KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 8. szám Budapest, 2020. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Beszámoló a 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát szeptember 19. és 28. között Oroszország rendezte meg. A versenyt abban a reményben halasztották el két hónappal az eredetileg tervezett, szokásos júliusi dátumhoz képest, hogy szeptemberre lecseng a koronavírus-világjárvány, és a verseny személyes jelenléttel megtartható lesz. Amikor világossá vált, hogy erre nem lehet számítani, a szervezők a Diákolimpia online megrendezése mellett döntöttek, tehát a 616 résztvevő diák egyetlen központi helyszín helyett a 105 résztvevő ország által felállított 127 vizsgaközpontban írta meg a versenydolgozatot. A vizsgaközpontokban egy-egy vizsgabiztos ellenőrizte személyesen a verseny tisztaságát, emellett a vizsgaközpontokban működő webkamerák által közvetített képet a szervezők által megbízott 44 felügyelő figyelte. Nagy földrajzi kiterjedésű, vagy a járvány által súlyosan érintett országokban, ahol a belföldi utazás is nehézségekbe ütközött volna, több vizsgaközpontot is létrehoztak. Magyarországon egyetlen vizsgaközpont volt, mégpedig Budapesten, a Rényi Intézetben.

A versenyen, szokás szerint, mindkét napon négy és fél óra alatt három-három feladatot kellett megoldani. A feladatok szövegét alább közöljük. Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 31–42 pontot elérő, ezüstérmet a 24–30 pontos, míg bronzérmet a 15–23 ponttal rendelkező tanulók szereztek.

A magyar csapatot hat érettségizett tanuló alkotta.

Tóth Balázs (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 36 ponttal,
Weisz Máté Barnabás (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.) 33 ponttal,
Beke Csongor (Békásmegyeri Veres Péter Gimn.) pedig 32 ponttal *aranyérmet* nyert.

Gyimesi Péter (Békásmegyeri Veres Péter Gimn.) 22 ponttal,
Kocsis Anett (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 22 ponttal és
Nagy Nándor (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 15 ponttal *bronzérmet* kapott.

Tóth Balázs a versenyzők rangsorában holtversenyben a 4.–18. helyen végzett. 2008-ban volt utoljára olyan magyar versenyző, akit csak hárman előztek meg. 1998 óta az idei az első olyan év, amikor a magyar csapat kettőnél több aranyérmet szerzett.

Frenkel Péter (ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék; Rényi Intézet) a magyar csapat vezetőjeként, *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) a magyar csapat helyettes vezetőjeként, *Fekete Panna* (ELTE TTK, matematikus doktorandusz) és *Kovács Benedek* (ELTE TTK, matematikus mesterszakos hallgató) hivatalos megfigyelőként, *Kós Géza* (SZTAKI, ELTE TTK) a Feladatkiválasztó Bizottság tagjaként és koordinátorként, *Kunszenti-Kovács Dávid* (ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék; Rényi Intézet) a Diákolimpiát irányító öttagú Tábla és az Etikai Bizottság tagjaként, *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék) pedig a Hivatalos Nyelvek Bizottság tagjaként működött közre az olimpián.

Az országok nem-hivatalos pontversenyében Magyarország a résztvevő 105 ország között a 13. helyen végzett.

A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Kína 215, 2. Oroszország 185, 3. USA 183, 4. Dél-Korea 175, 5. Thaiföld 174, 6–7. Olaszország és Lengyelország 171, 8. Ausztrália 168, 9. Egyesült Királyság 167, 10. Brazília 165, 11. Ukrajna 164, 12. Kanada 161, **13. Magyarország 160,** 14. Franciaország 154, 15. Románia 152, 16. Szingapúr 151, 17. Vietnám 150, 18–20. Grúzia, Irán és Japán 149, 21–22. Izrael és Kazahsztán 146, 23–24. Csehország és Tajvan 145, 25. Szerbia 144, 26–27. Németország és Törökország 140, 28. Hongkong 139, 29–30. Mongólia és Hollandia 135.

Az összes résztvevő ország és versenyző neve és eredménye megtalálható az `imo-official.org` honlapon.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. A központi olimpiai felkészítő szakkör vezetője a helyettes csapatvezető, *Dobos Sándor* volt. A felkészítésben rajta kívül a csapatvezető és sokan mások is részt vettek. A versenyzők további tanárainak felsorolásában a tanárok neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik: *Nikházy László* (BCs, GyP, NN, TB, WMB); *Gyenes Zoltán* és *dr. Kiss Géza* (KA, NN, TB); *Pósa Lajos, Szmerka Gergely, Szűcs Gábor* és *Varga Mária* (BCs, GyP); *Kovács Benedek* (BCs); *Tassy Gergely* (GyP); *Schultz János* és *Tigyi István* (WMB); *Árki Tamás, Fekete Panna* és *Szilágyi Dániel* (KA).

Köszönöm a helyettes csapatvezető és a hivatalos megfigyelők munkáját. Köszönöm a Rényi Intézet vezetőinek és dolgozóinak támogatását, továbbá *Niko Laaksonen* vizsgabiztos lelkiismeretes munkáját.

Kiemelt köszönet illeti az előző három évtized legendás magyar csapatvezetőjét, *Pelikán Józsefet* odaaadó munkájáért.

Ezen a virtuális olimpián is voltak matematikai és kulturális-turisztikai jellegű kísérő programok is, így híres matematikusok előadásai (a Fields-érmes *Timothy Gowers* is tartott ilyet) és virtuális városnéző séták Szentpéterváron. A teljes program megtalálható a `https://imo2020.ru/` honlapon.

A következő, 2021. évi matematikai diákolimpiát is Oroszország rendezi, a járványhelyzet alakulásától függően vagy ismét virtuálisan, vagy személyes jelenléttel Szentpéterváron.

Frenkel Péter

A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek:

$$PAD\sphericalangle : PBA\sphericalangle : DPA\sphericalangle = 1 : 2 : 3 = CBP\sphericalangle : BAP\sphericalangle : BPC\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $ADP\sphericalangle$ és a $PCB\sphericalangle$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.

2. feladat. Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ és $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

3. feladat. Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

Második nap

4. feladat. Adott egy $n > 1$ egész szám. Egy hegynek egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban fekvő állomásra lehet eljutni (közbülső megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek a feltételek teljesülnek B-re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság *összeköt* két állomást, ha a lejjebbi állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között).

Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két olyan állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

5. feladat. Adott egy kártyapakli, amely $n > 1$ kártyából áll. Mindegyik kártyára egy pozitív egész szám van felírva. A pakli olyan, hogy bármely két kártyán lévő szám számtani közepe egyúttal a mértani közepe is néhány (egy vagy több) kártyán lévő számnak.

Milyen n-ekre következik ebből, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők?

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c pozitív konstans, amellyel igaz a következő állítás:

*Az olimpia honlapja: `https://www.imo2019.uk/`.

Tekintsünk egy $n>1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes *szétválasztja* pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)

Megjegyzés. Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha>1/3$ konstans értékétől függően.

Egy különös életút, Ramanujan I. rész

Az előadás címe: „Egy különös életút, Ramanujan".* Kifejezőbb lett volna: „Egy romantikus életút, Ramanujan". A jelenlevő hallgatóságnak vannak már matematikai ismeretei, matematikusok közül is soknak nevéről hallott, életéről is tud valamit, az azonban talányosnak tűnhet, hogyan lehet egyáltalán egy matematikus alakját, életútját romantikusnak nevezni? Pedig *Geoffrey Harold Hardy,* a cambridge-i egyetem világhírű professzora, 100 év óta az első angol matematikus, akinek összegyűjtött munkáit hét vaskos kötetben kiadták halála után, 1936-ban az USA-beli Harvard-egyetemen Ramanujan-ról tartott előadássorozatát a következő szavakkal kezdte (magyar fordításban): „Ezen előadásokban olyan nehéz feladat elé állítottam magam, melyet – ha a sikertelenség miatt mindjárt az elején keresnék mentségeket – majdnem teljesíthetetlennek kellene minősítenem. Észszerű véleményt kell kialakítanom magamban – és ebben Önöket is segítenem – a jelenkori matematika legromantikusabb alakjáról, amit eddig sohasem tettem; egy olyan emberről, akinek karrierje tele van paradoxiákkal és ellentmondásokkal, ami megcsúfol minden olyan kánont, amellyel mi (matematikusok) egymást meg szoktuk ítélni, és akiről, azt hiszem, csak egyetlen dologban fogunk egyetérteni, hogy bizonyos értelemben nagyon nagy matematikus volt."

Nagy szavak. Már eleve elcsodálkoztatók két ellentétes okból. Matematikusok, olyan rendűek, mint Hardy, általában eredeti matematikai tartalmú értekezések, pláne könyvek írását ambicionálják; Hardy a Ramanujanról szóló 12 előadását könyv alakban adta ki 1940-ben, melynek címe „Ramanujan". Másrészt azonban mit jelent az a rezerváció, hogy csak „*bizonyos értelemben* nagyon nagy"?

Srinivasa Ramanujan 1887 decemberében született Indiában, egy Madrászhoz közeli kisvárosban nagyon szegény, vallásos brahmin családban. Apja egy ruhakereskedőnél volt könyvelőféle. 5 éves korában kezdett iskolába járni; matematikai képességei 10 éves korában kezdtek mutatkozni. Ekkor még jó vizsgái miatt féltandíjmentes lett, és számtantanára, akinek az órarendet kellett volna összeállítania,

*Ez a cikk az 1976-ban megtartott, azonos című TIT-előadás szövege. A KöMaL 1977. októberi számában jelent meg először. Később a Nagy pillanatok a matematika történetében c. könyvben volt olvasható. Az előadás anyagát T. Sós Vera egyetemi docens rendezte sajtó alá. (Szerk.)

azt rá bízhatta; mindenki, aki ezt valaha próbálta, tudja, milyen kellemetlen feladat ez, még ha akkor és ott a mellékfeltételek nem is voltak olyan számosak, mint manapság. Hindu életrajzírói szerint 13 éves volt, mikor trigonometriát tanulva rájött az $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ Euler-relációra és nagyon csalódott volt, mikor megtudta, hogy ez már régen ismert. Könyvei nem voltak; 16 éves volt, mikor az első matematikakönyvet kapta kölcsön egy barátjától. Ez egy *Carr* nevű tanár „Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics" c. könyve volt. Ez Ramanujanra végleges hatással volt, igen jó és igen rossz hatással. Jó hatással, mert felfedeztette vele a „szép formula" gyönyörűségét; erre még majd később részletesebben visszatérek. Rossz hatással volt a könyv synopsis (összefoglalás) jellege miatt; bizonyítások a könyvben nemigen voltak, és ha igen, csak nagyon vázlatosak, és ebből a fiatalember – mondhatni, egy életre – azt a konklúziót vonta le, hogy a bizonyítás leírása, még a jelzése is felesleges, valamiféle intuíció egy villanása azt számára evidenciába tudta helyezni. Persze külső kérdésekre, hogy hogyan jött rá eredményeire, nem tudott válaszolni, és ezt *nem* módszereinek eltitkolására tette. Egy barátja szerint, aki velük egy házban lakott ebben az időben, gyakran felébredt éjjel 2 óra tájt, odament az odakészített táblához és egy viharlámpa halvány fényénél írt rá. Mikor kérdezték, mit csinál, azt felelte, hogy álmában rájött valamire, és azt rögzíti, hogy el ne felejtse reggelre. 16 évesen ösztöndíjjal bekerült egy jó college-ba, melyet Dél-India Cambridge-ének neveztek. Itt angolt, matematikát, biológiát, görögöt, szanszkritot és római történelmet kellett volna tanulnia, de akkor már mint a szép formula megszállottja, elkezdte írni napi felfedezéseit naplójába, mint *Gauss* (akiről nem is hallott akkor egyáltalán), és ezek sodrában nem tudott a többi tárggyal foglalkozni, megbukott és persze elvesztette ösztöndíját. Ez 1904-ben volt, újra beiratkozva 1905-ben annyit mulasztott, hogy nem is mehetett vizsgázni. 1906-ban egy másik college-ban próbálkozott, de megbetegedett és itt sem tudott továbbjutni. 1907-ben az eredeti college-ában mint magántanuló próbálkozott, és akkor is megbukott. Mit tehetett akkor egy hindu fiatalember, akinek apja havi 20 rúpiás fizetéséből tartotta el családját? Részint matematikát korrepetált, részint 1909-ben megnősült; felesége akkor 9 éves volt. Az ilyen házasság Indiában gyakori és inkább az itteni eljegyzéshez hasonlítható; férjéhez csak 12 éves korában költözött, ami Keleten persze mást jelent, mint Európában. Naplója közben egyre nőtt; első naplókönyve (a három közül) 300 sűrűn teleírt oldalából kb. a fele származhatott diákkorából. 1911-ben jelentek meg első dolgozatai az Indian Mathematical Journal-ben, de ezekből akkor sem Indiában, sem sehol a világon nem lehetett megélni, feleséget és szülőket támogatni. 1912-ben tisztviselői állást kapott havi 20 rúpiás fizetéssel, amit hamarosan felcserélhetett egy havi 30 rúpiással, ami akkor kb. évi 30 fontnak felelt meg.

Felmerül a kérdés, miért nem ismerték fel már addigi dolgozataiból Indiában, hazájában képességeit, ahol *voltak* egyetemek, volt már Matematikai Társulat és angliai végzettségű professzorok? Indiai matematikusok újra és újra felteszik maguknak a kérdést, miért kellett akkori elnyomóiknak, az angoloknak felfedezni azokat és később elősegíteni kifejlődésüket. Erre a válasz *egyrészt* az, hogy eredményei megelőzték az ún. moduláris formák elméletét, melyből kész elmélet csak 15 évvel később lett *Hecke* kezében (aki nem is tudott Ramanujan ez irányú eredményeiről), tehát részben olyan témakörökre vonatkoztak, amelyeket akkor sehol

– és így Indiában sem – műveltek. Átlagos képzettségű és képességű professzoroktól nem volt várható, hogy ebbe könnyen bele tudják magukat élni. Különösen akkor – és ez a válasz *másrészt* –, ha hozzávesszük, hogy Ramanujan exponáló (közlő) képessége még a 0-val lehetett egyenlő. Jellemző erre az a történet, amelyet egy osztálytársa mesélt egy college-beli matematikaóráról. A tanár egy feladatot kezdett kidolgozni a táblán. Az első két lépés után Ramanujan közbeszólt, hogy ezek feleslegesek és gondolkozás nélkül megmondta a megoldást. Utána a tanár hitetlenül folytatta a táblán a feladat megoldását és 8 vagy 10 további lépés után jutott – az osztály nagy csodálkozására – a Ramanujan által előre jelzett eredményhez. Kevés képzett, idősebb matematikusnak van kedve arra, hogy számára új témakörökben 8-10 lépéses ugrásokat maga tudjon a helyszínen (vagy akár nyugodtan töprengve íróasztala mellett) kisütni. És más ilyen történetekből láthatóan Ramanujan nem nagyon volt hajlandó a hiányzó lépéseket mint teljesen triviálisakat (neki triviálisakat) részletezni. A visszhangtalanság okául el lehetne képzelni, hogy túl büszke volt ahhoz, hogy maga keresse a kapcsolatot a matematikusokkal, hogy Mohamed menjen a hegyhez. De egy barátja szerint távolról sem ez volt a helyzet. 1910-től – mint mondja – Ramanujan egyik matematikustól a másikhoz ment bemutatván (ekkor már két) matematikai naplóját, majdnem 0 hatásfokkal.

Így fokozatosan belátván, hogy odahaza semmit sem remélhet, elszánta magát barátai rábeszélésére, hogy írjon Hardynak.

1913. január 16-os dátum van a levélen. Furcsa egy bemutatkozó levél volt, melyet csak kevéssé enyhít az, hogy nem tudván eléggé angolul, azt minden bizonnyal nem matematikus barátai fordították le, akik valószínűleg maguk sem nagyon uralták a nyelvet. De érdemes elgondolkodni felette, mert a számelmélet egy döntő fordulata múlott rajta, illetve kezdődött vele. Nem meditálva azon, hogy így kezdi: „A madrászi Port Trust Office tisztviselője vagyok, csupán évi 20 font fizetéssel” és azon sem, hogy miért írja utána, „I am about 23 years of age”, mikor már 25 is elmúlt a levél írásakor, így folytatja (fordításban). „Elhagyva az iskolát, szabad időmben matematikával foglalkoztam. Nem jártam a szokásos úton, melyet egyetemi előadásokban követnek, új utat törtem magamnak.” (Ismerős szavak ezek magyar füleknek.) Majd tovább: „Eredményeimet a helyi matematikusok bámulatosnak nevezik”, de a következő mondatban ezt írja: „A helyi matematikusok nem tudnak megérteni engem magasabb szárnyalásomban” (in my higher flights). Leveléhez mellékelt naplójából összeválogatott 120 identitást. Majd befejezésül, mintegy az ellenkező végletbe esve írja; „Szegény lévén, ha úgy látja, hogy tételeimben van valami érték, szeretném azokat publikálni.”

Mindenkiben felötlik, hogyan reagálna ő egy ilyen levélre; érdekesebb látni, hogyan reagált a cambridge-i egyetem akkor már világszerte ismert lecturerje (még nem volt professzor) az angol világbirodalom fénykora idején egy félművelt hindu fiatalember fent vázolt levelére. Erről tudunk *C. P. Snow* professzornak a kiváló fizikus, író és kultúrfilozófusnak, Hardy régi barátjának és akkori cambridge-i kollégájának rektori székfoglalójából 1962-ből, 15 évvel Hardy halála után; de Hardy maga is ír erről 1936-os harvardi előadásában. A kettő alapállása némileg különböző; bizonyos vonatkozásokban Snow verziója az emberibb. Eszerint az első lap elolvasása után Hardy a levél íróját félbolondnak tartotta, utána következő megjegyzését pontos prímszámformuláról hihetetlennek. A mellékletben küldött 120 identitás közül felületes átvizsgálásra egyesek rögtön feltűntek neki érdekes voltukkal, de a bizonyítások legcsekélyebb jelzésének hiánya bizalmatlanná tette. Az egész dolog nem tetszett neki, nyugodtan folytatta reggeli újságját, megtartotta óráját, délutáni teniszpartiját; de este magával vitte a levelet szokásos beszélgetésére *Littlewood*-dal, akivel való tartós kollaborálása már 1912-ben megkezdődött és haláláig, 1947-ig tartott. Ekkor alaposabban megnézték a matematikai mellékletet. Identitásaiból kettő olyan merőben újszerű *jellegű* volt, hogy ez meggyőzte őket, hogy jelentős emberrel van dolguk.

