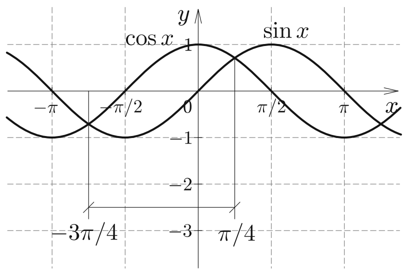
$$1 + 2\sin(2x) + \sin^2(2x) = 1 - \sin(2x),$$

$$\sin^2(2x) + 3\sin(2x) = 0,$$

$$\sin(2x)\big[\sin(2x) + 3\big] = 0,$$

ahonnan $\sin(2x) = 0$, vagy $\sin(2x) + 3 = 0$. Ez utóbbi lehetetlen, így $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. A $\cos\left(2 \cdot \frac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ feltételnek megfelelnek a gyökök, mert a bal oldal értéke 1, vagy -1, attól függően, hogy k páros, vagy páratlan.

A $\cos x \geqslant \sin x$ egyenlőtlenség megoldását a függvények grafikonjainak ismeretében leolvassuk:



Ezt figyelembe véve a megoldások: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

(Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk eredményeink helyességéről: az első gyökre $-1 = -1$, a másodikra $1 = 1$ adódik, míg a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$-re, illetve a $(2l+1)\pi$-re $1 = -1$-et kapunk, ezek tehát nem gyökök.)

4. *Két horgászegyesület, az Aligai Pecások és a Bélatelepi Horgászok közös edzőtáborozást tartottak* 47 *fő részvételével. A csapatokban felnőtt és junior korosztályú csoportok voltak. Tudjuk, hogy:*

a) minden csoport létszáma prímszám;

b) legkevesebben a junior Bélatelepi Horgászok, legtöbben a felnőtt Aligai Pecások vannak a táborban;

c) a felnőtt versenyzők összlétszáma osztható tízzel;

d) a két csapat felnőtt tagjainak létszáma között 10*-nél kisebb a különbség.*

Hányan vannak az egyes csoportokban? *(14 pont)*

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: felnőttek A, B; juniorok a, b a csapatok kezdőbetűinek megfelelően. Így felírhatjuk az $A + a + B + b = 47$ egyenletet, ahol az ismeretlenek pozitív prímek. Azonnal láthatjuk, hogy az egyik a 2, hiszen különben az összegnek párosnak kellene lennie. A *b)* feltétel alapján ez a b, vagyis két junior Bélatelepi Horgász van a táborban.

Ezután $A+a+B=45$, $a=45-(A+B)$. A c) feltétel szerint $A+B$ osztható 10-zel, így a jobb oldal osztható 5-tel, mivel prím, $a=5$.

$A+B=40$ (itt példát láthatunk a Goldbach-sejtésre, mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként). Több lehetőség is van, ezek: $3+37=11+29=17+23=40$.

A b) és d) feltételeket figyelembe véve a megoldás: $A=23$; $B=17$; $a=5$; $b=2$.

Az edzőtáborban 23 felnőtt és 5 junior Aligai Pecás, 17 felnőtt és 2 junior Bélatelepi Horgász van.

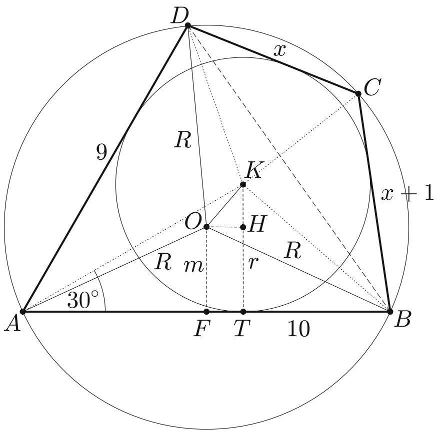
II. rész

5. *Egy húrnégyszög egyúttal érintőnégyszög is (bicentrikus négyszög). Két szomszédos oldala* 9, 10 *egység, az általuk bezárt szög* $60°$. *Jelöljük* O*-val a körülírt,* K*-val a beírt kör középpontját.*

a) Adjuk meg a másik két oldal hosszát.

b) Határozzuk meg a beírt- és a köréírt kör sugarát.

c) Milyen hosszú a KO *távolság?* (*16 pont*)



Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseivel az érintőnégyszögre vonatkozó tétel szerint $AB+CD=DA+BC$. Legyen $CD=x$, ekkor $BC=x+1$. Ha a $DAB\sphericalangle=60°$, akkor a húrnégyszögekre igaz tétel miatt $BCD\sphericalangle=120°$.

