A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek:

$$PAD\sphericalangle : PBA\sphericalangle : DPA\sphericalangle = 1 : 2 : 3 = CBP\sphericalangle : BAP\sphericalangle : BPC\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $ADP\sphericalangle$ és a $PCB\sphericalangle$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.

2. feladat. Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ és $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

3. feladat. Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

Második nap

4. feladat. Adott egy $n > 1$ egész szám. Egy hegynek egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban fekvő állomásra lehet eljutni (közbülső megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek a feltételek teljesülnek B-re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság *összeköt* két állomást, ha a lejjebbi állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között).

Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két olyan állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

5. feladat. Adott egy kártyapakli, amely $n > 1$ kártyából áll. Mindegyik kártyára egy pozitív egész szám van felírva. A pakli olyan, hogy bármely két kártyán lévő szám számtani közepe egyúttal a mértani közepe is néhány (egy vagy több) kártyán lévő számnak.

Milyen n-ekre következik ebből, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők?

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c pozitív konstans, amellyel igaz a következő állítás:

*Az olimpia honlapja: `https://www.imo2019.uk/`.

Tekintsünk egy $n>1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes *szétválasztja* pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)

Megjegyzés. Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha>1/3$ konstans értékétől függően.

Egy különös életút, Ramanujan
I. rész

Az előadás címe: „Egy különös életút, Ramanujan”.[*] Kifejezőbb lett volna: „Egy romantikus életút, Ramanujan”. A jelenlevő hallgatóságnak vannak már matematikai ismeretei, matematikusok közül is soknak nevéről hallott, életéről is tud valamit, az azonban talányosnak tűnhet, hogyan lehet egyáltalán egy matematikus alakját, életútját romantikusnak nevezni? Pedig *Geoffrey Harold Hardy,* a cambridge-i egyetem világhírű professzora, 100 év óta az első angol matematikus, akinek összegyűjtött munkáit hét vaskos kötetben kiadták halála után, 1936-ban az USA-beli Harvard-egyetemen Ramanujan-ról tartott előadássorozatát a következő szavakkal kezdte (magyar fordításban): „Ezen előadásokban olyan nehéz feladat elé állítottam magam, melyet – ha a sikertelenség miatt mindjárt az elején keresnék mentségeket – majdnem teljesíthetetlennek kellene minősítenem. Észszerű véleményt kell kialakítanom magamban – és ebben Önöket is segítenem – a jelenkori matematika legromantikusabb alakjáról, amit eddig sohasem tettem; egy olyan emberről, akinek karrierje tele van paradoxiákkal és ellentmondásokkal, ami megcsúfol minden olyan kánont, amellyel mi (matematikusok) egymást meg szoktuk ítélni, és akiről, azt hiszem, csak egyetlen dologban fogunk egyetérteni, hogy bizonyos értelemben nagyon nagy matematikus volt.”

Nagy szavak. Már eleve elcsodálkoztatók két ellentétes okból. Matematikusok, olyan rendűek, mint Hardy, általában eredeti matematikai tartalmú értekezések, pláne könyvek írását ambicionálják; Hardy a Ramanujanról szóló 12 előadását könyv alakban adta ki 1940-ben, melynek címe „Ramanujan”. Másrészt azonban mit jelent az a rezerváció, hogy csak „*bizonyos értelemben* nagyon nagy”?

Srinivasa Ramanujan 1887 decemberében született Indiában, egy Madrászhoz közeli kisvárosban nagyon szegény, vallásos brahmin családban. Apja egy ruhakereskedőnél volt könyvelőféle. 5 éves korában kezdett iskolába járni; matematikai képességei 10 éves korában kezdtek mutatkozni. Ekkor még jó vizsgái miatt féltandíjmentes lett, és számtantanára, akinek az órarendet kellett volna összeállítania,

[*] Ez a cikk az 1976-ban megtartott, azonos című TIT-előadás szövege. A KöMaL 1977. októberi számában jelent meg először. Később a Nagy pillanatok a matematika történetében c. könyvben volt olvasható. Az előadás anyagát T. Sós Vera egyetemi docens rendezte sajtó alá. (Szerk.)