Hardy igen gyorsan, február 8-án már válaszolt, pozitívan a jóról, nem szólva a valószínűtlenről, csupán a bizonyítások valamelyes jelzését hiányolva. Ramanujan is rögtön válaszolt február 27-én. Ebben kifejezte örömét, hogy végre talált valakit, aki értően méltányolja matematikáját és őszintén feltárta tragikus anyagi helyzetét: „... Hogy megőrizzem agyamat, ennivaló kell nekem és ez most a legfőbb gondom. Minden ilyen levél öntől segíthet abban, hogy az egyetemtől vagy a kormánytól ösztöndíjat kapjak ... " Megindító viszont Hardy válasza március 26-án. Nem ismervén Ramanujan munkastílusát, mely az igazi oka volt annak, hogy nem írt bizonyításokat tételeihez, azt hitte, hogy bizalmatlanság ennek az oka. Hogy ezt eloszlassa, felsorolta, ki mindenkinek mutatta ő már meg Ramanujan leveleit és így, ha ő illegitim módon akarná az azokban említett eredményeit felhasználni, Ramanujannak könnyű dolga volna őt leleplezni. És a finom folytatás: „... Ne haragudjon, hogy a dolgot ilyen szókimondóan tárgyalom. Nem tenném, ha nem törekednék arra, hogy Ön nyilvánvaló matematikai képességei kifejlesztésére jobb lehetőségeket kapjon ... " Ramanujan már április 17-én válaszol. Ebben egyrészt közli, hogy egy *dr. Walker* nevű meteorológus intervenciójára a madrászi egyetemtől két évre évi 60 font ösztöndíjat kapott (már ebben is benne volt Hardy keze). Másrészt írja, hogy nem bizalmatlanság miatt nem ír bizonyításokat, hanem mert bár eredményei helyességében nem kételkedik, de azon utat, melyen ő ezekre rájött, maga is heurisztikusnak érzi. Mindenesetre május 1-jét indirekte megünnepelte azzal, hogy tisztviselői állását felmondta.

A levelezésből Hardy előtt világos lett, hogy Ramanujan Indiában maradva sohasem fogja tudni kipótolni alaphiányosságait. Első ez irányú célzására szülei tilalmára Ramanujan nemmel válaszolt; ettől a szülők csak valamilyen megrendezett vallási hókuszpókusz után álltak el. Ismét angol kezdeményezésre a madrászi egyetem két évre kiküldte Cambridge-be évi 250 font ösztöndíjjal, útiköltséggel, sőt még ruhatára európaiasítására is kapott pénzt. Még arról is gondoskodtak, hogy a hajón szigorúan vegetáriánus kosztot kapjon, melyhez ragaszkodott egész életében. Miután gondoskodott arról, hogy ösztöndíjából szülei havi 60 rúpiát kapjanak, 1914. március 30-án elindult hajón Angliába; Cambridge-be április 16-án érkezett.

Az európai életmódot hamar megszokta, ha pl. az európai cipőviselést 27 éves korban elkezdeni nem is lehetett nagyon könnyű. A Trinity College-ban lakott, európai kényelemben egyedül, maga főzte egyszerű, szigorúan vegetáriánus kosztját. Ezenfelül idejét egyes előadások látogatása, munkája és a Hardy-val való eszmecsere töltötte ki. A kiváló cambridge-i matematikus, *A. Berry* mesélte jóval később, hogy egy óráján egy formula levezetésén bajlódott. Közben mindig figyelte Ramanujan arcát, aki nyugodtan ült. Egyszer látja, hogy Ramanujan arca felragyog, és nagyon izgatottan izeg-mozog. Mikor megkérdezte, volna-e valami megjegyzése, Ramanujan felkelt és felírt a táblára egy formulát, melyet Berry a történet elmondásának időpontjában sem tudott még bebizonyítani. De a leglényegesebb volt a cambridge-i matematikusokkal való találkozása, akiknek a száma azonban a hamarosan megkezdődött első világháború miatt lényegileg Hardyra redukálódott.

Együtt volt hát minden, ami a nyugodt, koncentrált munkához kellett. Hardy a mindennapos személyi találkozás után hamarosan rájött arra, hogy Ramanujanban sokkal nagyobb kincset nyert, mint valaha is gondolta volna az előzmények után. Hardy sportos alapállású volt, szeretett mindent versenyszerűen tekinteni és azután pontozni. Jóval Ramanujan halála után, még a 20-as években, egy alkalommal a jelen századbeli matematikusok pontozására került sor. 100 pont lévén a maxiumum, Ramanujan kapott tőle 100 pontot, Hilbert 80-at, Littlewood 30-at, a többiek még kevesebbet, mondja a történet. Az abszurdnak ható osztályozás azonban bizonyos mértékben érthető. Hardy elragadtatásának oka nemcsak az volt, hogy majdnem minden nap féltucatnyi új eredményt közölt vele Ramanujan; maga a szám nem jelent túl sokat. Inkább azok fantáziát mutató jellege, váratlan volta, az a könnyedség, ahogy ezek szinte folytak gondolkozásmódjából anélkül, hogy valóban számot tudott volna adni, hogyan jött rájuk; ez ragadta meg Hardyt. Másrészt a gyors próbálgatásainak sikertelensége megoldásukra, ezek meggyőzték őt arról, hogy az állítások nem felszínen mozgók. Ezen tételek másfajta, eddig számára ismeretlen matematikai *gondolkozásmódot* fedtek fel előtte. Az az eredetiség, az a globálisnak nevezhető látásmód, mely annyira különbözött minden más, általa ismert matematikusétól, nyűgözte le. Hardy könyvében erősen hadakozik az ellen, hogy Ramanujan képességeit, eredeti látásmódját valamiféle keleti misztikus filozófia alakította ki. Magam is ismerek olyan fiatal magyar matematikust, akinek keleti filozófiák tanulmányozása nélkül minden bizonnyal ilyen globális látásmódja van, de rendszeres matematikai előképzettséggel rendelkezvén, utólag ki tudja analizálni ugrásait és szokásos lépésekre bontani.

Hardy határtalan lelkesedése vitte keresztül, hogy Ramanujan 1918 májusában középiskolai végzettség nélkül Fellow of the Royal Society lett, ami a mi akadémiai tagságunknak felel meg, és amely megtiszteltetés hindut előtte csak egy nem matematikust ért. 1919. október 18-án elsőként a híres Trinity College fellow-jává választották, ami 6 évre évi 250 fontos fizetést jelentett, minden kötelezettség nélkül. Illetőleg jelentett *volna,* ha nem kapott volna már 1917 márciusában a feszített munka, a gyenge táplálkozás és az angol éghajlat miatt tüdővészt, amely miatt végül is már 1919. február 27-én haza kellett utaznia. Hardy ajánlására a madrászi egyetem is megszavazott neki évi 250 fontot 5 évre és arra is lépések történtek, hogy számára egy professzori állást létesítsenek. Még egy rövid levelet tudott írni 1920 januárjában Hardynak, mely matematikával foglalkozott, de ugyanezen év április 26-án a tüdővész legyűrte. Nem volt tehát 33 éves sem, mikor meghalt, pedig talán éppen ez a matematikus legjobb kora. Szülei, nagyanyja, 20 éves felesége gyászolta; emlékét – *Watson* becslése szerint – vagy 3-4 ezer tétel őrzi.

Hogy Ramanujan angliai útjával Hardy mit nyert, már sejtjük, és hogy a matematika mit nyert, tudjuk. Mit nyert Ramanujan a jóval kedvezőbb munkakörülményeken és a tüdővészen felül? Indiai barátainak írott levelei felelnek erre. Már 1914 októberében írja, hogy egyelőre félreteszi régi eredményeit és mivel egyet s mást már tanult az itteni módszerekből, először ezek alkalmazásába akar belejönni. 1915. januárban már belátja, hogy naplójában levő tételeire még nincs szigorú bizonyítása. Ezért júliusban már azt írta, hogy pár évvel tovább kell Cambridge-ben maradnia, mert Madrászban sem segítséget, sem irodalmi referenciákat munkájához nem tudna kapni senkitől. Hardy maga is ír kölcsönhatásukról. Ramanujan kezdeti matematikatudási állapotát finoman úgy fejezte ki, hogy „tudásának korlátjai ugyanolyan meglepőek voltak, mint eredményeinek mélysége". Mint írja tovább, „(érkezésekor) fogalmai arról, hogy mi egy matematikai bizonyítás, a lehető leghomályosabbak voltak", ugyanakkor, mikor pl. az ún. lánctörtek nehéz elméletének már felülmúlhatatlan mestere volt. Pár év alatt végül is maga meg tudta mondani, hogy valamit be tud-e bizonyítani vagy nem. Hardy tudta azt, amit Mikszáth hályogoperáló kovácsa nem tudott, hogy szolid matematikai megalapozás elvehetné Ramanujan intuícióját. Így csak olyan dolgokra tanította, melyek nemtudása alapvető hibákra vezethet; de hozzátette, hogy ő sokkal többet tanult Ramanujantól. Ez a tanulás nem rontotta el Ramanujan intuícióját.

Mielőtt Ramanujan matematikai munkáinak legalább érzékeltetésére térnék, még egy mozzanatra térnék ki, mely bizonyos mértékben megvilágítja Ramanujan kutatási módszereit és egyben egy további paradoxiát is mutat. Ez pedig Ramanujannak a pozitív egész számokhoz való kapcsolata volt. Valaki úgy fogalmazta meg ezt, hogy Ramanujannak minden egész szám személyes ismerőse. Ha megsejtett egy összefüggést, ezt számpéldákon verifikálva nyert impulzust további meggondolások keresésére. Kifejezetten ezen az úton jutott eredményeihez azon n-számokra vonatkozólag, melyekre

$$d(n) > d(v), \qquad \text{ha} \qquad 1 \leqslant v < n;$$

itt $d(k)$ jelenti a k egész szám pozitív osztói számát. Az ilyen számokat „highly composed numbers"-nak, „nagyon összetett" számoknak nevezve, felírta az első kb. 2000 ilyen számot; az utolsó

$$n = 146\,659\,312\,800 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

volt.

Mikor egyszer Hardyval Londonban taxin mentek, Hardy a taxi távozása után jött rá, hogy aktatáskáját a kocsiban felejtette. Kéziratok lévén a táskában, ez kétségbe ejtette, de Ramanujan megnyugtatta, nincs baj, ő emlékszik, hogy a taxi száma 1729. Hardy nagyon megkönnyebbült, de rögtön megkérdezte, hogy jutott eszébe *egyáltalán* megjegyezni a taxiszámot, és ha már igen, hogyan lehetett egy ilyen érdektelen számot megjegyezni. Nem érdektelen ez a szám, felelte Ramanujan, ez a legkisebb egész szám, amely egynél többféleképp állítható elő két köbszám összegeként. Tényleg:

$$1729 = 1 + 1728 = 1^3 + 12^3 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3.$$

Ezt Ramanujan, mellesleg szólva, nem ott a helyszínen találta, egy korai naplójában megtalálták ezt az észrevételt.

Azt lehetne hinni erről, hogy Ramanujan első érdeklődési területe a számelmélet volt; de a valóság az, hogy angliai útja előtt számelmélettel igen keveset foglalkozott, Carr anyagának hatása miatt. Ha Carr gyűjteménye helyett college-éveiben egy jobb számelméleti bevezető könyv kerül kezébe, biztosan más lett volna alakulása. A számelmélettel *igazán* csak Angliában került kapcsolatba. Azt is lehetne hinni az előbbiek után, hogy gyors és jó számoló volt. Ez sem igaz. Hardy megfigyelte, hogy úgy ad össze és szoroz, mint akárki az iskolában, és mikor egyszer tényleges számolásra került sor, nála jóval gyorsabbnak mutatkozott a matematika egy másik különös alakja, *Mac Mahon* őrnagy.

Turán Pál

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Mely x valós számokra értelmezhető az

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x-3}}{\log_2(x-2)}}$$

függvény? (*5 pont*)

b) Adjunk meg legalább két olyan valós számot, amelyekkel a

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+7}$$

és a

$$16^x\cdot 8^{2x}\cdot 4^{6x}\cdot\sqrt{2}=64$$

egyenletek valós gyökei valamilyen sorrendben egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai lehetnek. (*6 pont*)

2. Az Agatha Christie műveiből készült Poirot-novellák című tv-sorozat „A csokoládésdoboz" című epizódjának egyik jelenetében két szereplő, egy férfi és egy nő, egy operaelőadás hallgatása közben egy doboz belga csokoládét kóstolgatott. A dobozt a jelenet kezdetén bontották fel, és a dobozban kezdetben 7-féle csokoládéfigura volt, mindegyikből 4 darab az *ábra* szerint.

A női szereplő kedvence a korona alakú csokoládé. Kóstolgatás közben az udvariasság szabályai szerint mindig a hölgy választ először, aztán a férfi, majd újra a hölgy, aztán a férfi és így tovább. A férfi tudja, hogy a hölgy kedvence a koronás csokoládé, ezért ő sosem választ magának ilyet. Ezek figyelembevételével először elfogyasztanak 7 csokoládét, mindegyik fajtából egyet-egyet, mégpedig úgy, hogy a hölgy először a kedvencéből választ.

a) Hányféle sorrendben fogyaszthatnák el a 7 csokoládét? (*6 pont*)

b) Ha a megmaradt 21 csokoládéból a hölgy egyesével, véletlenszerűen és visszatevés nélkül kiválasztana 6 darabot, akkor mennyi lenne a valószínűsége, hogy azok között legalább 2 koronás csokoládét talál? (*6 pont*)

3. Anna és Boglárka unokatestvérek, az egyik megyeszékhely különböző iskoláiba járnak. Anna kilenc évvel idősebb Boglárkánál. Jelöljük Anna jelenlegi életkorát A-val, Boglárka jelenlegi életkorát B-vel (A és B pozitív egész számok).

a) Lehetséges-e, hogy n (n pozitív egész) év múlva Anna éppen háromszor olyan idős lesz, mint Boglárka? Hány év múlva fordulhat elő, hogy Anna kétszer olyan idős lesz, mint Boglárka? (Válaszunkat indokoljuk.) (*4 pont*)

Anna és Boglárka is nagyon ügyesek matematikából. Órai teljesítményük, eddigi versenyeredményeik alapján a tanáraik benevezték őket egy matematikaversenyre. Anna matematika szakkörön is készül a versenyre. A szakkörre 21 tanuló jár, 9 lány és 12 fiú. A csoport diákjai mindannyian jó képességűek. A tanáruk úgy szeretné összeállítani a versenyre utazó 14 fős csapatot, hogy azon belül a nemek aránya azonos legyen a szakkörön belüli arányukkal.

b) Hányféleképpen állíthatja össze a versenyre utazó csapatot Anna szakkörének tanára? (*3 pont*)

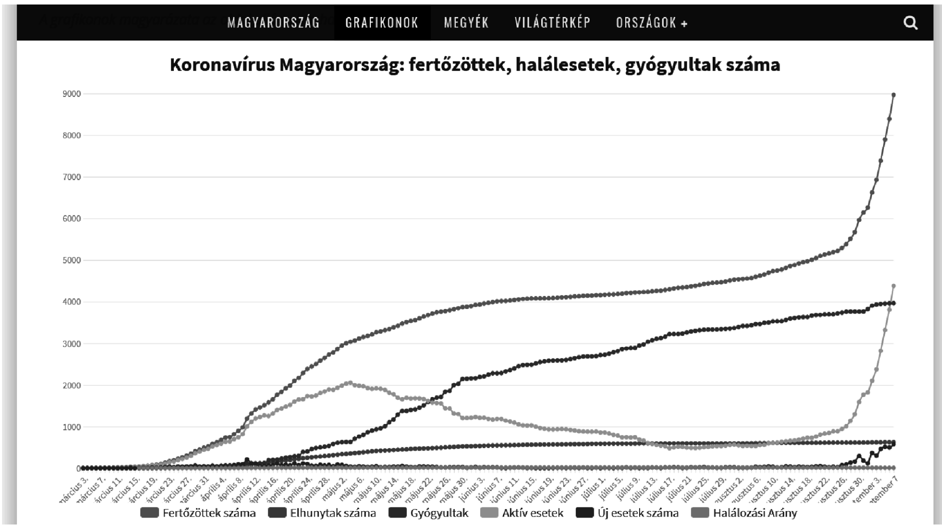
Anna a matematika területein belül legjobban a geometriát szereti. Egyszer rajzolt Boglárkának egy derékszögű trapézt és elmagyarázta unokatestvérének a trapéz tulajdonságait. Anna rajza az $ABCD$ trapéz, amelyben a DA szár merőleges az AB alapra.

c) Lehetséges-e, hogy a CD, DA, AB, BC szakaszok hossza ebben a sorrendben egy mértani sorozat négy szomszédos tagja? (Válaszunkat indokoljuk.) (*7 pont*)

4. A koronavírus 2020. évi elterjedésével kapcsolatos adatokat a *grafikonon* szemlélhetjük (forrás: `pandemia.hu`).

A grafikon egyes adatait táblázatba foglaltuk márciustól szeptemberig minden hónap 6-án.

	Fertőzöttek száma
03.06.	4
04.06.	744
05.06.	
06.06.	3990
07.06.	
08.06.	4597
09.06.	8387



A következő táblázatban két tizedesjegyre kerekítve feltüntettük a magyarországi fertőzöttek számának napi átlagos növekedését az egyes időpontok között eltelt idő alatt (a megjelölt időpontok között eltelt napok számát megállapodás szerint úgy számítjuk, hogy az időintervallum felső időpontjának napját hozzászámítjuk az intervallumhoz, az alsó értéket nem).