Írjuk fel a koszinusz-tételt az $ABD\triangle$ BD oldalára:

$$BD^2=9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cdot \frac{1}{2},$$

$$BD^2=91,\quad BD=\sqrt{91};$$

majd írjuk fel a $BCD\triangle$-ben is a BD oldalra:

$$91=x^2+(x+1)^2-2x\cdot(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$91=x^2+x^2+2x+1+x^2+x,$$

$$90=3x^2+3x \;\Rightarrow\; 0=x^2+x-30;$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2} \;\Rightarrow\; x=5;\;\; CD=5,\;\; BC=6.$$

b) Az $ABD\triangle$ körülírt körének – ami egyúttal a négyszögnek is körülírt köre – sugara az ismert tétel szerint:

$$R=\frac{BD}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{91}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{91}{3}}.$$

A négyszög területe:

$$T=\frac{9\cdot 10\cdot \sin 60^\circ}{2}+\frac{5\cdot 6\cdot \sin 120^\circ}{2}=30\sqrt{3}.$$

Használhatjuk Brahmagupta képletét is: $T=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol $s=\frac{a+b+c+d}{2}=15$, tehát $T=\sqrt{5\cdot 6\cdot 9\cdot 10}=\sqrt{2700}=30\sqrt{3}$, vagy pedig a bicentrikus négyszögek területképletét: $T=\sqrt{abcd}$.

A beírt kör sugarát legegyszerűbben az érintősokszögekre érvényes $sr=T$ összefüggés alkalmazásával kaphatjuk meg: $15r=30\sqrt{3}\ \Rightarrow\ r=2\sqrt{3}$.

c) *I. megoldás.* Az ATK derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg} 30^\circ=\frac{AT}{r}\ \Rightarrow\ AT=6$ $\Rightarrow\ OH=FT=AT-AF=1$.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az AFO derékszögű háromszögben:

$$5^2+m^2=R^2\ \Rightarrow\ m^2=\frac{91}{3}-25=\frac{16}{3};\quad m=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3};$$

$$HK=r-m=2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Végül $OK^2=OH^2+HK^2$; $OK^2=1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $OK=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

II. megoldás. Ha már kiszámítottuk a sugarakat, és ismerjük a bicentrikus négyszögek köreinek sugaraira, és e körök középpontjainak távolságára vonatkozó összefüggést, akkor a távolságot innen is megkaphatjuk. Az összefüggés:

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2},$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugara, d a középpontok távolsága.

$$\frac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R-d)^2(R+d)^2}=\frac{1}{r^2};$$

$$\frac{R^2+2Rd+d^2+R^2-2Rd+d^2}{(R^2-d^2)^2}=\frac{1}{r^2};\quad 2r^2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2.$$

Helyettesítsük be a sugarakat:

$$2\big(2\sqrt{3}\,\big)^2\left(\frac{91}{3}+d^2\right)=\left(\frac{91}{3}-d^2\right)^2;$$

$$24\left(\frac{91}{3}+d^2\right)=\frac{8281}{9}-\frac{182}{3}d^2+d^4;$$

$$728+24d^2=\frac{8281}{9}-\frac{182}{3}d^2+d^4 \qquad /\cdot 9$$

$$6552+216d^2=8281-546d^2+9d^4;$$

$$0=9d^4-762d^2+1729,$$

$$(d^2)_{1,2}7=\frac{762\pm\sqrt{762^2-36\cdot 1729}}{18}=\frac{762\pm 720}{18},$$

$d_1^2=\frac{1482}{18}=\frac{247}{3}\ \Rightarrow\ d_1=\sqrt{\frac{247}{3}}\approx 9{,}07$, ez azonban nem jó, mert $d<R$.

$d_2^2=\frac{42}{18}=\frac{7}{3}\ \Rightarrow\ d=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$, ami egyezik az első megoldás eredményével.

Megjegyzés: Brahmagupta tételének levezetését több helyen, pl. Dr. Gerőcs László: *Azok a csodálatos húrnégyszögek* című könyvében is megtalálhatjuk. A bicentrikus négyszögekre vonatkozó tétel bizonyítását pl. Nemecskó István: *Bicentrikus négyszögek* (`matematika.elte.hu/wp-content/uploads/2017/03/NemeckoIstvan.pdf`) címen érhetjük el.

6. *a) Vizsgáljuk meg az $a_n=n^3-n^2$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Állításainkat igazoljuk.*

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

(16 pont)

Megoldás. *a)* A sorozat első néhány tagját kiszámolva $0,4,18,48,100,\dots$ adódik, amiből a szigorúan monoton növekedés látszik. Igazolnunk kell, hogy $a_n<a_{n+1}$ minden $n\in\mathbb{Z}^+$ esetén, tehát

$$n^3-n^2<(n+1)^3-(n+1)^2;\quad n^3-n^2<n^3+3n^2+3n+1-n^2-2n-1;$$

rendezve: $0<3n^2+n$, ami minden pozitív egészre fennáll. Idáig ekvivalens lépéseken át jutottunk, ezért a kiinduló állítás is igaz.

A sorozat alulról korlátos, negatív tagja nincs, így tetszőleges negatív szám jó alsó korlátnak, felülről nem korlátos, azaz bármely pozitív K-hoz található n_0 küszöbindex, hogy minden $n>n_0$ esetén $a_n>K$ teljesül. (A küszöbindex nem lesz „éles", ehhez egy harmadfokú egyenletet kellene megoldani.) Tekintsük a $b_n=\frac{n^3}{2}$ sorozatot.

Az $a_n > b_n$; $n^3 - n^2 > \frac{n^3}{2}$; $\frac{n^3}{2} - n^2 > 0$; $\frac{n^2}{2}(n-2) > 0$, minden $n > 2$-re teljesül.

Oldjuk meg a $b_n > K$ egyenlőtlenséget: $\frac{n^3}{2} > K$; $n > \sqrt[3]{2K}$. Mivel $a_n > b_n$, ezért bármely nagy pozitív K-hoz küszöbindexnek választhatjuk a $\sqrt[3]{2K}$ egészrészét. Beláttuk tehát, hogy az a_n sorozat felülről nem korlátos. (Jelölhetjük ezt úgy is, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.)

b) I. megoldás teljes indukcióval. $n = 1$-re igaz, tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, azaz

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

Bizonyítjuk, hogy fennáll $n+1$-re is, vagyis

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12} + (n+1)^3 - (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)\big[(n+1)-1\big]\big[(n+1)+1\big]\big[3(n+1)+2\big]}{12}, \quad / : (n+1); \quad \cdot 12$$

$$n(n-1)(3n+2) + 12(n+1)^2 - 12(n+1) = n(n+2)(3n+5),$$

$$(n^2-n)(3n+2) + 12n^2 + 24n + 12 - 12n - 12 = (n^2+2n)(3n+5),$$

$$3n^3 - 3n^2 + 2n^2 - 2n + 12n^2 + 12n = 3n^3 + 6n^2 + 5n^2 + 10n,$$

$$3n^3 + 11n^2 + 10n = 3n^3 + 11n^2 + 10n,$$

ekvivalens lépéseken keresztül azonosságot kaptunk, tehát a kiinduló egyenlőség is igaz, ezzel a képlet helyességét igazoltuk.