03.06.–04.06.	04.06.–05.06.	05.06.–06.06.	06.06.–07.06.	07.06.–08.06.	08.06.–09.06.
	78,9		6,63		

a) Töltsük ki mindkét táblázat hiányzó részeit (egy-egy napon a fertőzöttek száma csak pozitív egész szám lehet, ezért a számítások során a kerekítés szabályainak megfelelően járjunk el). (*4 pont*)

b) Egy n pontú teljes gráf élei közül 21 élet törölve egy fagráfot kapunk. Határozzuk meg n értékét. (*5 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy a $11^n + 60^n \leqslant 61^n$ egyenlőtlenség $n = 1$ kivételével minden pozitív egész számra teljesül. (*5 pont*)

II. rész

5. *a*) Bizonyítsuk be, hogy a $2014 \cdot 2016 \cdot 2024 \cdot 2026 + 100$ négyzetszám és állapítsuk meg, hogy melyik pozitív egész számnak a négyzete. (*4 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a $]11{,}5; \infty[$ számhalmazon értelmezett

$$f(x) = \sqrt{2x + 28 + 10 \cdot \sqrt{2x+3}} - \sqrt{2x + 28 - 10 \cdot \sqrt{2x+3}}$$

függvény értéke állandó. Határozzuk meg ezt az állandó értéket. (*5 pont*) *c*) Hány valós megoldása van a

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{5}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$$

egyenletnek a $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ számhalmazon? Adjuk meg a feltételeknek megfelelő összes megoldást. (*7 pont*)

6. Az AB szakasz felezőpontja O, az A ponthoz közelebbi negyedelőpontja C, a B ponthoz közelebbi negyedelőpontja D. A C, O, D pontokban az AB szakaszra rajzolt merőlegesek az AB átmérőjű félkört rendre a P, Q, R pontokban metszik.

a) Határozzuk meg a BQP és BRQ háromszögek szögeit. (*8 pont*)

b) Hány százaléka a $BRQP$ négyszög területe az ABP háromszög területének? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.) (*8 pont*)

7. Hány olyan p pozitív prímszám van, amelyre nem igaz, hogy a

$$(p-2) \cdot x^2 + (2p+3) \cdot x + p^2 - 1 = 0$$

egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van? (*16 pont*)

8. Egy kocka minden élének hossza n, ahol n pozitív egész szám. A kocka minden lapját fehérre festjük, majd a kockát a lapjaival párhuzamos síkok mentén n^3 darab egységnyi élű kockára daraboljuk.

a) Hányszorosa a kis kockák felszínének összege az eredeti kocka felszínének? (*2 pont*)

Ezután az összes kis kocka lapjait megszámozzuk a következő szabály szerint: először azoknak a kis kockáknak a 6-6 lapját számozzuk meg a pozitív egész számokkal 1-től kiindulva, amelyeknek egyetlen lapja sem fehér, ezután a számozást folytatjuk azon kis kockák lapjaival, amelynek egy oldala fehér, utána a két fehér lappal rendelkező kis kockák következnek, végül azok a kis kockák, amelyeknek három lapja fehér. Ezzel az eljárással elérjük, hogy minden kis kocka minden lapján szerepel egy-egy pozitív egész szám és ezek a számok mind különbözők.

b) Legalább mekkora az n szám, ha biztosan tudjuk, hogy a 2020 szám olyan kis kockára kerül, amelynek nincs fehérre festett lapja? (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a pozitív egész n számot, ha a fenti számozással a 4326 szám az utolsó olyan kis kocka utoljára megszámozott egyik lapjára kerül, amelynek pontosan két lapja fehér. (*6 pont*)

d) Az n^3 számú kis kockából véletlenszerűen kiválasztunk egy darabot. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott kis kockának legalább az egyik lapja fehér, ha $n = 8$? (*4 pont*)

9. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;-2)$, $B(6;10)$, $C(-3;1)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy az ABC derékszögű háromszög. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az $y = -x^2 + 8x - 10$ egyenletű parabolának a BC oldal egyenesével nincs közös pontja, de az AB oldal egyenesével két közös pontja is van.

Határozzuk meg az AB oldal egyenese és az $y=-x^2+8x-10$ egyenletű parabola metszéspontjainak koordinátáit. (*5 pont*)

c) Számítsuk ki, hogy az ABC háromszög területének hányadrészét fedik le azok a pontok, amelyekre $y \leqslant -x^2+8x-10$ teljesül. (*8 pont*)

Bíró Bálint
Eger

Megoldásvázlatok a 2020/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Melyek azok az x, y egész számok, amelyekre egyszerre teljesül, hogy:*

a) $x^2+y^2 \leqslant 25$;

b) $|x|+|y| \geqslant 5$;

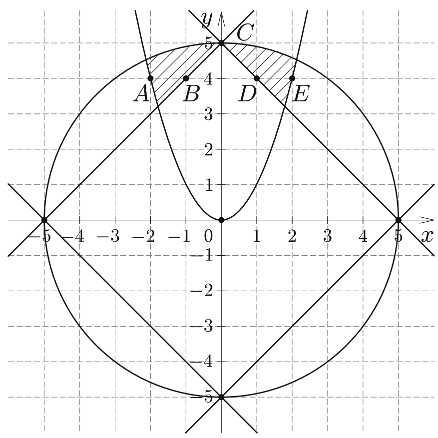
c) $\log_2(y+1-x^2) \geqslant 0$? (*12 pont*)

Megoldás. Az *a*) feltételnek megfelelő valós számpárok halmaza a koordinátarendszerben egy origó középpontú, 5 egység sugarú zárt körlemezzel szemléltethető.

b) Itt a négy negyedben az alábbiak szerint alakulnak a halmazok:

ha	$x \geqslant 0$ és $y \geqslant 0$,	akkor $y \geqslant -x+5$;
ha	$x \leqslant 0$ és $y \geqslant 0$,	akkor $y \geqslant x+5$;
ha	$x \leqslant 0$ és $y \leqslant 0$,	akkor $y \leqslant -x-5$;
ha	$x \geqslant 0$ és $y \leqslant 0$,	akkor $y \leqslant x-5$.

c) $\log_2(y+1-x^2) \geqslant 0$, $\log_2(y+1-x^2) \geqslant \log_2 1 \Rightarrow$ (mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növő) $y+1-x^2 \geqslant 1$, tehát $y \geqslant x^2$ (a normálparabola és belső pontjai). (Ekkor $y+1-x^2>0$, tehát a logaritmus értelmezett.)



Ha mindezeket, továbbá azt is figyelembe vesszük, hogy egész számokat keresünk, akkor a vonalkázott tartományban, illetve a határán levő rácspontok koordinátáit kapjuk.

A megoldások:

$A(-2;4)$	$x_1=-2$;	$y_1=4$;
$B(-1;4)$	$x_2=-1$;	$y_2=4$;
$C(0;5)$	$x_3=0$;	$y_3=5$;
$D(1;4)$	$x_4=1$;	$y_4=4$;
$E(2;4)$	$x_5=2$;	$y_5=4$.

2. *a) Az egyszerű hétpontú gráf csúcsainak foka rendre* $3, 2, 4, 1, 2$; *a másik kettőt nem ismerjük. Állapítsuk meg ezeket, ha a gráfnak* 11 *éle van, valamint a gráf megrajzolható egy folytonos vonallal úgy, hogy mindegyik élén pontosan egyszer haladtunk át.*

b) Adjunk meg három különböző irracionális számot úgy, hogy a három szám összege és bármelyik kettő szorzata is racionális szám legyen.

c) Mutassuk meg, hogy az A *és* B *kijelentések tetszőleges logikai értékére igaz a* $\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$ *egyenlőség.* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyszerű gráf csúcsai fokainak összege az élek számának kétszerese, ezért az ismeretlen fokszámok összege 10. A hétpontú gráf csúcsának foka legfeljebb 6 lehet, így a két fokszám 5, 5 vagy 4, 6. Az utolsó feltétel miatt a megoldás 4, 6, mert a másik esetben négy páratlan foka volna a gráfnak, ekkor azonban nem lenne nyitott Euler-vonala. Mivel ekkor van 6-odfokú csúcs, így a gráf összefüggő is, és ezért van nyitott Euler-vonala.

b) Pl.: $i_1 = \sqrt{2}$,$i_2 = 2\sqrt{2}$, $i_3 = -3\sqrt{2}$. A számok irracionálisak és különbözőek.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad i_1 \cdot i_2 = 4; \quad i_1 \cdot i_3 = -6; \quad i_2 \cdot i_3 = -12.$$

c) *I. megoldás.* Készítsük el az igazságtáblázatot:

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$A \wedge \neg B$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	h
h	h	i	h	h

Az utolsó két oszlopban rendre ugyanazok a logikai értékek vannak, tehát a két kifejezés egyenlő.

II. megoldás. Ismert az $A \to B = \neg A \vee B$ azonosság. $\neg(A \to B) = \neg(\neg A \vee B)$, most alkalmazzuk a De-Morgan azonosságot: $\neg(\neg A \vee B) = \neg\neg A \wedge \neg B = A \wedge \neg B$.

3. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

egyenletet. (*13 pont*)

Megoldás. Kikötés: $\cos(2x) \neq 0$; alakítsuk az egyenlet jobb oldalát:

$$\sin x + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x};$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos x - \sin x,$$

(itt egy újabb feltétel adódott: $\cos x \geqslant \sin x$),

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \cos x - \sin x, \quad 1 + \sin(2x) = \cos x - \sin x.$$

Emeljünk négyzetre:

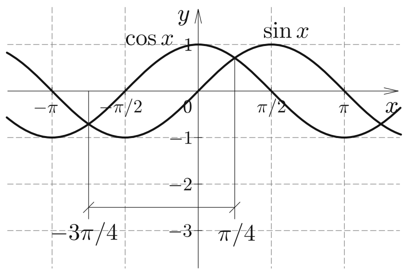
$$1 + 2\sin(2x) + \sin^2(2x) = 1 - \sin(2x),$$

$$\sin^2(2x) + 3\sin(2x) = 0,$$

$$\sin(2x)\big[\sin(2x) + 3\big] = 0,$$

ahonnan $\sin(2x) = 0$, vagy $\sin(2x) + 3 = 0$. Ez utóbbi lehetetlen, így $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. A $\cos\left(2 \cdot \frac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ feltételnek megfelelnek a gyökök, mert a bal oldal értéke 1, vagy -1, attól függően, hogy k páros, vagy páratlan.

A $\cos x \geqslant \sin x$ egyenlőtlenség megoldását a függvények grafikonjainak ismeretében leolvassuk:



Ezt figyelembe véve a megoldások: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

(Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk eredményeink helyességéről: az első gyökre $-1 = -1$, a másodikra $1 = 1$ adódik, míg a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$-re, illetve a $(2l+1)\pi$-re $1 = -1$-et kapunk, ezek tehát nem gyökök.)

4. *Két horgászegyesület, az Aligai Pecások és a Bélatelepi Horgászok közös edzőtáborozást tartottak* 47 *fő részvételével. A csapatokban felnőtt és junior korosztályú csoportok voltak. Tudjuk, hogy:*

a) minden csoport létszáma prímszám;

b) legkevesebben a junior Bélatelepi Horgászok, legtöbben a felnőtt Aligai Pecások vannak a táborban;

c) a felnőtt versenyzők összlétszáma osztható tízzel;

d) a két csapat felnőtt tagjainak létszáma között 10*-nél kisebb a különbség.*

Hányan vannak az egyes csoportokban? (*14 pont*)

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: felnőttek A, B; juniorok a, b a csapatok kezdőbetűinek megfelelően. Így felírhatjuk az $A + a + B + b = 47$ egyenletet, ahol az ismeretlenek pozitív prímek. Azonnal láthatjuk, hogy az egyik a 2, hiszen különben az összegnek párosnak kellene lennie. A *b*) feltétel alapján ez a b, vagyis két junior Bélatelepi Horgász van a táborban.

Ezután $A+a+B=45$, $a=45-(A+B)$. A *c*) feltétel szerint $A+B$ osztható 10-zel, így a jobb oldal osztható 5-tel, mivel prím, $a=5$.

$A+B=40$ (itt példát láthatunk a Goldbach-sejtésre, mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként). Több lehetőség is van, ezek: $3+37=11+29=17+23=40$.

A *b*) és *d*) feltételeket figyelembe véve a megoldás: $A=23$; $B=17$; $a=5$; $b=2$.

Az edzőtáborban 23 felnőtt és 5 junior Aligai Pecás, 17 felnőtt és 2 junior Bélatelepi Horgász van.

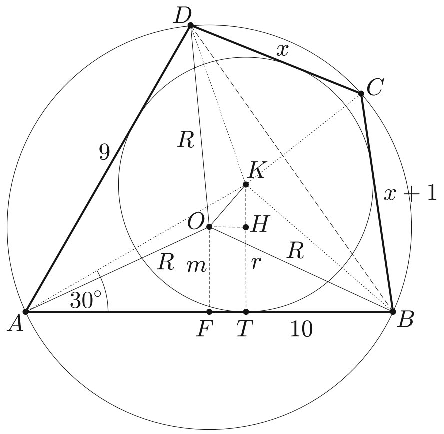
II. rész

5. *Egy húrnégyszög egyúttal érintőnégyszög is (bicentrikus négyszög). Két szomszédos oldala* 9, 10 *egység, az általuk bezárt szög* 60°. *Jelöljük O-val a körülírt, K-val a beírt kör középpontját.*

a) Adjuk meg a másik két oldal hosszát.

b) Határozzuk meg a beírt- és a köréírt kör sugarát.

c) Milyen hosszú a KO távolság? (*16 pont*)



Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseivel az érintőnégyszögre vonatkozó tétel szerint $AB+CD=DA+BC$. Legyen $CD=x$, ekkor $BC=x+1$. Ha a $DAB\sphericalangle=60°$, akkor a húrnégyszögekre igaz tétel miatt $BCD\sphericalangle=120°$.

Írjuk fel a koszinusz-tételt az $ABD\triangle$ BD oldalára:

$$BD^2=9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cdot\frac{1}{2},$$

$$BD^2=91,\quad BD=\sqrt{91}\,;$$

majd írjuk fel a $BCD\triangle$-ben is a BD oldalra:

$$91=x^2+(x+1)^2-2x\cdot(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$91=x^2+x^2+2x+1+x^2+x,$$

$$90=3x^2+3x\ \Rightarrow\ 0=x^2+x-30;$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2}\ \Rightarrow\ x=5;\ \ CD=5,\ \ BC=6.$$

b) Az $ABD\triangle$ körülírt körének – ami egyúttal a négyszögnek is körülírt köre – sugara az ismert tétel szerint:

$$R=\frac{BD}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{91}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{91}{3}}.$$

A négyszög területe:

$$T=\frac{9\cdot 10\cdot \sin 60^\circ}{2}+\frac{5\cdot 6\cdot \sin 120^\circ}{2}=30\sqrt{3}.$$

Használhatjuk Brahmagupta képletét is: $T=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol $s=\frac{a+b+c+d}{2}=15$, tehát $T=\sqrt{5\cdot 6\cdot 9\cdot 10}=\sqrt{2700}=30\sqrt{3}$, vagy pedig a bicentrikus négyszögek területképletét: $T=\sqrt{abcd}$.

A beírt kör sugarát legegyszerűbben az érintősokszögekre érvényes $sr=T$ összefüggés alkalmazásával kaphatjuk meg: $15r=30\sqrt{3}\ \Rightarrow\ r=2\sqrt{3}$.

c) *I. megoldás.* Az ATK derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg} 30^\circ=\frac{AT}{r}\ \Rightarrow\ AT=6$ $\Rightarrow\ OH=FT=AT-AF=1$.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az AFO derékszögű háromszögben:

$$5^2+m^2=R^2\ \Rightarrow\ m^2=\frac{91}{3}-25=\frac{16}{3};\quad m=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3};$$

$$HK=r-m=2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Végül $OK^2=OH^2+HK^2$; $OK^2=1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $OK=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

II. megoldás. Ha már kiszámítottuk a sugarakat, és ismerjük a bicentrikus négyszögek köreinek sugaraira, és e körök középpontjainak távolságára vonatkozó összefüggést, akkor a távolságot innen is megkaphatjuk. Az összefüggés:

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2},$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugara, d a középpontok távolsága.

$$\frac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R-d)^2(R+d)^2}=\frac{1}{r^2};$$

$$\frac{R^2+2Rd+d^2+R^2-2Rd+d^2}{(R^2-d^2)^2}=\frac{1}{r^2};\quad 2r^2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2.$$

Helyettesítsük be a sugarakat:

$$2\left(2\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{91}{3}+d^2\right)=\left(\frac{91}{3}-d^2\right)^2;$$

$$24\left(\frac{91}{3}+d^2\right)=\frac{8281}{9}-\frac{182}{3}d^2+d^4;$$

$$728+24d^2=\frac{8281}{9}-\frac{182}{3}d^2+d^4 \qquad /\cdot 9$$

$$6552+216d^2=8281-546d^2+9d^4;$$

$$0=9d^4-762d^2+1729,$$

$$(d^2)_{1,2}7=\frac{762\pm\sqrt{762^2-36\cdot 1729}}{18}=\frac{762\pm 720}{18},$$

$d_1^2=\frac{1482}{18}=\frac{247}{3} \ \Rightarrow\ d_1=\sqrt{\frac{247}{3}}\approx 9{,}07$, ez azonban nem jó, mert $d<R$.

$d_2^2=\frac{42}{18}=\frac{7}{3} \ \Rightarrow\ d=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$, ami egyezik az első megoldás eredményével.

Megjegyzés: Brahmagupta tételének levezetését több helyen, pl. Dr. Gerőcs László: *Azok a csodálatos húrnégyszögek* című könyvében is megtalálhatjuk. A bicentrikus négyszögekre vonatkozó tétel bizonyítását pl. Nemecskó István: *Bicentrikus négyszögek* (`matematika.elte.hu/wp-content/uploads/2017/03/NemecskoIstvan.pdf`) címen érhetjük el.

6. *a) Vizsgáljuk meg az $a_n=n^3-n^2$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Állításainkat igazoljuk.*

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

(16 pont)

Megoldás. *a)* A sorozat első néhány tagját kiszámolva $0, 4, 18, 48, 100, \ldots$ adódik, amiből a szigorúan monoton növekedés látszik. Igazolnunk kell, hogy $a_n<a_{n+1}$ minden $n\in\mathbb{Z}^+$ esetén, tehát

$$n^3-n^2<(n+1)^3-(n+1)^2; \quad n^3-n^2<n^3+3n^2+3n+1-n^2-2n-1;$$

rendezve: $0<3n^2+n$, ami minden pozitív egészre fennáll. Idáig ekvivalens lépéseken át jutottunk, ezért a kiinduló állítás is igaz.

A sorozat alulról korlátos, negatív tagja nincs, így tetszőleges negatív szám jó alsó korlátnak, felülről nem korlátos, azaz bármely pozitív K-hoz található n_0 küszöbindex, hogy minden $n>n_0$ esetén $a_n>K$ teljesül. (A küszöbindex nem lesz „éles”, ehhez egy harmadfokú egyenletet kellene megoldani.) Tekintsük a $b_n=\frac{n^3}{2}$ sorozatot.

Az $a_n > b_n$; $n^3 - n^2 > \frac{n^3}{2}$; $\frac{n^3}{2} - n^2 > 0$; $\frac{n^2}{2}(n-2) > 0$, minden $n > 2$-re teljesül.

Oldjuk meg a $b_n > K$ egyenlőtlenséget: $\frac{n^3}{2} > K$; $n > \sqrt[3]{2K}$. Mivel $a_n > b_n$, ezért bármely nagy pozitív K-hoz küszöbindexnek választhatjuk a $\sqrt[3]{2K}$ egészrészét. Beláttuk tehát, hogy az a_n sorozat felülről nem korlátos. (Jelölhetjük ezt úgy is, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.)

b) I. megoldás teljes indukcióval. $n = 1$-re igaz, tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, azaz

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

Bizonyítjuk, hogy fennáll $n+1$-re is, vagyis

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12} + (n+1)^3 - (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)\big[(n+1)-1\big]\big[(n+1)+1\big]\big[3(n+1)+2\big]}{12}, \quad / : (n+1); \quad \cdot 12$$

$$n(n-1)(3n+2) + 12(n+1)^2 - 12(n+1) = n(n+2)(3n+5),$$

$$(n^2-n)(3n+2) + 12n^2 + 24n + 12 - 12n - 12 = (n^2+2n)(3n+5),$$

$$3n^3 - 3n^2 + 2n^2 - 2n + 12n^2 + 12n = 3n^3 + 6n^2 + 5n^2 + 10n,$$

$$3n^3 + 11n^2 + 10n = 3n^3 + 11n^2 + 10n,$$

ekvivalens lépéseken keresztül azonosságot kaptunk, tehát a kiinduló egyenlőség is igaz, ezzel a képlet helyességét igazoltuk.

II. megoldás. Ismert, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; illetve $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Ezeket felhasználva

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 + 3n - 4n - 2}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 - n - 2}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)(3n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

7. *Anna és Bálint szabályos dobókockával játszik. Felváltva dobnak, ha a dobott szám prímszám, akkor a számegyenesen álló bábuval egyet jobbra, ha összetett szám, akkor egyet balra lépnek. Ha egyik sem, akkor a bábu helyben marad. A bábu kezdetben a nullán áll, összesen hatszor fognak dobni. Előtte fogadnak arra, hogy a játék végén melyik számon áll majd a bábu. Anna az egyesre, Bálint a kettesre fogad.*

a) *Kinek mekkora esélye van a nyerésre?*

Tegyük fel, hogy Anna nyerte a fogadást.

b) *Mennyi a valószínűsége, hogy a játék során egyszer dobtak egyest?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Prímszámok: 2, 3, 5; összetett számok: 4, 6; egyik sem: 1. Annak esélye, hogy a bábu egy dobás után jobbra lép $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, jelöljük ezt p_{jobbra}-val. Hasonlóképpen: $p_{\text{balra}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $p_{\text{helyben}}=\frac{1}{6}$.

Számítsuk ki Anna nyerési esélyét. Ahhoz, hogy 6 dobás után a bábu az 1-esen álljon, az alábbiak szerint léphetett (tetszőleges sorrendben):

$$\text{jhhhhh; ennek valószínűsége:}\quad 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1}{2592},$$

vagy

$$\text{jjbhhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{60}{2592},$$

vagy

$$\text{jjjbbh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{360}{2592}.$$

Anna nyerési esélye ezek összege: $P(\text{Anna nyert})=\frac{421}{2592}\approx 0{,}1624$.

Hat dobás után a 2-esre a következőképpen kerülhetett a bábu (a lépések sorrendje tetszőleges):

$$\text{jjhhhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjbhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{120}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjjbb; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0=\frac{180}{1728},$$

$$P(\text{Bálint nyert})=\frac{5}{1728}+\frac{120}{1728}+\frac{180}{1728}=\frac{305}{1728}=\approx 0{,}1765.$$

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy Anna nyert; C, hogy egyszer dobtak egyest.

$$P(AC)=\frac{360}{2592};\quad P(A)=\frac{421}{2592},\quad P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{360}{2592}}{\frac{421}{2592}}=\frac{360}{421}\approx 0{,}8551.$$

8. *A 2 egység élű kocka egyik csúcsát jelöljük A-val, majd állítsunk egyenlő hosszú szakaszokat a kocka A-val érintkező lapjainak középpontjába, az adott lapokra merőlegesen kifelé.*

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük P, Q, R-rel.

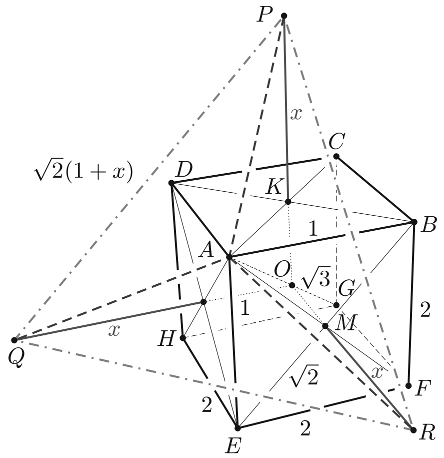
a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az A, P, Q, R pontok egy síkban vannak?

A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

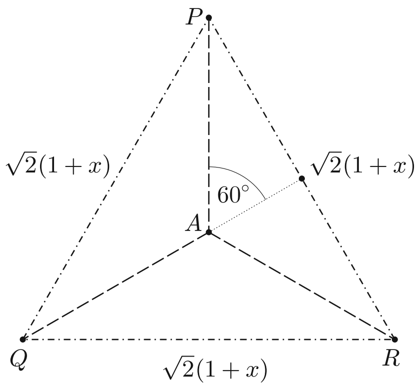
b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?

c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernek 14 csúcsa, 12 lapja és 24 éle lett? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A kocka középpontja O, a felső lapközéppont K. Az $OKA\sphericalangle=90°$, $AOK\sphericalangle=\varphi$. A kocka A-val érintkező lapjainak középpontjai által meghatározott sík merőleges az A-ból induló testátlóra. Ez ugyanaz a sík, mint amit az A-ból induló élek másik végén levő csúcsok határoznak meg, ezek pedig A-val együtt egy szabályos háromszög alapú, egyenlő oldalélű tetraédert alkotnak, amelynek az alaphoz tartozó magasság egyenese AO. Akkor lesz a négy pont egy síkban, ha $PAO\sphericalangle=90°$ (és $QAO\sphericalangle=RAO\sphericalangle=90°$). Ekkor az $AOK\triangle\cong POA\triangle$, mert két szögük ($\varphi$, $90°$) egyenlő, $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{1+x}$, $1+x=3$ $\Rightarrow$ $x=2$. Az A, P, Q, R pontok akkor lesznek egy síkban, ha a merőleges szakaszok hossza 2 egység.



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. A QOP háromszögben O-nál derékszög van, a QO befogó és OP befogó $1+x$, ezért a QP átfogó $\sqrt{2}(1+x)$ (QR, RP hasonlóképpen), $AP = AQ = AR = \sqrt{2+x^2}$ (AKP derékszögű háromszög befogói $\sqrt{2}$ és x, átfogó AP, a másik kettő ugyanígy). Ha a négy pont egy síkban van, akkor a PQR szabályos háromszög körülírt körének középpontja A (mert egyenlő távol van a csúcsoktól), ezért a $PAR\sphericalangle = 120^\circ$. Innen kétféleképpen is befejezhetjük:

1. $$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}(1+x)}{2}}{\sqrt{2+x^2}}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+x^2} = \frac{\sqrt{2}(1+x)}{2};$$

$$3(2+x^2) = 2(1+x)^2;$$

$$6+3x^2 = 2+4x+2x^2; \quad x^2-4x+4=0;$$

$$(x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x=2.$$

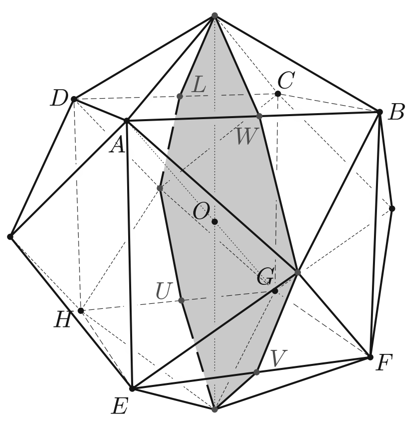
2. Írjuk fel a koszinusz-tételt RP-re:

$$\left[\sqrt{2}(1+x)\right]^2 =$$

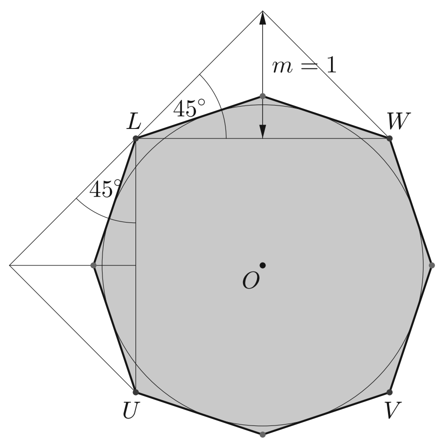
$$= 2+x^2+2+x^2-2(2+x^2)\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$2(1+2x+x^2) = 3x^2+6 \;\Rightarrow\; x=2.$$

b) A kocka körülírt gömbjének sugara $\sqrt{3}$. Ha a gúlák ötödik (a kocka csúcsaitól különböző) csúcsa is ezen a gömbön van, akkor magasságuk $m=\sqrt{3}-1$. Ebben az esetben beírt gömbje is van a testnek, mint az a metszeten látható, mert a magasság kisebb 1-nél. (Akkor nincs beírt gömb, ha a gúlák magassága nagyobb 1-nél, ugyanis ekkor L-nél, U, V, W-nél konkáv szög keletkezik.)



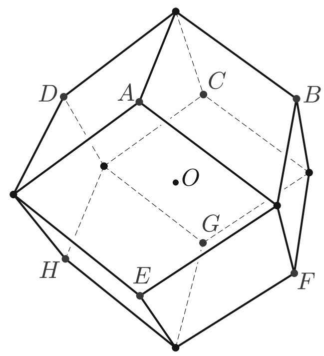
3. ábra



4. ábra

A megoldás tehát: $m=\sqrt{3}-1$.

c) A *3. ábra* szerinti testeknek „általában” 24 lapjuk (14 csúcsuk és 36 élük) van. Ahhoz, hogy a lapok száma felére változzon, az kell, hogy két olyan háromszög, melyek egy eredeti kocka élben közös oldallal rendelkeztek, egy síkba kerüljenek, azaz a poliédernek egy lapját alkossák. Ez akkor következik be, ha a gúlák magassága 1 egység, ugyanis ebben az esetben az oldallapok az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Most az élek száma 12-vel csökken, hiszen eltűnnek a kocka élei, így az élek száma 24 lesz, a csúcsok száma nem változik. Az $m=1$ magasságú gúlák tehát olyan poliédert eredményeznek, melyeknek 14 csúcsuk, 12 lapjuk és 24 élük van (*5. ábra*), más magasság esetén a lapok, élek száma ettől különböző. A megoldás: $m=1$.



5. ábra

Megjegyzés. A kapott poliéder jó példa arra, attól, hogy egy testet egybevágó síkidomok határolnak, nem biztos, hogy szabályos test az illető. Ezt a testet ugyanis egybevágó rombuszok határolják, de különböző térszögleteik miatt mégsem szabályos a test.

9. *Legyen* $f(x)=2x^2-x^3$; $x\in[0;2]$. *Az* $f(x)$ *függvény grafikonjához illesztettünk jobbról egy* y *tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:*

a) *a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a* 2 *abszcisszájú pontban;*

b) *a parabola és az* x *tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az* $f(x)$ *grafikonja és az* x *tengely által bezárt síkidom területével.*

Adjuk meg a parabola egyenletét. (*16 pont*)

Megoldás. A parabola vehető a $g(x)=a\ (x-b)^2+c$ függvény grafikonjának, ahol a, b, c alkalmas ($a>0$) konstans. Ahhoz, hogy a két görbe csatlakozzon egymáshoz az $x=2$ abszcisszájú pontban, az kell, hogy $f(2)=g(2)$, a törésmentességhez pedig: $f'(2)=g'(2)$,

$$f(2)=2\cdot 2^2-2^3=0;\quad g(2)=a(2-b)^2+c\ \Rightarrow$$

$$0=a(2-b)^2+c, \tag{1}$$

$$f'(x)=4x-3x^2;\quad g'(x)=2a(x-b);\quad f'(2)=4\cdot 2-3\cdot 2^2=-4;$$

$$-4=2a(2-b). \tag{2}$$

Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területéhez először meg kell oldanunk a $0=2x^2-x^3$ egyenletet. $0=x^2(2-x)\ \Rightarrow\ x_1=0$; $x_2=2$,

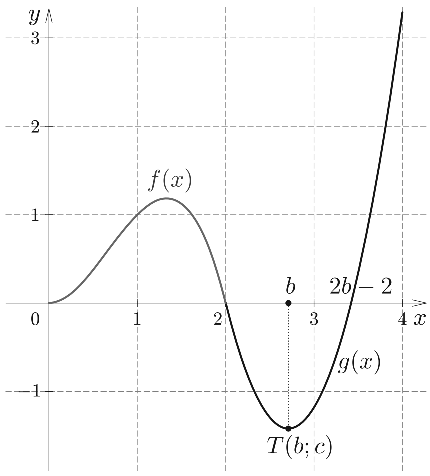
$$T=\int_0^2 (2x^2-x^3)\,\mathrm{d}x=\left[2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=2\cdot\frac{8}{3}-\frac{16}{4}=\frac{4}{3}.$$

A $g(x)$ függvény grafikonjának szimmetriáját kihasználva kaphatjuk az integrálás határait. A kezdőpont nyilván a 2, a végpont pedig: $2(b-2)+2=2b-2$. Mivel a síkidom az x tengely alatt van,

$$-\frac{4}{3}=\int_2^{2b-2}\left[a(x-b)^2+c\right]\mathrm{d}x=\left[a\frac{(x-b)^3}{3}+cx\right]_2^{2b-2}=$$

$$=a\frac{(b-2)^3}{3}+c(2b-2)-\left[a\frac{(2-b)^3}{3}+2c\right]=$$

$$=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2bc-4c=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2c(b-2).$$



Megkaptuk tehát a harmadik egyenletet:

$$(3)\qquad -\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a(b-2)^3+2c(b-2).$$

(2)-ből kifejezzük $(b-2)$-t:

$$b-2=\frac{2}{a},$$

(1)-et felhasználva:

$$0=a\left(-\frac{2}{a}\right)^2+c\ \Rightarrow\ c=-\frac{4}{a}.$$

Behelyettesítve (3)-ba:

$$-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a\left(\frac{2}{a}\right)^3+2\left(-\frac{4}{a}\right)\frac{2}{a};\quad -\frac{4}{3}=\frac{16}{3a^2}-\frac{16}{a^2}\quad \Big/\cdot(-3a^2);$$

$$4a^2=-16+48;\quad a^2=8\ \Rightarrow\ a=2\sqrt{2}\ \ (a>0);$$

$$c=-\frac{4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\,;\quad b=2+\frac{2}{2\sqrt{2}}=2+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

A parabola egyenlete:

$$y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{2}\quad \big(y=g(x)\big).$$

Németh László
Fonyód

Helyesbítés

A szerkesztőség hibájából a 2020/6. számban megjelent emelt szintű gyakorló feladatsor **4.***b*) feladatának kérdése tévesen jelent meg. A helyes szöveg:

Mekkora a legnagyobb területű téglalap alapra illeszkedő éle, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn?

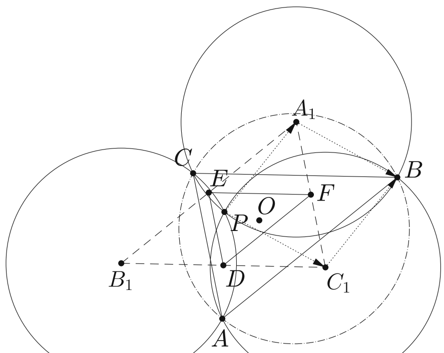
A hibáért elnézést kérünk.

Matematika feladatok megoldása

B. 5015. *Három egységsugarú kör átmegy egy közös ponton. Második metszéspontjaik A, B és C. Mekkora az ABC kör sugara?*

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. Legyen a három kör középpontja A_1, B_1 és C_1, a közös pontjuk pedig P az *ábra* szerint.



Megmutatjuk, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai egybeesnek (O pont). Irányítsunk a közös P pontból a körök középpontjaiba helyvektorokat: $\overrightarrow{PA_1}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{PB_1}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{PC_1}=\mathbf{c}$. (Az ábrán csak a $\overrightarrow{PA_1}$ és $\overrightarrow{PC_1}$ vektorokat tüntettük fel.) Ezek egységnyi hosszúságúak. Az A_1B, C_1B, C_1A, B_1A, B_1C, A_1C is mind egységnyiek, így

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PB},\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{PC},\quad \mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{PA}.$$

Az AA_1 szakasz felezőpontjába mutató helyvektor:

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}.$$

Ugyanezt a vektort kapjuk BB_1 és CC_1 felezőpontjára is, a három felezőpont valóban egybeesik. Az $A_1B_1C_1$ háromszög O-ra vonatkozó tükörképe az ABC háromszög. Mivel az $A_1B_1C_1$ háromszög köré a P körül egységnyi sugarú kör írható, ezért tükörképe, az ABC háromszög köré is.

Stomfai Gergely (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyakorló Gimn. és Koll., 10. évf.) dolgozata alapján

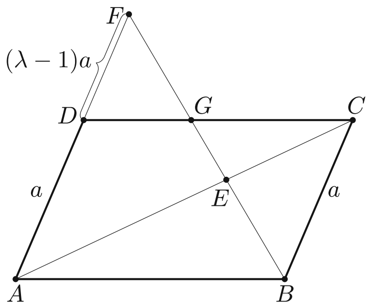
Megjegyzés. A megoldásból is látható, hogy az O pont az $A_1B_1C_1$ háromszög Feuerbach-körének középpontja, a P pont a köréírt körének középpontja, a P pont O-ra vonatkozó tükörképe, pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja, amely, mint megtudtuk az ABC háromszög köréírt körének középpontja. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög DEF talpponti háromszögét a körérírt kör P középpontjából a kétszeresére nagyítottuk, így kaptuk az ABC háromszöget.

Összesen 62 dolgozat érkezett. 3 pontos 52, 2 pontos 2 tanuló dolgozata. 1 pontot 4, 0 pontot 2 tanuló kapott. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 5031. *Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának D-n túli meghosszabbításán vegyük fel az F pontot. A BF szakasz a CD oldalt a G, az AC átlót pedig az E pontban metszi. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}.$$

(*3 pont*)



Megoldás. Legyen $AD=BC=a$ és $AF=\lambda\cdot a$. Így

$$DF=(\lambda-1)\cdot a.$$

Az AFE és CBE háromszögek hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak (illetve egymás meghosszabbításai). A hasonlósági arány $\frac{AF}{BC}=\frac{\lambda a}{a}=\lambda$. Ebből következően $\frac{FE}{BE}=\lambda$, amiből

$$\frac{BF}{BE}=\frac{BE+EF}{BE}=\lambda+1, \qquad \text{tehát} \qquad \frac{1}{BE}=\frac{\lambda+1}{BF}.$$

Az FAB és FDG háromszögek szintén hasonlók, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlósági arány

$$\frac{GF}{BF}=\frac{DF}{AF}=\frac{(\lambda-1)a}{\lambda a}=\frac{\lambda-1}{\lambda},$$

amiből

$$\frac{BG}{BF}=\frac{BF-GF}{BF}=\frac{\lambda-(\lambda-1)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}, \qquad \text{tehát} \qquad \frac{1}{BG}=\frac{\lambda}{BF}.$$

A fentieket a bizonyítandó $\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}$ egyenlőségbe behelyettesítve:

$$\frac{\lambda+1}{BF}=\frac{\lambda}{BF}+\frac{1}{BF}.$$

Mivel $BF\neq 0$, ez valóban igaz.