II. megoldás. Ismert, hogy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; illetve $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Ezeket felhasználva

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 + 3n - 4n - 2}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 - n - 2}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)(3n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

7. *Anna és Bálint szabályos dobókockával játszik. Felváltva dobnak, ha a dobott szám prímszám, akkor a számegyenesen álló bábuval egyet jobbra, ha összetett szám, akkor egyet balra lépnek. Ha egyik sem, akkor a bábu helyben marad. A bábu kezdetben a nullán áll, összesen hatszor fognak dobni. Előtte fogadnak arra, hogy a játék végén melyik számon áll majd a bábu. Anna az egyesre, Bálint a kettesre fogad.*

a) *Kinek mekkora esélye van a nyerésre?*

Tegyük fel, hogy Anna nyerte a fogadást.

b) *Mennyi a valószínűsége, hogy a játék során egyszer dobtak egyest?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Prímszámok: 2, 3, 5; összetett számok: 4, 6; egyik sem: 1. Annak esélye, hogy a bábu egy dobás után jobbra lép $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, jelöljük ezt p_{jobbra}-val. Hasonlóképpen: $p_{\text{balra}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $p_{\text{helyben}}=\frac{1}{6}$.

Számítsuk ki Anna nyerési esélyét. Ahhoz, hogy 6 dobás után a bábu az 1-esen álljon, az alábbiak szerint léphetett (tetszőleges sorrendben):

$$\text{jhhhhh; ennek valószínűsége:}\quad 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{5}=\frac{1}{2592},$$

vagy

$$\text{jjbhhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3}=\frac{60}{2592},$$

vagy

$$\text{jjjbbh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{360}{2592}.$$

Anna nyerési esélye ezek összege: $P(\text{Anna nyert})=\frac{421}{2592}\approx 0{,}1624$.

Hat dobás után a 2-esre a következőképpen kerülhetett a bábu (a lépések sorrendje tetszőleges):

$$\text{jjhhhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{4}=\frac{5}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjbhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}=\frac{120}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjjbb; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}=\frac{180}{1728},$$

$$P(\text{Bálint nyert})=\frac{5}{1728}+\frac{120}{1728}+\frac{180}{1728}=\frac{305}{1728}=\approx 0{,}1765.$$

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy Anna nyert; C, hogy egyszer dobtak egyest.

$$P(AC)=\frac{360}{2592};\quad P(A)=\frac{421}{2592},\quad P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{360}{2592}}{\frac{421}{2592}}=\frac{360}{421}\approx 0{,}8551.$$

8. *A 2 egység élű kocka egyik csúcsát jelöljük A-val, majd állítsunk egyenlő hosszú szakaszokat a kocka A-val érintkező lapjainak középpontjába, az adott lapokra merőlegesen kifelé.*

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük P, Q, R-rel.

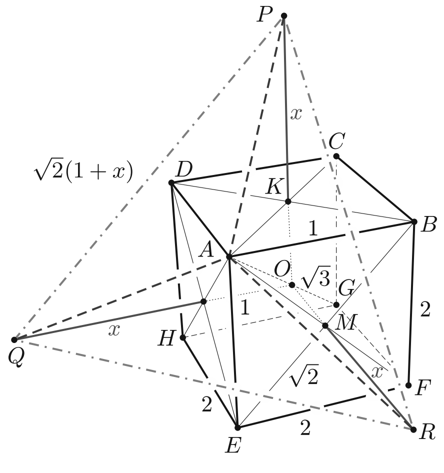
a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az A, P, Q, R pontok egy síkban vannak?

A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

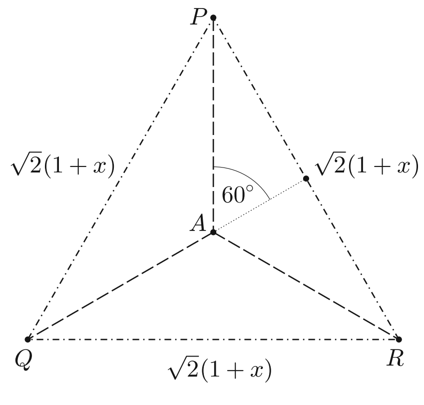
b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?