Fraknói Ádám (Jedlik Ányos Gimn., Budapest, 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 43 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 40, 1 pontot 3 versenyző.

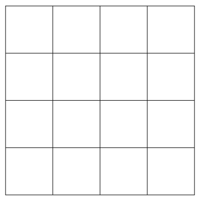
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (669–673.)

K. 669. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek szomszédos számjegyeiből kiolvasható az 1, 2, 3 számokból képezhető összes olyan háromjegyű szám, mely különböző számjegyekből áll?

K. 670. Nagymama két gyertyát vett, a piros színű 2 cm-rel hosszabb volt, mint a kék. Mindenszentek napján este 17 óra 30 perckor meggyújtotta a pirosat, 19 órakor a kéket, és égni hagyta őket, amíg el nem fogytak. A két gyertya egyforma hosszú volt 21 óra 30-kor. A piros 23 óra 30 perckor, a kék 23 órakor aludt el. Milyen hosszú volt a piros gyertya eredetileg?

K. 671. Melyik az a legkisebb prímszám, amelyik egy pozitív elemekből álló növekvő számtani sorozat 5. eleme és a sorozat azt megelőző elemei is prímek?

K. 672. Egy kiskert 16 parcellára van osztva az *ábra* szerint. Minden egyes parcellába rózsát, tulipánt, margarétát vagy gerberát ültetnek úgy, hogy minden parcellába csak egyféle virág kerüljön és minden sorban, minden oszlopban és minden átlóban lévő négy parcellában minden virágból legyen. Hányféleképpen lehet ezekkel a virágokkal a fenti módon beültetni a kertet? (Két ültetés különböző, ha van olyan parcella, melyben nem ugyanazok a virágok vannak.)



K. 673. Egy osztály, melynek tanulói létszámát nem ismerjük, elhatározta, hogy karácsonyra mindenki mindenkinek vesz valami apró ajándékot, az őket tanító 11 tanárnak pedig közösen vesznek egy-egy ajándéktárgyat. Az ajándékozás sajnos elmaradt, ezért úgy döntöttek, hogy az ajándékokat szétosztják az osztály tanulóinak testvérei között igazságosan. (Minden testvér ugyanannyi ajándéktárgyat kap.) Lehetséges-e ez, ha 15 testvér van összesen?

❄

Beküldési határidő: 2020. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1630–1636.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1630. Egy sakktábla fehér mezőire ráírtuk a számokat 1-től 32-ig úgy, hogy minden mezőbe csak egy számot írtunk, és az összes számot felhasználtuk. Ezt követően a fekete mezőkre beírtuk a szomszédos mezőkben található számok összegét. Mekkora a fekete mezőkbe írt számok összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke?

C. 1631. Egy egységsugarú körön adott az AB húr. Erre két derékszögű háromszöget emelünk: ABC-t úgy, hogy C csúcsa a körön helyezkedik el és B-nél van a derékszög, az ABD háromszöget pedig úgy, hogy AB az átfogója, és egyenlő szárú. Mekkora az AB húr hossza, ha a két háromszög területe megegyezik? Mekkora ez a terület?

Feladatok mindenkinek

C. 1632. Hány olyan különböző, pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozat létezik, melynek elemei a 24, a 744 és a 2844 is? (Két számtani sorozatot különbözőnek tekintünk, ha különböző a kezdőelemük vagy a differenciájuk.)

C. 1633. Egy egységnyi oldalú négyzet egyik oldalának belső pontja P. Tekintsük azokat a P csúcsú paralelogrammákat, amelyek minden csúcsa a négyzet egy-egy különböző oldalára esik. Igazoljuk, hogy ha P nem oldalfelező pont, akkor

(i) pontosan két téglalap van a paralelogrammák között, és

(ii) ezen két téglalap területének összege 1.

C. 1634. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot 2020}<\frac{1}{3}.$$

Feladatok 11. évfolyamtól

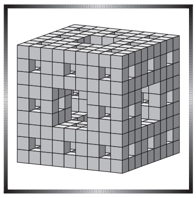
C. 1635. Adott két egymást metsző kör. Egyik metszéspontjukon át szerkesszünk* olyan szelőt, amelynek a két kör által határolt szakaszát a kiszemelt metszéspont harmadolja. Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).

*körzővel, vonalzóval: papíron, vagy számítógépes geometriai szerkesztő programmal

C. 1636. Kosztolányi Dezső diákkorában néhány hetet Párizsban töltött. Hamar szembesült azzal, hogy rásóztak egy forgalomból kivont 10 fillérest. Persze szeretett volna megszabadulni az értéktelen pénztől, de mondani sem kell, hogy sikertelenül. Kosztolányi ezt annak tulajdonította, hogy a boltosok már az arcáról leolvasták a szándékát. Ezért azt eszelte ki, hogy a rossz érméhez hozzákevert kilenc jó 10 fillérest. Ezeket a zsebébe süllyeszti és oda se néz, amikor kiad egy-egy érmét. Végül a zsebében már csak egy darab maradt – a forgalomból kivont 10 filléres. Mekkora ennek a valószínűsége?

Beküldési határidő: 2020. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5126–5133.)



B. 5126. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geqslant 3$, akkor megadható n különböző pozitív egész szám úgy, hogy reciprokaik összege 1 legyen.

(*3 pont*)

B. 5127. Adott egy konvex szögtartomány és egy k hosszúságú szakasz. Mi a mértani helye azon P pontoknak a szögtartományban, amelyeken keresztül húzható olyan egyenes, amely éppen k kerületű háromszöget metsz ki az adott szögtartományból?

(*4 pont*)

B. 5128. Adjuk meg az összes olyan (x,y) relatív prím egészekből álló számpárt, amelyre $x^2+x=y^3+y^2$.

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5129. Két játékos az x^3+ax^2+bx+c polinom a, b és c együtthatói közül felváltva választ egyet, majd annak egy tetszőleges egész értékeket ad. Bizonyítsuk be, hogy a kezdő el tudja érni, hogy (a három lépés után) a polinom mindhárom gyöke egész szám legyen (vagyis a polinomot fel lehessen bontani három elsőfokú, egész együtthatós polinom szorzatára).

(*3 pont*)

B. 5130. Adott a síkban n pont úgy, hogy bármely k $(k \geqslant 2)$ darabból kiválasztható kettő, amelyek távolsága legfeljebb egységnyi. Mutassuk meg, hogy a pontok lefedhetők $k-1$ darab egységnyi sugarú körlappal.

(*5 pont*)

B. 5131. Legyen H egy egységnyi területű szabályos háromszög, O egy rögzített pont, s tetszőleges P pontra jelölje H_P a H háromszög $\overrightarrow{OP}$-vel vett eltoltját.

Tekintsük azon P pontok N halmazát a síkon, amelyekre a $H \cap H_P$ metszet területe legalább 4/9. Mennyi N területe?

(*5 pont*) *Vígh Viktor* (Székkutas) ötlete alapján

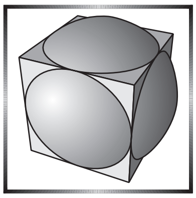
B. 5132. A, B és C-betűkből hány olyan 2021 hosszúságú szó készíthető, amelyben az A-betűk száma páros, és a B-betűk száma $3k+2$ alakú?

(*6 pont*)

B. 5133. Adott a térben hat pont, semelyik négy nem esik egy síkra. Bizonyítsuk be, hogy a pontok szétválaszthatók két hármas csoportra úgy, hogy az általuk meghatározott két háromszöglap messe egymást.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (786–788.)

A. 786. Egy origót tartalmazó konvex S alakzatban meg lehet rajzolni n darab diszjunkt egységkört úgy, hogy az origóból nézve semelyik egységkör se takarja ki semelyik másik egy darabját (vagy az egészet). Bizonyítsuk be, hogy S területe legalább $n^2/100$ területegység.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 787. Jelölje p_n az n-edik prímszámot, és legyen ν egy adott pozitív irracionális szám. Legyen továbbá $a_n = [p_n \nu]$. Egy k pozitív egész szám érdekes, ha $p_i^{10} \mid \binom{2a_k}{a_k}$ teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, 2020$ esetén. Lehetséges-e, hogy csak véges sok érdekes k létezik?

Javasolta: *Abhishek Jha* (Delhi, India) és *Ayan Nath* (Tezpur, India)

A. 788. Oldjuk meg az

$$x + \frac{1}{x^3} = 2y, \qquad y + \frac{1}{y^3} = 2z, \qquad z + \frac{1}{z^3} = 2w, \qquad w + \frac{1}{w^3} = 2x$$

egyenletrendszert.

Beküldési határidő: 2020. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Kacifántos kerítés – I. rész

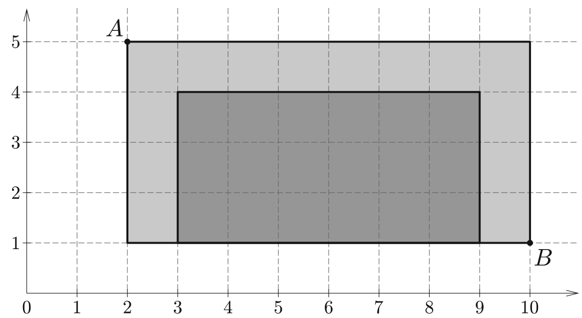
Ezen a néven jelent meg a CEOI (Közép-Európai Informatikai Diákolimpia) idei első feladata. A teljes szöveg elérhető a következő címen:

`http://ceoi2020.inf.elte.hu/contest/tasks/`.

1. feladat: Olvassuk el és értelmezzük a problémát, készítsünk néhány példát, rajzoljunk, majd próbáljuk meg egy-két mondatban összefoglalni, hogy pontosan mit kérdez a feladat.

A feladat téglalapok megszámolását kéri. Kombinatorikai feladatok között láthattunk már hasonlót: számoljuk meg, hogy az $A(a_x, a_y)$ és $B(b_x, b_y)$ pontok mint szemközti csúcsok által meghatározott, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapban hány olyan téglalap van, amelynek csúcsai egész koordinátákkal rendelkeznek és oldalai szintén a koordinátatengelyekkel párhuzamosak.

2. feladat: Adjunk módszert a téglalapok megszámolására egy $a \times b$ oldalú téglalap esetén.



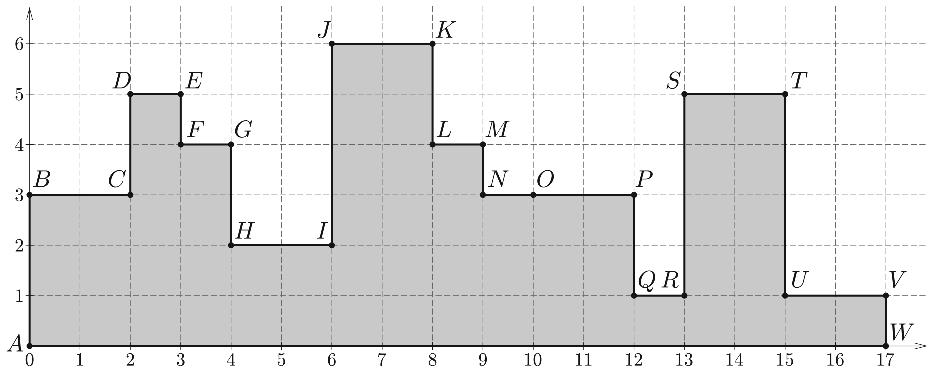
Válasszunk a téglalap kerületén vagy belsejében tetszőlegesen két egész koordinátájú pontot. Ha a választott pontok egyenese nem párhuzamos egyik tengellyel sem, akkor meghatároznak egy téglalapot úgy, hogy ezt a két pontot tekintjük két szemközti csúcsnak. Így az első csúcs elhelyezésére $(a+1)\cdot(b+1)$ lehetőség adódik, míg a másodikra $a \cdot b$. Ezen a módon minden téglalapot négyszer számoltunk: kiválasztottuk a bal felső-jobb alsó csúcspárt kétszer, és a bal alsó-jobb felső csúcspárt is kétszer. Ezért a téglalapok száma

$$\frac{(a+1)\cdot(b+1)\cdot a\cdot b}{4}.$$

A kacifántos kerítés téglalapokból épül föl, de a megszámolandó téglalapok átnyúlnak a kerítést alkotó téglalapokon, tehát a problémát még nem oldottuk meg. A továbbiakban vizsgáljuk a következő bemenethez tartozó kerítést. Az első sorban a kerítéselemek N száma, a másodikban azok h_i magassága és a harmadik sorban az elemek w_i szélessége található ($1 \leqslant i \leqslant N$):

```
11
3 5 4 2 6 4 3 3 1 5 1
2 1 1 2 2 1 1 2 1 2 2
```

Helyezzük el a kerítés bal alsó sarkát a koordináta-rendszer középpontjába. Nézzük, hogyan lehetne a téglalapoknak csúcsokat választani a kerítésen. Látjuk, hogy például a $(3,2)$ és $(11,1)$ pontok, mint (bal, felső) és (jobb, alsó) csúcsok meghatároznak egy megszámolandó téglalapot, miközben az egyik csúcs a második (vagy harmadik), míg a másik csúcs a nyolcadik kerítéselemen található.



3. feladat: Találjunk ki egyszerű algoritmust, ami megszámolja a keresett téglalapokat.

Ha a kerítés méretei a példához hasonlóan kis számok, akkor nem is olyan nehéz algoritmust készíteni. Tekintsük a kerítés egész koordinátájú csúcsai közül azokat, amelyek lehetnek egy téglalap bal felső csúcsai, és válasszunk mindegyikhez megfelelő jobb alsó csúcsokat. Például a $(3,3)$ ponthoz jobb alsó csúcsként kiválaszhatjuk a $(4,2)$, $(4,1)$, $(4,0)$ pontokat. De az $(1,2)$ ponthoz már sokkal több jobb alsó csúcs válaszható, a legtávolabbi a $(12,0)$. Az előbbi kombinatorikus gondolatmenethez hasonlóan megszámolhatjuk minden bal felső csúcshoz a lehetséges jobb alsó csúcsokat. Az $(1,2)$ pont esetén a jobb alsó csúcsok x koordinátája 2-től 12-ig, míg y koordinátája 0-tól 1-ig terjedhet. Így a meghatározott téglalapok száma $11 \cdot 2 = 22$.

A feladat tehát megoldható úgy, hogy minden lehetséges bal felső (b,f) csúcshoz meghatározzuk a tőle legtávolabbi olyan jobb alsó (j,a) csúcsot, amivel olyan téglalapot alkot, melynek minden pontja a kerítésen van. A bal felső csúcshoz rajzolható összes téglalap benne van ebben az előbbi, legnagyobb téglalapban. Az fenti kombinatorikai gondolatmenethez hasonlóan ezek száma $(j-b+1)\cdot(f-a+1)$. A jobb alsó csúcs mindig a kerítés alján van, tehát $a=0$, míg a jobb oldali utolsó megfelelő pont x koordinátáját úgy kapjuk, hogy elindulunk az X tengely pozitív irányában a (b, f) pontból, és az első olyan kerítést alkotó téglalapnál megállunk, amelynek magassága kisebb, mint f. Ha mind megfelelő, akkor a kerítés végéig megyünk.

Nézzük a megoldás algoritmusát. A bemenet beolvasásakor értéket adunk az N egész változónak, valamint a $h[0..N-1]$ és $w[0..N-1]$ egészeket tartalmazó N méretű tömbnek. Ezeket, valamit a továbbiakban használt tömböket 0-tól indexeljük. Ezt a műveletsort végzi el a Beolvas() eljárás, amit nem részletezünk.

Mivel a lehetséges bal felső csúcsoktól az X tengely pozitív irányában elindulva keresni fogunk, ezért tudnunk kell az egyes kerítést alkotó téglalapok abszolút helyzetét az X tengelyen. Ehhez hozzunk létre az el $[0..N]$ tömböt, amelynek k-adik eleme megadja a k-adik kerítéselem bal oldalának x koordinátáját $(0 \leqslant k < N)$, míg N-edik eleme az utolsó kerítéselem jobb oldalának helyét, azaz a kerítés végét. Természetesen úgy is nézhetjük, hogy az el $[k+1]$ a k-adik kerítéselem jobb vége, vagyis jobb oldalának x koordinátája. A tömb értékeinek számítását a következő eljárás végzi:

```
Eljárás TeglalapokEleje(N,w[0..N-1],el[0..N])
    el[0] := 0
    Ciklus k := 0-tól N-1-ig
        el[k+1] := el[k]+w[k]
    Ciklus vége
Eljárás TeglalapokEleje vége
```

A továbbiakban megszámoljuk mindegyik kerítéselemnél azokat a téglalapokat, amelyek bal felső csúcsa a kerítéselemen, de nem annak jobb szélső oldalán található. Utóbbiakat a következő kerítéselemhez soroljuk. Mivel az utolsó kerítéselem jobb oldalán nem lehetnek bal felső csúcsok, így minden lehetséges bal felső csúcsot pontosan egyszer számolunk. A számítást a k-adik kerítéselemre a KeritesElem() függvény végzi. Felülről lefelé haladunk, mivel a bal felső csúcsok $h[k]$-tól 1-ig helyezkedhetnek el. Minden felso szinthez (y értékhez) megnézzük, hogy meddig lehet jobbra elmenni a KeresJobb() függvény segítségével, majd a kerítéselem minden lehetséges bal értékétől kiszámoljuk a (bal, felso) koordinátákból kiinduló téglalapok számát.

```
Függvény KeritesElem(N,h[0..N-1],w[0..N-1],k,el[0..N]) : Egész
    darab := 0
    Ciklus felso := 1-től h[k]-ig
        meddig := KeresJobb(N,h,k,felso)
        jobb := el[meddig]
        Ciklus bal := el[k]-tól (el[k]+w[k]-1)-ig
            darab := darab + (jobb-bal)*(felso-0)
        Ciklus vége
    Ciklus vége
    KeritesElem := darab
Függvény KeritesElem vége
```

A KeresJobb() függvény megadja, hogy a k-adik kerítéselem felso magasságú pontjából meddig lehet jobbra menni úgy, hogy a kerítésen maradjunk. Minden $m > k$-adik kerítéselem megfelelő, amely nem alacsonyabb a felso magasságnál. Ha mindegyik megfelelő, akkor a kerítés jobb végénél állunk meg. A függvény visszaadja az első nem megfelelő kerítéselem indexét, illetve N-et, ha a kerítés végéig minden elem elég magas.

Függvény KeresJobb(N,h[0..N-1],k,felso) : Egész
  m := k+1
  Ciklus amíg $m < N$ **és** $h[m] \geqslant felso$
    m := m+1
  Ciklus vége
  KeresJobb := m
Függvény KeresJobb **vége**

A KacifantosKerites függvény adja a feladat megoldását: a beolvasás és az előkészítő műveletek után megszámolja az egyes kerítéselemekből bal felső csúcsokkal készíthető téglalapokat, és visszaadja azok 1 000 000 007-tel vett osztási maradékát.

Függvény KacifantosKerites() : Egész
  Beolvasas(N,h,w)
  TeglalapokEleje(N,w,el)
  darab := 0
  Ciklus k := 0-tól N-1-ig
    darab := darab + KeritesElem(N,h,w,k,el)
  Ciklus vége
  KacinfatosKerates := darab MOD 1000000007
Függvény KacifantosKerites **vége**

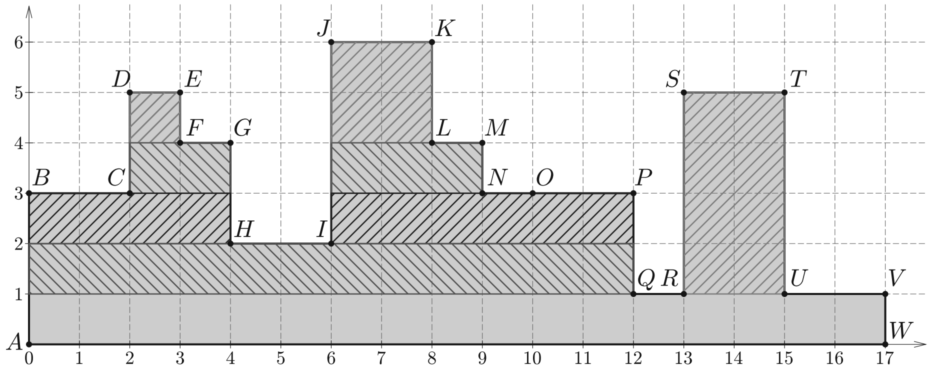
Feltételezzük, hogy az algoritmusból készített programban az esetlegesen nagy számértékek elférnek a használt egész típusban és a műveletek nem okoznak túlcsordulást. A megoldás azonban a nagy számú és nagyságrendű bemenetekkel sajnos ettől függetlenül nem boldogul. A versenyen kevés pontot kapott volna, mivel a futásidő nagyobb $h[\,]$ és N értékek esetén meghaladja az időkeretet. Ez érthető, hiszen a KeresJobb() függvény $\sum\limits_{i=0}^{N-1} h_i$ alkalommal hívódik meg, vagyis az $y = 0$ kivételével minden kerítéselem magasságnál, míg a benne szereplő ciklus átlagos lépésszáma a kerítéselemek N számával arányos. Tehát hatékonyabb algoritmusra lesz szükségünk, amiben nem szerepel a KeresJobb függvényhez hasonló keresés.

Az előző algoritmus kerítéselemeken választott bal felső csúcsokat, és a jobb alsó csúcsokat tőle jobbra, a többi kerítéselemet vizsgálva kereste. Ne ragaszkodjunk feltétlenül a kerítés pontjainak ilyen csoportosításához.

4. feladat: Próbáljuk olyan téglalapokra bontani a kerítést, ahol magától adódik egy-egy bal felső csúcshoz a legtávolabbi jobb alsó csúcs.

Vegyük észre, hogy ha egy kerítéselem mindkét szomszédjánál magasabb, akkor azok a csúcsai, amelyek mindkét szomszéd magasságánál nagyobb y koordinátával rendelkeznek, csak olyan csúcsokkal alkothatnak a kerítésen téglalapot, amelyek az adott kerítéselemen vannak. Például tekintsük a vizsgált bemenetnél a $(6,4)$, $(8,4)$, $(8,6)$ és $(6,6)$ csúcsok által meghatározott téglalapot. Az ezen fekvő bal felső csúcsokhoz – kivéve az alsó oldalélt – csak ezen a kerítéselemen lévő csúcsok közül választhatunk jobb alsót, tehát csak a $6 \leqslant x \leqslant 8$ értékek jöhetnek számításba. Ez éppen az adott kerítéselem két vége, tehát ekkor semmilyen X tengely irányú keresésre nincs szükség.

Gondoljuk tovább a dolgot. Ha az előbbi kerítésrészre eső bal felső csúcsokkal alkotott téglalapokat megszámoltuk, akkor gyakorlatilag elhagyhatjuk ezt a részét a kerítésnek, hiszen jobb alsó csúcsként is megszámoltuk minden pontját. Amennyiben további, hasonlóan kiemelkedő részek vannak a kerítésen, akkor azokban is számolhatunk. Így a példában a $(2,4)$ és a D, E, F pontok által alkotott vagy az $RSTU$ téglalap esetében. Az alábbi *ábrán* satírozással jelöljük a szóban forgó kiemelkedéseket.



Ezeket a kerítésrészeket elhagyva ismét olyan kerítés keletkezik, amelynek vagy vannak kiemelkedései, vagy egyetlen téglalap az egész kerítés. Így a számolás folytatható pl. a $(6,3)$, N, M, $(6,4)$ téglalappal. Amennyiben lépésről-lépésre minden kiemelkedést a számolás után elhagyunk, akkor végül egy téglalap marad, amivel készen is vagyunk. A megoldáshoz tehát csak arra van szükség, hogy minél egyszerűbben meghatározzuk a kiemelkedéseket.

5. feladat: Gondolkozzunk olyan algoritmuson, ami az adatok alapján végigmegy a kiemelkedéseken és megszámolja azokat a téglalapokat, amelyek bal felső csúcsa ezeken található.

A cikk folytatásában választ adunk az 5. feladatra és hatékony algoritmust készítünk a versenyen kitűzött problémához. Természetesen a leírt gondolatmeneten kívül más ötlet alapján is lehet megoldást készíteni. Az utóbbi évek CEOI feladatai szerepelnek a `http://mester.inf.elte.hu` adatbázisában, így programunk helyességét és hatékonyságát ellenőrizhetjük a segítségével.

Schmieder László

Informatikából kitűzött feladatok

I. 520. A prímszámok híres és jól ismert egészek. Néha azonban ők is szívesen elrejtőznek. Ilyenkor belebújnak egy összetett szám ruhájába. Ez úgy lehetséges, hogy a számjegyeik helyét egy vagy több forgatással megváltoztatják. A forgatás azt jelenti, hogy a szám utolsó számjegye átkerül a szám elejére. Például a 347 forgatásai a 734 és a 473. A 347 prím, de a két elforgatása összetett szám, ezért mindkettő lehet a 347 álruhája, tehát ez egy olyan prím, ami el tud rejtőzni.

Mivel a számok elején a vezető 0-kat nem írjuk ki, ezért a 107 forgatásának csak a 710-et tekintjük, a 71-et nem. Ha egy prím minden elforgatottja prím, akkor egyikük sem tud elrejtőzni. Ha egy szám és minden elforgatottja összetett, akkor ők nem lehetnek egy prím álruhái.

Készítsünk programot, amely a legföljebb négyjegyű pozitív egészek között megkeresi azokat, amelyek a fent leírt módon elrejthetnek egy prímet.

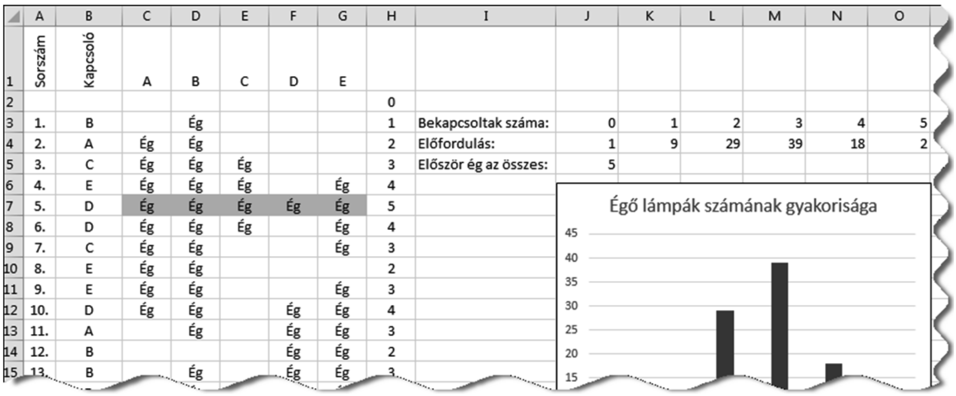
A program a standard kimenet első sorába írja ki az elrejtésre alkalmas egészek számát, második sorába növekvő sorrendben, vesszővel elválasztva az elbújtatásra alkalmas egészeket.

Beküldendő egy `i520.zip` tömörített állományban a forrásprogram és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

I. 521. Egy lapra A, B, C, D és E jelöléssel 5 darab lámpa van egy sorban elhelyezve. A lámpák függetlenek egymástól, mindegyikhez egy-egy kapcsoló tartozik, amellyel csak a hozzá tartozó lámpa be- és kikapcsolása végezhető. Kezdetben minden kapcsoló kikapcsolt állapotban van. A kapcsolókat véletlenszerűen kapcsoljuk egyik állásból a másikba, és figyeljük az égő lámpák számát, majd kellő számú kísérlet után ezen számok gyakoriságát.

A kísérletet szimuláljuk és értékeljük ki táblázatkezelővel.

1. Hozzunk létre egy munkafüzetet `i521` néven és mentsük a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában, majd abban nevezzünk el egy munkalapot **lampak** néven.
2. Előkészítésként adjuk meg a táblázat 1. sorát és A oszlopát a *minta* szerint. A feliratokkal a szimuláció értelmezését segítjük.
3. Az A oszlopban a kapcsolók megnyomásának sorszámát, míg a B oszlopban a véletlenszerűen választott kapcsoló betűjelét jelenítsük meg függvény segítségével. A szimuláció 100 kapcsolást tartalmazzon.
4. A C:G oszlopokban az égők be-, illetve kikapcsolt állapotát jelenítsük meg Ég felirattal, illetve üres cellával.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Sorszám	Kapcsoló	A	B	C	D	E								
2								0							
3	1.	B		Ég				1	Bekapcsoltak száma:	0	1	2	3	4	5
4	2.	A	Ég	Ég				2	Előfordulás:	1	9	29	39	18	2
5	3.	C	Ég	Ég	Ég			3	Először ég az összes:	5					
6	4.	E	Ég	Ég	Ég		Ég	4							
7	5.	D	Ég	Ég	Ég	Ég	Ég	5							
8	6.	D	Ég	Ég	Ég		Ég	4							
9	7.	C	Ég	Ég			Ég	3							
10	8.	E	Ég	Ég				2							
11	9.	E	Ég	Ég			Ég	3							
12	10.	D	Ég	Ég		Ég	Ég	4							
13	11.	A		Ég		Ég	Ég	3							
14	12.	B				Ég	Ég	2							
15	13.	B		Ég		Ég	Ég	3							

5. A H2:H100 cellákban minden kapcsolás után írjuk ki, hogy aktuálisan hány lámpa ég.
6. Feltételes formázással emeljük ki azokat a sorokat, ahol mind az öt lámpa ég (lásd a mintát). Az J6-os cellában írjuk ki, hogy hányadik kapcsolásnál fordult először elő az öt lámpa egyidejű bekapcsolt állapota.
7. Az I3:I4 cellák feliratát készítsük el és mellette a J3:G4 cellákban határozzuk meg másolható függvény segítségével az égő lámpák számának gyakoriságát.
8. A gyakoriságot feliratokkal ellátott diagramon ábrázoljuk a minta szerint a felette lévő adatok oszlopainak szélességében.
9. Az A:H oszlopok tartalmát igazítsuk középre. Az A1:B1 cellákban az írásirányt állítsuk függőlegesre.

Beküldendő egy `i521.zip` tömörített állományban a megoldást adó munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 522. A Very Hard Fegyintézet fegyőrei és rabjai kizárólag egyetlen adat alapján ítélik meg magukat és egymást: kinek mekkora a bicepsze. Adataikat a `fegyorok.txt` és a `rabok.txt` szöveges állomány tartalmazza: egy szóközzel elválasztva előbb a fegyőrök (illetve rabok) azonosítója, majd bicepszének kerülete szerepel centiméterben kifejezve. A fegyőrök azonosítója háromjegyű egész szám, amely előtt egy R betű van, míg a rabok azonosítója egy négyjegyű egész szám. Például a `fegyorok.txt` állományban az R162-es azonosítójú fegyőr bicepsze 50,2 cm:

```
R162 50,2
R176 21,5
```

míg a rabok.txt állományban:

```
1717 26,6
2563 40,5
```

a 2563-as rabé 40,5 cm. A fegyházban legfeljebb 40 fegyőr, és legfeljebb 100 rab van.

1. Olvassuk be és tároljuk el az adatokat két adatállományból.

2. Hány fegyőr, és hány rab van az intézetben? Írassuk ki a képernyőre a létszámokat.

3. Kérjük be egy rab azonosítóját, majd írassuk ki bicepszének méretét. Ha nincs ilyen azonosítójú rab, akkor jelenjen meg egy erre utaló üzenet.

A fegyházban a rabok egyenként sétálnak. Minden rabot egy sétára fegyőrnek kell kísérni, de olyannak, akinek a bicepsze nagyobb, mint az adott rabé.

4. Kérjük be egy fegyőr azonosítóját (feltehetjük, hogy van ilyen), és írassuk ki, hogy hány olyan rab van, akit elkísérhet sétálni.

5. Van-e olyan rab, aki sohase mehet sétálni? Ha igen, írassuk ki a képernyőre az azonosítóját! Ha nincs, akkor írassuk ki: „Minden rab mehet levegőzni!”

6. A rabok titokban „Szökéselőkészítő Tanácsot” alakítanak. A tanácsnak a három legnagyobb bicepszű rab lesz a tagja. Írassuk a tanács tagjainak azonosítóját a `titok.txt` szöveges állományba (feltehetjük, hogy nincsenek azonos bicepszű rabok).

Beküldendő egy `i522.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

I/S. 48. Egy sakktáblára szeretnénk minél több vezért elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat. Valaki már el is helyezett K vezért a táblára úgy, hogy egyik se üti a másikat. Adjuk meg, hogy legfeljebb hány vezért helyezhetünk még el a táblára úgy, hogy a táblán levő vezérek közül egyik se üsse a másikat.

Bemenet: az első sor tartalmazza a K számot. A következő K sor mindegyike egy x és egy y számot tartalmaz: az adott vezért az x-edik sor y-adik oszlopába tették le.

Kimenet: adjuk meg, hogy legfeljebb még hány vezért tehetünk a táblára úgy, hogy egyik se üsse a másikat.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`3 / 2 7 / 6 2 / 7 6`	`5`

Korlátok: $1 \leqslant K \leqslant 7$, $1 \leqslant x, y \leqslant 8$. *Időkorlát:* 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $K = 7$.

Beküldendő egy `is48.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 147. Ha egy számítógépes rendszerben egyszerre több program fut, akkor zárakat használnak a megosztott erőforrások biztonságos kezelése érdekében. Mielőtt egy program pl. közös memóriaterületet használna, megvizsgálja, hogy a hozzá tartozó zár nyitva van-e. Ha igen, akkor zárja azt, használja az erőforrást, majd ha már nincs rá szüksége, akkor a zárat kinyitja. Amíg a program használja az erőforrást és az ahhoz tartozó zár be van zárva, addig más program nem tudja az erőforrást használni, így várakoznia kell, amíg az erőforrás szabaddá nem válik és a zár újra nyitva nem lesz.

Van két programunk, melyek önmagukban determinisztikusak, azaz véges időn belül lefutnak és pontosan tudjuk, hogy az egyes utasításaikat milyen sorrendben hajtják végre. Mindkét program esetében ismerjük, hogy mely erőforrásokat és milyen sorrendben próbálják lefoglalni és elengedni, tehát azok zárjait milyen sorrendben nyitják és zárják.

Döntsük el, hogy kialakulhat-e holtpont, ha csak ez a két program fut a rendszerben. Holtpontnak nevezzük azt az állapotot, amikor a rendszerben futó összes program olyan erőforrásra vár, amelyet egy másik program már használ, ezért egyik program sem tud tovább futni. Készítsünk programot, amely T programpár esetében meghatározza, hogy kialakulhat-e holtpont.

Bemenet: az első sor tartalmazza a programpárok T számát. Minden programpárt három sor ír le. Az első sor tartalmazza az N és M számokat, melyek az első és a második program zár műveleteinek számát adja meg. A következő két sor az első és a második program erőforrás műveleteit írja le a programfutás szerinti sorrendben. Egy $x > 0$ szám azt jelenti, hogy a program a következő lépésében az x-edik erőforrást használná, míg egy $x < 0$ szám azt, hogy az x-edik erőforrást a program már nem használja tovább. Ha a program futása végére ér, akkor elengedi az összes lefoglalt erőforrást, tehát minden általa lezárt zár kinyílik. Ez nem feltétlenül jelenik meg a bemenetben.

Kimenet: T sort kell kiírni, amelyek mindegyike az „`Igen`” vagy a „`Nem`” szöveg aszerint, hogy kerülhet-e holtpontba a rendszer.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**

`2`
`6 3 / 1 2 3 -3 -2 -1 / 1 3 2`
`4 5 / 1 2 -2 3 / 2 3 -2 -3 1`
	`Igen`
	`Nem`

Korlátok: $1 \leqslant T \leqslant 10$, $1 \leqslant N, M \leqslant 100$, $1 \leqslant x \leqslant 10^6$. *Időkorlát:* 0,2 mp.

Beküldendő egy `s147.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

Javasolta: *Erben Péter* és *Darabos Dániel*

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. december 15.

❄

Beszámoló a 4. Európai Fizikai Diákolimpiáról

A 4. Európai Fizikai Diákolimpia (EuPhO) az eredeti tervek szerint Szatmárnémetiben (Romániában) került volna megrendezésre, a verseny azonban a COVID-19 járvány miatt májusban elmaradt. Helyette 2020. július 20. és 26. között a verseny nemzetközi bizottsága egy online versenyt rendezett. A versenyen 30 európai és 24 Európán kívüli ország összesen 258 diákja vett részt. A versenyzők a legtöbb országban egy helyen, tanári felügyelettel írták meg a dolgozatokat, amelyeket beszedés után beszkenneltek, és elküldtek a verseny szervezőinek, akik azt a szokásos módon kijavították. A verseny tisztasága érdekében az egész folyamatot (dolgozatírás, szkennelés) videón közvetíteni kellett.