c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernek 14 csúcsa, 12 lapja és 24 éle lett? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A kocka középpontja O, a felső lapközéppont K. Az $OKA\sphericalangle=90°$, $AOK\sphericalangle=\varphi$. A kocka A-val érintkező lapjainak középpontjai által meghatározott sík merőleges az A-ból induló testátlóra. Ez ugyanaz a sík, mint amit az A-ból induló élek másik végén levő csúcsok határoznak meg, ezek pedig A-val együtt egy szabályos háromszög alapú, egyenlő oldalélű tetraédert alkotnak, amelynek az alaphoz tartozó magasság egyenese AO. Akkor lesz a négy pont egy síkban, ha $PAO\sphericalangle=90°$ (és $QAO\sphericalangle=RAO\sphericalangle=90°$). Ekkor az $AOK\triangle\cong POA\triangle$, mert két szögük ($\varphi$, 90°) egyenlő, $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{1+x}$, $1+x=3$ $\Rightarrow$ $x=2$. Az A, P, Q, R pontok akkor lesznek egy síkban, ha a merőleges szakaszok hossza 2 egység.



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. A QOP háromszögben O-nál derékszög van, a QO befogó és OP befogó $1+x$, ezért a QP átfogó $\sqrt{2}(1+x)$ (QR, RP hasonlóképpen), $AP = AQ = AR = \sqrt{2+x^2}$ (AKP derékszögű háromszög befogói $\sqrt{2}$ és x, átfogó AP, a másik kettő ugyanígy). Ha a négy pont egy síkban van, akkor a PQR szabályos háromszög körülírt körének középpontja A (mert egyenlő távol van a csúcsoktól), ezért a $PAR\sphericalangle = 120°$. Innen kétféleképpen is befejezhetjük:

1. $$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{2}(1+x)}{2}}{\sqrt{2+x^2}}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+x^2} = \frac{\sqrt{2}(1+x)}{2};$$

$$3(2+x^2) = 2(1+x)^2;$$

$$6+3x^2 = 2+4x+2x^2; \quad x^2-4x+4=0;$$

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

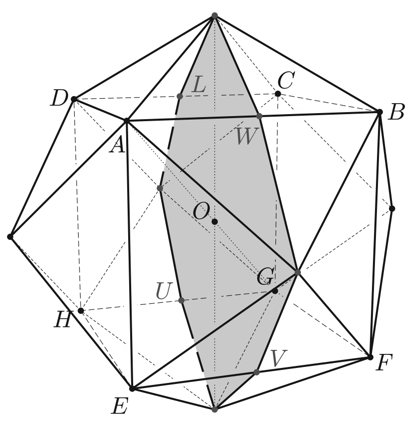
2. Írjuk fel a koszinusz-tételt RP-re:

$$\left[\sqrt{2}(1+x)\right]^2 =$$

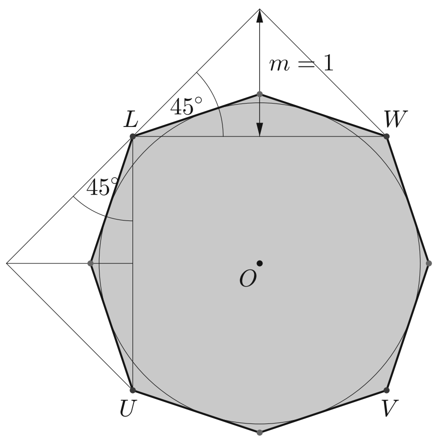
$$= 2+x^2+2+x^2-2(2+x^2)\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$2(1+2x+x^2) = 3x^2+6 \Rightarrow x = 2.$$

b) A kocka körülírt gömbjének sugara $\sqrt{3}$. Ha a gúlák ötödik (a kocka csúcsaitól különböző) csúcsa is ezen a gömbön van, akkor magasságuk $m = \sqrt{3}-1$. Ebben az esetben beírt gömbje is van a testnek, mint az a metszeten látható, mert a magasság kisebb 1-nél. (Akkor nincs beírt gömb, ha a gúlák magassága nagyobb 1-nél, ugyanis ekkor L-nél, U, V, W-nél konkáv szög keletkezik.)



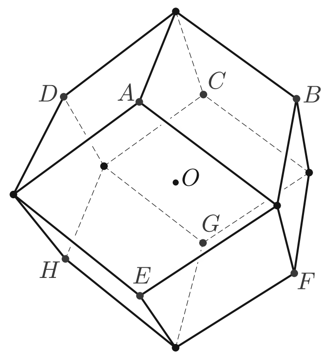
3. ábra



4. ábra

A megoldás tehát: $m = \sqrt{3}-1$.

c) A *3. ábra* szerinti testeknek „általában” 24 lapjuk (14 csúcsuk és 36 élük) van. Ahhoz, hogy a lapok száma felére változzon, az kell, hogy két olyan háromszög, melyek egy eredeti kocka élben közös oldallal rendelkeztek, egy síkba kerüljenek, azaz a poliédernek egy lapját alkossák. Ez akkor következik be, ha a gúlák magassága 1 egység, ugyanis ebben az esetben az oldallapok az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Most az élek száma 12-vel csökken, hiszen eltűnnek a kocka élei, így az élek száma 24 lesz, a csúcsok száma nem változik. Az $m=1$ magasságú gúlák tehát olyan poliédert eredményeznek, melyeknek 14 csúcsuk, 12 lapjuk és 24 élük van (*5. ábra*), más magasság esetén a lapok, élek száma ettől különböző. A megoldás: $m=1$.



5. ábra

Megjegyzés. A kapott poliéder jó példa arra, attól, hogy egy testet egybevágó síkidomok határolnak, nem biztos, hogy szabályos test az illető. Ezt a testet ugyanis egybevágó rombuszok határolják, de különböző térszögleteik miatt mégsem szabályos a test.

9. *Legyen* $f(x)=2x^2-x^3$; $x\in[0;2]$. *Az* $f(x)$ *függvény grafikonjához illesztettünk jobbról egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:*

a) *a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a* 2 *abszcisszájú pontban;*

b) *a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az* $f(x)$ *grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területével.*

Adjuk meg a parabola egyenletét. (*16 pont*)

Megoldás. A parabola vehető a $g(x)=a\ (x-b)^2+c$ függvény grafikonjának, ahol a, b, c alkalmas ($a>0$) konstans. Ahhoz, hogy a két görbe csatlakozzon egymáshoz az $x=2$ abszcisszájú pontban, az kell, hogy $f(2)=g(2)$, a törésmentességhez pedig: $f'(2)=g'(2)$,

$$f(2)=2\cdot 2^2-2^3=0;\quad g(2)=a(2-b)^2+c\ \Rightarrow$$

(1) $$0=a(2-b)^2+c,$$

$$f'(x)=4x-3x^2;\quad g'(x)=2a(x-b);\quad f'(2)=4\cdot 2-3\cdot 2^2=-4;$$

(2) $$-4=2a(2-b).$$

Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területéhez először meg kell oldanunk a $0=2x^2-x^3$ egyenletet. $0=x^2(2-x)\ \Rightarrow\ x_1=0$; $x_2=2$,

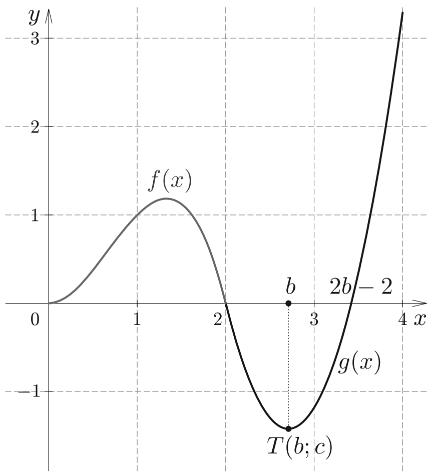
$$T=\int_0^2(2x^2-x^3)\,\mathrm{d}x=\left[2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=2\cdot\frac{8}{3}-\frac{16}{4}=\frac{4}{3}.$$