Az online forma semmilyen nehézséget nem jelentett az elméleti fordulóban, viszont nagyon nehézzé tette a mérési forduló megrendezését. A verseny szervezői azonban – nagyon helyesen – nem akartak lemondani a mérésekről. Először az volt az elképzelés, hogy a méréshez szükséges egyszerű eszközök listáját előre megadják, és azokat minden ország beszerzi, illetve a versenyre a szervezők által összeállított csomagokat már korábban elküldik a résztvevő országoknak. Egyik megoldás se problémátlan, és végül az idő is kevés volt. Végül – kompromisszumként – számítógépen szimulált méréseket kellett a versenyzőknek elvégezniük és kiértékelniük. Ily módon persze kimarad a mérési elrendezés összeállítása, a sokszor kézügyességet is igénylő beállítás, a minél pontosabb leolvasás. Ugyanakkor a modern mérések – nem online esetben is – egyre inkább számítógép segítségével történnek, ahol a mostani versenyhez hasonlóan billentyűzet segítségével kell beállítani a mérés paramétereit, az eredményeket pedig egy adatfájl formájában lehet megkapni. Tehát valójában a fő különbség csak az volt, hogy most a bevitt adatok nem egy valódi eszköz beállításai, hanem egy szoftveres szimuláció paraméterei voltak. A szervezők arra is figyeltek, hogy a program – a valódi mérésekhez hasonlóan – az eredményeket egy véletlen hibával kicsit „elrontsa".

A *moderáció,* a javítók által adott pontok esetleges megnövelése (amelyet az EuPhO-n nem a csapatvezetők, hanem a diákok maguk végeznek el), valamint az eredményhirdetés szintén online történt. A szociális programok, kirándulások és a személyes találkozások viszont sajnos elmaradtak. A verseny abszolút győztese, az indonéz *Peter Addison Sadhani* a maximális 50 pontból 40-et ért el, a legjobb európai versenyző (és egyben abszolút második) a szerb *Bogdan Rajkov* lett 38,5 ponttal. Az aranyéremhez 26 pontot kellett elérni, ezt 27 diák (közülük 14 hivatalos európai induló) érte el. Ezen kívül 49 ezüstérmet, 59 bronzérmet és 40 dicséretet osztottak ki.

A magyar csapatot a 2020. június 2-3-án megrendezett – szintén *online* – Kunfalvi-versenyen válogattuk ki, minden diák a saját otthonában dolgozott. (Az eredeti márciusi időpontban a versenyt nem lehetett megtartani. A válogatóverseny feladatait a szeptemberi számban ismertettük.) Az EuPhO-n résztvevő csapat és eredményeik:

Bokor Endre (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. oszt.) *ezüstérem* (17,9 pont), felkészítő tanára: *Schramek Anikó;*

Pácsonyi Péter (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (16,1 pont), felkészítő tanára: *Pálovics Róbert;*

Fajszi Bulcsú (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (15,6 pont), felkészítő tanára: *Horváth Gábor;*

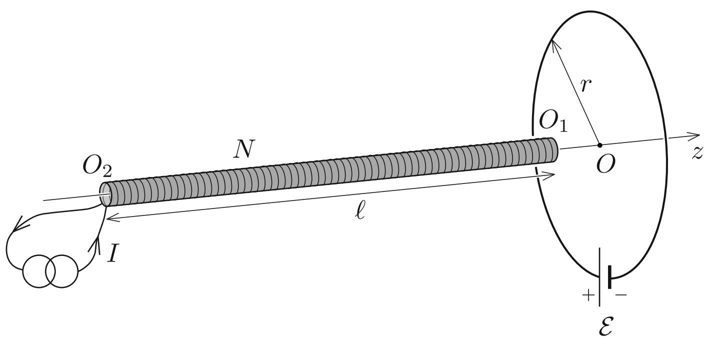
Marozsák Tádé (Óbudai Árpád Gimnázium, 12. oszt.) *dicséret* (9,3 pont), felkészítő tanára: *Gärtner István;*

Jánosik Áron (Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, 12. oszt.) (8,1 pont), felkészítő tanára: *Juhász Zoltán.*

A magyar csapat vezetője *Szász Krisztián* volt, a feladatokat a versenynapok reggelén *Vankó Péter* fordította le magyarra, *Vigh Máté* pedig a versenybizottságban, valamint az első elméleti feladat szerzőjeként képviselte hazánkat. Az alábbiakban közöljük az elméleti forduló feladatait és a kísérletek rövid ismertetését, az eredeti, teljes angol feladatszövegek és a megoldások a verseny honlapján érhetők el: `https://eupho.ee/eupho-2020/`.

Elméleti feladatok

1. Szolenoid és hurok. Egy r sugarú, zárt, kör alakú hurok egy ideális, $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű telepből és egy R ellenállású huzalból áll. Egy hosszú, vékony, légmagos szolenoidot a hurok tengelyébe helyezünk (z tengely). A szolenoid hossza $\ell \gg r$, keresztmetszetének területe A ($\sqrt{A} \ll r$), a menetek száma N. A szolenoidon egy ideális áramforrásból állandó I áram folyik. Az áramok iránya a szolenoidban és a hurokban megegyezik (az *1. ábrán* az óramutató járásával megegyező).

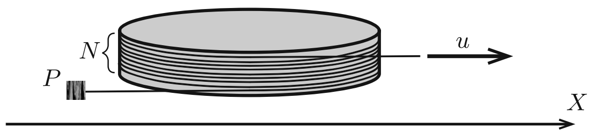


1. ábra

a) Határozd meg azt az F_1 erőt, amely a szolenoidra hat, amikor annak O_1 elülső végét a hurok O középpontjába helyezzük! Mekkora F_2 erő hat a szolenoidra, amikor annak O_2 hátsó vége van a hurok középpontjában?

b) Most tegyük fel, hogy a szolenoid állandó v sebességgel lassan mozog a z tengely mentén, a huroktól nagyon nagy távolságból indulva áthalad annak középpontján, és továbbhalad jobbra a pozitív z irányba. Ábrázold a hurkon átfolyó J áramot az idő függvényében! A grafikonon jelöld be a fontos jellemzőket és értékeket. A v sebesség olyan kicsi, hogy a hurok önindukcióját elhanyagolhatjuk.

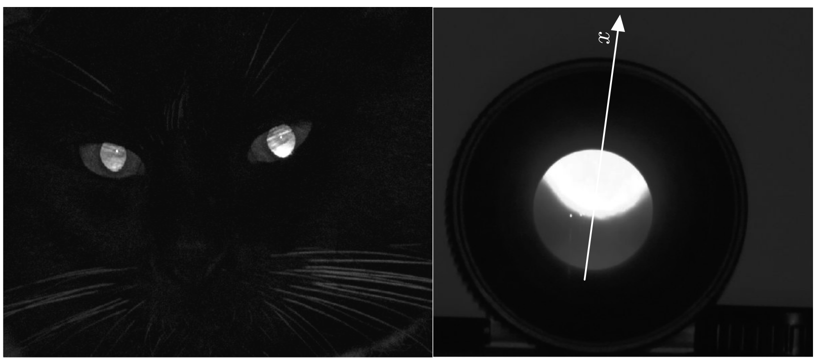
2. Mechanikai gyorsító. Egy elhanyagolható tömegű fonál N-szer van feltekerve egy álló helyzetben rögzített hengerre, ahogy a *2. ábrán* látható. Kezdetben a fonál szabad (feltekeretlen) végei párhuzamosak az X tengellyel. Ekkor egy súlyos, pontszerű P testet rögzítünk a fonál egyik végéhez, a fonál másik végét pedig állandó u sebességgel húzzuk az X tengely mentén. Határozd meg a súlyos test maximális sebességét!



2. ábra

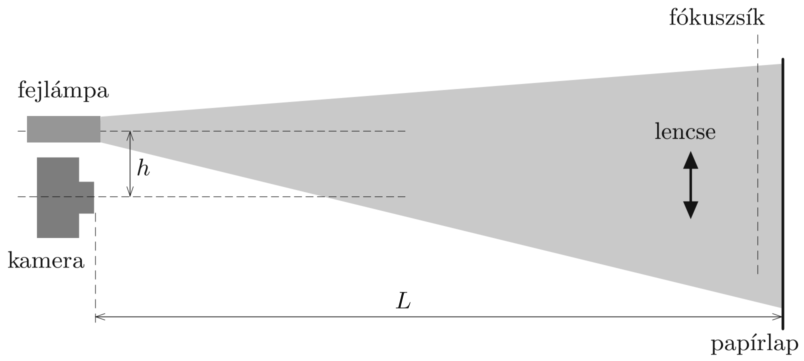
A fonál nyújthatatlan és hajlékony. Tegyük fel, hogy a fonál menetei szorosan egymás mellé vannak tekerve, és lényegében egy, a henger tengelyére merőleges síkban helyezkednek el. Hanyagolj el minden súrlódást. A gravitációs erőt ne vedd figyelembe.

3. Macskaszem. Megfigyelhető, hogy ha egy macska egy fejlámpa fénynyalábjába kerül, szemei nagyon fényesnek látszanak (lásd a *3. ábrán* a fotó bal oldalán). Ezt a jelenséget modellezhetjük egy lencse-összeállítással, ahogy az a fotó jobb oldalán és a *4. ábrán* látható.



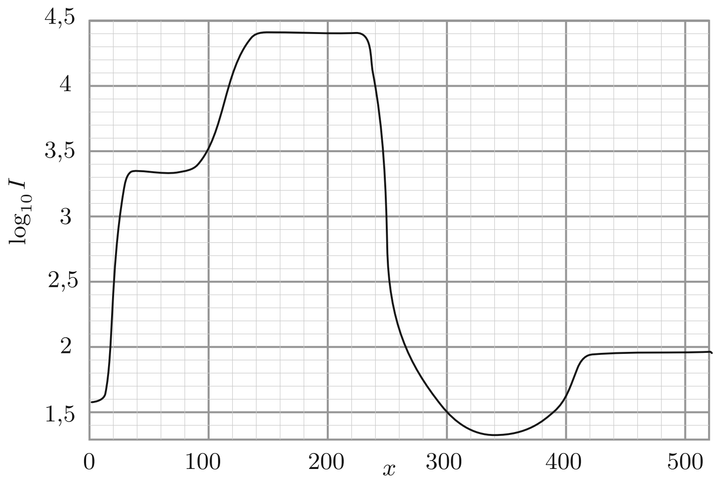
3. ábra

A jobb oldali fotó egy digitális, tükörreflexes fényképezőgéppel készült. A fény intenzitását a fényképezőgép érzékelőjének pixelein (amelyek a fenti fotón fehér vonal jelöl) az *5. ábrán* látható *grafikonon* ábrázoltuk. A fény intenzitásának (amelyet



4. ábra

az adott pixelre beérkező fotonok száma ad meg) 10-es alapú logaritmusát ábrázoltuk az x koordináta függvényében. A hosszúság egysége egy pixel oldalhossza.



5. ábra

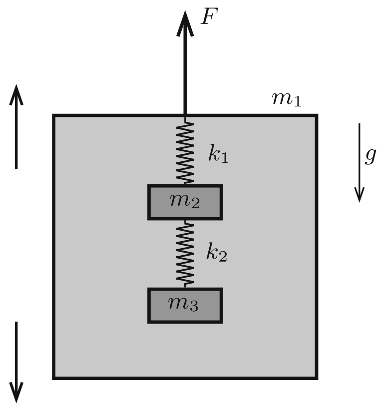
A macskaszemet modellező lencsét egy ideális vékony lencseként kezelhetjük, melynek fókusztávolsága $f = 55$ mm és átmérője $D = 39$ mm. Azonban figyelembe kell venni, hogy a grafikon valódi mérési adatokat mutat, a lencsének pedig vannak nemideális tulajdonságai. A legfontosabb, hogy a lencse fényesen megvilágított területeiről történő részleges visszaverődés csökkenti a kontrasztot: a sötét területek a lencsén át nézve kevésbé sötétnek látszanak, mint amilyenek valójában. Ezt a hatást a fényképezőgép lencséjénél elhanyagolhatjuk, a macskaszemet modellező lencsénél viszont nem.

A megadott adatok alapján becsüld meg (kb. 20% pontossággal) a fényképezőgép tengelye és a (pontforrásnak tekinthető) lámpa tengelye közötti h távolságot, ha a fényképezőgép és a papírlap távolsága $L = 4{,}8$ m.

Kísérleti feladatok

1. Rejtett töltés. Ebben a feladatban egy rögzített, ismeretlen Q ponttöltés nagyságát és helyét kellett meghatározni állítható sebességű és helyzetű (szimulált) elektronnyalábok szóródása alapján. A rejtett töltésről úgy szerezhettek információt a versenyzők, hogy változtathatták az elektronok kezdeti mozgási energiáját, valamint a z tengellyel párhuzamos elektronsugár kezdeti x_{i} és y_{i} koordinátáit, és „mérték" azokat a x_{f} és y_{f} koordinátákat, ahol az elektronok becsapódnak a z tengelyre merőleges, $z=0$ helyen lévő sík, *véges* méretű ernyőbe.

A feladat szövegében megadták a Rutherford-szóródás képletét. Ugyanakkor az egész méréssorozatot (milyen helyekről milyen energiájú elektronokat indítanak) a versenyzőknek kellett megterveznie, és a szimulációs programmal végrehajtania, majd a program által adott adatokból (a becsapódások helyéből) a lehető legpontosabban meghatározniuk a rögzített Q töltés helyének (x_Q, y_Q, z_Q) koordinátáit, valamint a töltés nagyságát és előjelét. Az eredményhez egy durva, nagyságrendi hibabecslést is adni kellett (az elektronsugár kezdeti helyzetének 0,5 mm nagyságrendű Gauss-eloszlású hibája volt).



2. Feketedoboz. A második mérési feladatban egy mechanikai feketedobozt vizsgáltak a versenyzők. A merev, m_1 tömegű doboz belsejében egy m_2 tömegű test van felfüggesztve egy elhanyagolható tömegű, k_1 rugóállandójú rugóval. Egy másik m_3 tömegű test pedig az m_2 tömegű testre van függesztve egy másik, szintén elhanyagolható tömegű, k_2 rugóállandójú rugóval. A testekre hat egy kis viszkózus közegellenállás, amely függ a testek sebességétől. A nehézségi gyorsulás nagysága $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, iránya párhuzamos a doboz falával.

A tartály felfelé vagy lefelé mozgatható, szakaszonként állandó gyorsulással. A gyorsulás mintázata programozható az időtartam és a gyorsulás megadásával minden lépésben. A szimuláció „valós időben" mutatja a dobozra ható F erőt, amely az adott pillanatban szükséges a megadott gyorsuláshoz, valamint az időt. A szimuláció az adatokat egy text fájlba is kiírja.

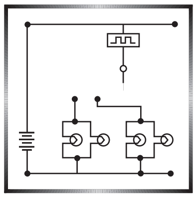
A szimulációt egy valódi méréshez az tette hasonlóvá, hogy az F erő mérésének van egy kicsi véletlenszerű hibája, valamint a rugók lineárisan viselkednek ha a deformációk észszerűen kicsik, de nagy deformációk esetén nemlineárisak. Ezen kívül a doboz oldalainak hossza és a „kísérletnek" helyet adó szoba véges méretei is adottak (ha a testek ütköznek egymással vagy a dobozzal, illetve a doboz a szoba padlójával vagy mennyezetével, akkor a szimuláció leáll).

A feladat minden paraméter (az m_1, m_2 és m_3 tömegek, valamint a kis megnyúlásokra vonatkozó k_1 és k_2 rugóállandók) meghatározása. Ehhez az előző feladathoz hasonlóan egy méréssorozat megtervezése és annak kiértékelése volt a cél.

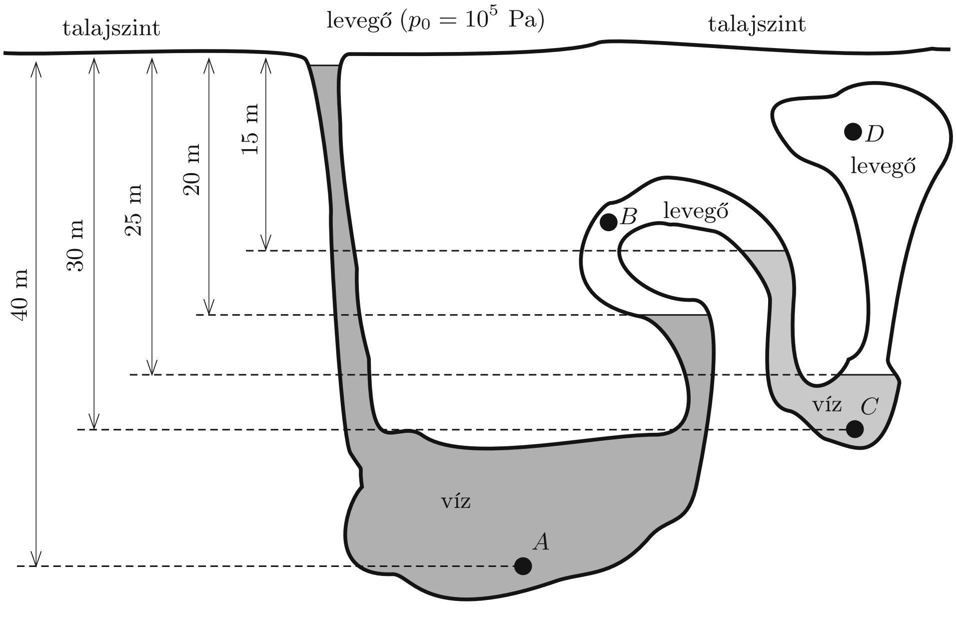
Mivel a rendszernek nagyon sok szabad paramétere van, nem könnyű megtalálni, hogy érdemes elindulni. Hibaszámítást ebben a feladatban nem kellett végezni.

Vankó Péter

Fizika gyakorlat megoldása



G. 711. *Egy zárt, föld alatti üreg egy kürtővel csatlakozik a külvilághoz. Az üreg bizonyos részeiben víz van. Határozzuk meg a nyomást az* ábrán *feltüntetett A, B, C és D pontokban!*



(*4 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy 10 méter mélyen a vízben körülbelül ugyanakkora a hidrosztatikai nyomás, mint a külső légköri nyomás, vagyis $p_0 = 10^5$ Pa. Az A pontban tehát a nyomás értéke a külső légköri nyomás és még 40 méternyi víz hidrosztatikai nyomása együtt, ami

$$p_A = p_0 + 4\,p_0 = 5\,p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Az A pontot tartalmazó víztömegben egy-egy szinten (azonos mélységben) ugyanakkora a nyomás, a levegőt tartalmazó üregben pedig mindenhol gyakorlatilag ugyanakkora a nyomás. Emiatt a B pontot tartalmazó légtérben mindenhol, így mindkét, vízzel érintkező felületénél éppen annyi a nyomás, mint az A-t tartalmazó víztömeg bal oldalán 20 méter mélyen. Ott pedig a fentiek szerint a nyomás

$$p_B = p_0 + 2\,p_0 = 3\,p_0 = 3 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

A C pontban a nyomás a B-ben mért nyomásnál $30 - 15 = 15$ méternyi víznyomásnyival nagyobb, tehát

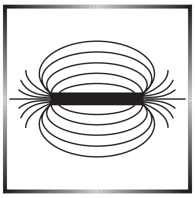
$$p_C = p_B + 1{,}5\,p_0 = 4{,}5\,p_0 = 4{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

A D pontot tartalmazó üregben mindenhol, így a vízzel való érintkezési felületénél is annyi a nyomás, mint a C-t tartalmazó víztömeg bal oldalán 25 méterrel a földfelszín és 10 méterrel a bal oldali ágának a felszíne alatt. Ennél a vízfelületnél pedig a nyomás – mint láttuk – $p_B = 3 \cdot 10^5$ Pa. A C-t tartalmazó víztömeg jobb oldali felszínénél a nyomás

$$p_D = p_B + p_0 = 4\,p_0 = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

Sebestyén József Tas (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

34 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5216. *Egy függőlegesen álló hengeres tartályban egy súlyos dugattyú alatt* n mol, T_0 *hőmérsékletű levegő van. A tartály és a dugattyú jó hőszigetelő, kívül vákuum van. A dugattyút lassan emelni kezdjük, majd amikor már* W *munkát végeztünk, hirtelen elengedjük. A dugattyú lengésbe jön, és idővel (a levegő belső súrlódása miatt) megáll.*

Mekkora lesz a levegő hőmérséklete az új egyensúlyi helyzetben? Hogyan változik az eredmény, ha a dugattyút nem emeljük, hanem W *munkavégzéssel lenyomjuk, majd hirtelen elengedjük?*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

Megoldás. Mivel a tartály és a dugattyú is jó hőszigetelő, kívül pedig vákuum van, ezért az általunk végzett W munka a dugattyú megállása után két helyre kerülhet: növelheti a gáz belső energiáját és növelheti a dugattyú helyzeti energiáját.