A $g(x)$ függvény grafikonjának szimmetriáját kihasználva kaphatjuk az integrálás határait. A kezdőpont nyilván a 2, a végpont pedig: $2(b-2)+2=2b-2$. Mivel a síkidom az x tengely alatt van,

$$-\frac{4}{3}=\int\limits_{2}^{2b-2}\left[a(x-b)^2+c\right]\mathrm{d}x=\left[a\frac{(x-b)^3}{3}+cx\right]_2^{2b-2}=$$

$$=a\frac{(b-2)^3}{3}+c(2b-2)-\left[a\frac{(2-b)^3}{3}+2c\right]=$$

$$=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2bc-4c=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2c(b-2).$$



Megkaptuk tehát a harmadik egyenletet:

$$(3)\qquad -\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2c(b-2).$$

(2)-ből kifejezzük $(b-2)$-t:

$$b-2=\frac{2}{a},$$

(1)-et felhasználva:

$$0=a\left(-\frac{2}{a}\right)^2+c\ \Rightarrow\ c=-\frac{4}{a}.$$

Behelyettesítve (3)-ba:

$$-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a\left(\frac{2}{a}\right)^3+2\left(-\frac{4}{a}\right)\frac{2}{a};\quad -\frac{4}{3}=\frac{16}{3a^2}-\frac{16}{a^2}\quad \Big/\cdot(-3a^2);$$

$$4a^2=-16+48;\quad a^2=8\ \Rightarrow\ a=2\sqrt{2}\ \ (a>0);$$

$$c=-\frac{4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2};\quad b=2+\frac{2}{2\sqrt{2}}=2+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

A parabola egyenlete:

$$y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{2}\quad \big(y=g(x)\big).$$

Németh László
Fonyód

Helyesbítés

A szerkesztőség hibájából a 2020/6. számban megjelent emelt szintű gyakorló feladatsor **4.***b*) feladatának kérdése tévesen jelent meg. A helyes szöveg:

Mekkora a legnagyobb területű téglalap alapra illeszkedő éle, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn?

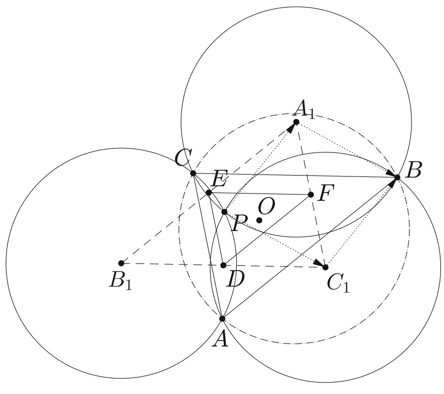
A hibáért elnézést kérünk.

Matematika feladatok megoldása

B. 5015. *Három egységsugarú kör átmegy egy közös ponton. Második metszéspontjaik A, B és C. Mekkora az ABC kör sugara?*

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. Legyen a három kör középpontja A_1, B_1 és C_1, a közös pontjuk pedig P az *ábra* szerint.



Megmutatjuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai egybeesnek (O pont). Irányítsunk a közös P pontból a körök középpontjaiba helyvektorokat: $\overrightarrow{PA_1}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{PB_1}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{PC_1}=\mathbf{c}$. (Az ábrán csak a $\overrightarrow{PA_1}$ és $\overrightarrow{PC_1}$ vektorokat tüntettük fel.) Ezek egységnyi hosszúságúak. Az A_1B, C_1B, C_1A, B_1A, B_1C, A_1C is mind egységnyiek, így

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PB},\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{PC},\quad \mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PA}.$$

Az AA_1 szakasz felezőpontjába mutató helyvektor:

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}.$$

Ugyanezt a vektort kapjuk BB_1 és CC_1 felezőpontjára is, a három felezőpont valóban egybeesik. Az $A_1B_1C_1$ háromszög O-ra vonatkozó tükörképe az ABC háromszög. Mivel az $A_1B_1C_1$ háromszög köré a P körül egységnyi sugarú kör írható, ezért tükörképe, az ABC háromszög köré is.

Stomfai Gergely (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyakorló Gimn. és Koll., 10. évf.) dolgozata alapján