Jelöljük a gáz kezdeti nyomását p_0-lal, a kezdeti térfogatát V_0-lal. A dugattyú tömege legyen m, keresztmetszete pedig A. Ekkor a dugattyú által a gázra kifejtett nyomás:

$$p_{\text{dugattyú}} = \frac{mg}{A}.$$

Kezdetben a dugattyú egyensúlyban volt, kívül pedig vákuum van, így

$$p_0 = p_{\text{dugattyú}} = \frac{mg}{A}.$$

Miután létrejött az új egyensúlyi helyzet, a gáz nyomása p_1, a térfogata V_1 és a hőmérséklete T_1 értékekre változik. Mivel kívül még mindig vákuum van, ezért a gáznak ebben az új egyensúlyi helyzetben is csak a dugattyút kell tartania, tehát a gáz nyomása:

$$p_1 = p_{\text{dugattyú}} = p_0 = \frac{mg}{A}.$$

Az ideális gáz belső energiája:

$$E_{\text{belső}} = \frac{f}{2} pV,$$

ahol f a gázmolekulák szabadsági fokainak száma.

Miután a csillapodó rezgőmozgást végző dugattyú végül megáll, az általunk végzett W munka valamennyivel növeli a gáz belső energiáját. Mivel a gáz nyomása az új egyensúlyi helyzetben ugyanannyi, mint kezdetben volt, a gáz térfogatának meg kellett nőnie, vagyis a dugattyú megemelkedik, és emiatt a gravitációs helyzeti energiája is megnő.

A dugattyú megemelkedése az eredeti helyzetéhez képest legyen Δh. Ekkor a helyzeti energiájának növekedése

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = mg\Delta h, \tag{1}$$

a gáz belső energiájának növekedése pedig

$$\Delta E_{\text{belső}} = \frac{f}{2}\Delta(pV) = \frac{f}{2} p_0 \Delta V, \tag{2}$$

ahol $\Delta V = V_1 - V_0 = A\Delta h$ a gáz térfogatváltozása.

Az általunk végzett W munka a kétféle energiaváltozás összegével egyezik meg:

$$W = \Delta E_{\text{helyzeti}} + \Delta E_{\text{belső}}. \tag{3}$$

Helyettesítsük be az (1) és (2) egyenleteket a (3)-ba, majd alakítsuk át:

$$W = mg\Delta h + \frac{f}{2} p_0 \Delta V = \frac{mg}{A} A\Delta h + \frac{f}{2} p_0 \Delta V = p_0 \Delta V + \frac{f}{2} p_0 \Delta V,$$

ami így is felírható:

$$W = \left(\frac{f}{2} + 1\right) p_0 (V_1 - V_0) = \left(\frac{f}{2} + 1\right)(p_0 V_1 - p_0 V_0). \tag{4}$$

Használjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét a kezdeti és az új egyensúlyi helyzetre.

$$p_0 V_0 = nRT_0, \tag{5}$$

$$p_0 V_1 = nRT_1, \tag{6}$$

ahol R az egyetemes gázállandó. Helyettesítsük be (4)-be az (5) és (6) egyenleteket:

$$W = \left(\frac{f}{2}+1\right)(nRT_1 - nRT_0) = \left(\frac{f}{2}+1\right)nR(T_1 - T_0).$$

A tartályban levegő van, aminek $f = 5$ a szabadsági foka, tehát:

$$T_1 = \frac{2W}{(f+2)nR} + T_0 = \frac{2W}{7nR} + T_0.$$

Ez az eredmény akkor sem változik, ha a dugattyút ugyanennyi munkavégzéssel nem megemeljük, hanem lenyomjuk, hiszen a $W > 0$ munka ekkor is csak a gáz belső energiáját és a dugattyú helyzeti energiáját növeli. (A tartály és a dugattyú jó hőszigetelő, ezért a rendszer nem ad le hőt, továbbá a külső térben nincs gáz, így annak mozgásba hozatalával és a mozgási energiájának esetleges megnövelésével sem kell foglalkoznunk.) Tehát a lenyomott dugattyú esetében – a rezgések lecsillapodása után – ugyanaz az egyensúlyi helyzet alakul ki, mint a megemelt dugattyúnál, vagyis

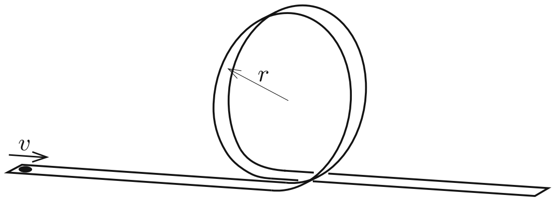
$$T_1 = \frac{2W}{7nR} + T_0$$

lesz a tartályban lévő levegő hőmérséklete az új egyensúlyi állapotban.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Fekete András Albert, Sas Mór, Szabó László és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 2 dolgozat.

P. 5221. *Egy piciny (pontszerűnek tekinthető) játékautónak építünk egy súrlódásmentes pályát, amely vízszintes szakasszal indul, azután egy r sugarú, függőleges síkú, kör alakú hurokban folytatódik, majd a hurok kezdetéhez visszaérve ismét vízszintessé válik. Legyen v az a legkisebb indítási sebesség, amellyel a kisautó már végighalad a pályán. Ezen v sebesség hányad részével kell elindítani az autót, hogy a hurokszakaszról leválva éppen a kör átellenes pontjába csapódjon majd be?*



(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

Megoldás. Az autó hurkon való áthaladásának kritikus pontja a pálya legfelső pontja. Ha itt a nyomóerő éppen nullára csökken, akkor még nem válik el az autó a pályától. A körmozgás feltétele, hogy a testre ható erők eredője létrehozza a centripetális gyorsulást. Ha a játékautó sebessége a pálya legfelső pontjában v_1, akkor határesetben (amikor a test még *éppen* nem válik el a kör alakú pályától):

$$mg = m\frac{v_1^2}{r}, \qquad \text{tehát} \qquad v_1^2 = rg.$$

A folyamat során a disszipatív erők hatása elhanyagolható, így a mechanikai energia megmarad.

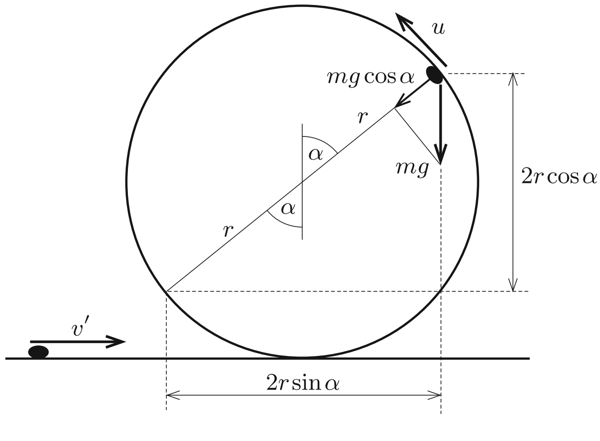
$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mv_1^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr,$$

vagyis

$$v = \sqrt{5rg}\,.$$

Az autó a körmozgás második negyedében tud leválni a pályájáról (előtte – nem elegendően nagy kezdősebességnél – csak visszacsúszna a körvíven). Legyen a leváláskor a játékautó sebessége u, a hozzá húzott sugár függőlegessel bezárt szöge α (lásd az *ábrát*). Ekkor még éppen körpályán halad (a pálya nyomóereje már éppen nullára csökkent), így a mozgásegyenlet sugár irányú komponense:

$$mg\cos\alpha = m\frac{u^2}{r}, \qquad \text{vagyis} \qquad u^2 = rg\cos\alpha.$$



A szemközti pontba való becsapódásáig mozgása ferde hajítás.
Vízszintesen:

$$2r\sin\alpha = u_x t = ut\cos\alpha, \qquad \text{azaz} \qquad t = \frac{2r\sin\alpha}{u\cos\alpha}.$$

Függőlegesen:

$$2r\cos\alpha = \frac{g}{2}t^2 - ut\sin\alpha.$$

A t-re és u^2-re kapott kifejezések behelyettesítésével, majd $2r$-rel egyszerűsítve kapjuk:

$$\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$$

Innen (a trigonometrikus Pitagorasz-tételt kihasználva):

$$\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tehát

$$\alpha = 45^\circ.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = (1+\cos\alpha)mgr + \frac{1}{2}mu^2,$$

$$v'^2 = \big(2+\sqrt{2}\big)rg + rg\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$v' = \sqrt{\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)rg},$$

és végül a keresett arány:

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{10}} \approx 0{,}91.$$

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 2, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5225. *Egy* 10 dm^2 *alapterületű fazékban* 5 *liter,* 998 kg/m^3 *sűrűségű,* 20 °C*-os víz található. A vizet felmelegítjük* 80 °C*-ra. A víz térfogati hőtágulási együtthatóját a* 20 °C *és* 80 °C *közötti hőmérséklet-tartományban tekintsük állandó,* $\beta_{víz} = 4\cdot 10^{-4}$ 1/K *értékűnek. A fazék rozsdamentes acélból készült, melynek térfogati hőtágulási együtthatója* $\beta_{acél} = 5\cdot 10^{-5}$ 1/K*. A víz párolgását hanyagoljuk el.*

a) Mekkora kezdetben a víz hidrosztatikai nyomása az edény alján? Mennyivel változik meg ez az érték a melegítés során?

b) Mennyivel emelkedik meg a melegítés során a fazékban a vízszint?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Ismert adatok:
A fazék alapterülete kezdetben: $A_0 = 10$ dm$^2 = 0{,}1$ m^2;
a víz térfogata kezdetben: $V_0 = 5$ liter $= 5$ dm$^3 = 0{,}005$ m^3;
a víz sűrűsége (kezdetben): $\varrho_0 = 998$ kg/m^3;
a kezdeti hőmérséklet: $T_0 = 20$ °C;

a végső hőmérséklet: $T_1 = 80\ ^\circ\mathrm{C}$ (tehát a hőmérséklet megváltozása: $\Delta T = T_1 - T_0 = 60\ ^\circ\mathrm{C}$);
a víz (átlagos) hőtágulási együtthatója: $\beta_{\text{víz}} = 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$;
az acél (térfogati) hőtágulási együtthatója: $\beta_{\text{acél}} = 5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$; a lineáris hőtágulás együtthatója $\alpha_{\text{acél}} = \frac{1}{3}\,\beta_{\text{acél}}$, a keresztmetszet (terület) relatív tágulásának együtthatója pedig $2\alpha_{\text{acél}} = \frac{2}{3}\,\beta_{\text{acél}}$.

a) Kezdetben a nyomás az edény alján:

$$p_0 = \frac{\varrho_0 V_0 g}{A_0} = 489{,}5\ \mathrm{Pa}.$$

A melegítés során a víz tömege nem változik meg, a súlya tehát $\varrho_0 V_0 g$ marad, az edény keresztmetszete viszont megnő, $A_0\left(1+\frac{2}{3}\beta_{\text{acél}}\Delta T\right)$ nagyságú lesz. Ezek szerint a hidrosztatikai nyomás a melegítés után

$$p_1 = \frac{\varrho_0 V_0 g}{A_0\left(1+\frac{2}{3}\beta_{\text{acél}}\Delta T\right)} = 488{,}5\ \mathrm{Pa},$$

az eredeti értéknél 1 Pa-lal kevesebb lesz.

b) Kezdetben a víz magassága

$$h_0 = \frac{V_0}{A_0} = 0{,}05\ \mathrm{m}.$$

Az edény megváltozott keresztmetszete:

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{2}{3}\beta_{\text{acél}}\Delta T\right),$$

a víz megváltozott térfogata pedig

$$V_1 = V_0(1+\beta_{\text{víz}}\Delta T)$$

lesz. Ezek szerint a felmelegített víz magassága a felmelegített fazékban

$$h_1 = \frac{V_1}{A_1} = \frac{V_0(1+\beta_{\text{víz}}\Delta T)}{A_0\left(1+\frac{2}{3}\beta_{\text{acél}}\Delta T\right)} = \frac{1+\beta_{\text{víz}}\Delta T}{1+\frac{2}{3}\beta_{\text{acél}}\Delta T}h_0 = 5{,}11\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m},$$

az eredeti értéknél kb. 1,1 mm-rel magasabb lesz.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás, kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 12 dolgozat.

P. 5227. *a*) *Két doboz mindegyikében egy-egy* 1 kΩ*-os,* 2 kΩ*-os,* 3 kΩ*-os,* 4 kΩ*-os és* 5 kΩ*-os ellenállás található. A két dobozból találomra kiveszünk egy-egy ellenállást, és sorosan kapcsoljuk ezeket. Mekkora valószínűséggel lesz az eredő ellenállás* 2 kΩ, 3 kΩ, 4 kΩ, 5 kΩ, 6 kΩ, 7 kΩ, 8 kΩ, 9 kΩ, *illetve* 10 kΩ?

b) Másik két doboz mindegyikében egy-egy 60 kΩ*-os,* 30 kΩ*-os,* 20 kΩ*-os,* 15 kΩ*-os és* 12 kΩ*-os ellenállás található. A két dobozból találomra kiveszünk egy-egy ellenállást, és párhuzamosan kapcsoljuk ezeket. Mekkora valószínűséggel lesz az eredő ellenállás* 30 kΩ*,* 20 kΩ*,* 15 kΩ*,* 12 kΩ*,* 10 kΩ*, illetve* 10 kΩ*-nál kisebb értékű?*

(4 pont) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

Megoldás. Két dobozból veszünk ki ellenállásokat. Mivel egy-egy dobozban 5 ellenállás van, a választási lehetőségek száma mindkét esetben $5^2=25$.

a) Soros kapcsolás esetében az ellenállások összeadódnak.

A 2 kΩ-os eredő csak egyféleképpen kapható meg: ha mindegyik dobozból 1 kΩ-os ellenállást veszünk ki. Ugyanez a helyzet a 10 kΩ-os eredménnyel, az csak $5\ \mathrm{k\Omega}+5\ \mathrm{k\Omega}$ esetén valósítható meg. Ezek valószínűsége (a kedvező lehetőségek száma osztva az összes lehetőség számával):

$$p_2=p_{10}=\frac{1}{25}=0{,}04=4\%.$$

(A p-vel jelölt valószínüség indexe a soros eredő kiloohmban mért értékére utal.)

A 3 kΩ-os eredőre már két lehetőségünk van ($1\ \mathrm{k\Omega}+2\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $2\mathrm{k\Omega}+1\ \mathrm{k\Omega}$). A 9 kΩ-os eredő ellenállás is kétféleképpen állhat elő ($4\ \mathrm{k\Omega}+5\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $5\ \mathrm{k\Omega}+4\ \mathrm{k\Omega}$), ezek valószínűsége tehát

$$p_3=p_9=\frac{2}{25}=0{,}08=8\%.$$

A 4 kΩ-os eredőhöz háromféle választás vezethet ($1\ \mathrm{k\Omega}+3\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $3\ \mathrm{k\Omega}+1\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $2\ \mathrm{k\Omega}+2\ \mathrm{k\Omega}$), és ugyancsak háromféleképpen állhat elő a 8 kΩ-os eredő ($3\ \mathrm{k\Omega}+5\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $5\ \mathrm{k\Omega}+3\ \mathrm{k\Omega}$ vagy $4\ \mathrm{k\Omega}+4\ \mathrm{k\Omega}$). Ezek valószínűsége:

$$p_4=p_8=\frac{3}{25}=0{,}12=12\%.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$p_5=p_7=\frac{4}{25}=0{,}16=16\%,$$

és végül (mivel 6 kΩ-os eredő ötféleképpen állítható elő)

$$p_6=\frac{5}{25}=0{,}20=20\%.$$

Így valóban minden lehetőséget figyelembe vettünk, hiszen

$$4\%+8\%+12\%+16\%+20\%+16\%+12\%+8\%+4\%=100\%.$$

b) Párhuzamos kapcsolás esetében az eredő ellenállás a kapcsolás bármelyik ellenállásánál kisebb értékű.

Az eredő ellenállás képlete:

$$\frac{1}{R_\mathrm{e}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\quad \text{ebből}\quad R_\mathrm{e}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

A 30 kΩ-os eredőt csak nála nagyobb értékű ellenállások párhuzamos kapcsolásával kaphatunk. Erre csak egyetlen egy lehetőség van: mindkét dobozból a 60 kΩ-os ellenállást húzzuk ki. Ez jó választás, hiszen

$$R_\mathrm{e}=\frac{60\ \mathrm{k\Omega}\cdot 60\ \mathrm{k\Omega}}{60\ \mathrm{k\Omega}+60\ \mathrm{k\Omega}}=30\ \mathrm{k\Omega}.$$

Eszerint a valószínűség:

$$p_{30}=\frac{1}{25}=0{,}04=4\%.$$

A 20 kΩ-os eredőt csak a nála nagyobb, vagyis a 30 és/vagy a 60 kiloohmos ellenállásból kaphatjuk meg. Ez kétféleképpen valósulhat meg:

$$R_\mathrm{e}=\frac{30\ \mathrm{k\Omega}\cdot 60\ \mathrm{k\Omega}}{30\ \mathrm{k\Omega}+60\ \mathrm{k\Omega}}=20\ \mathrm{k\Omega}$$

és

$$R_\mathrm{e}=\frac{60\ \mathrm{k\Omega}\cdot 30\ \mathrm{k\Omega}}{60\ \mathrm{k\Omega}+30\ \mathrm{k\Omega}}=20\ \mathrm{k\Omega}.$$

(A két egyforma ellenállás eredője vagy nagyobb, vagy kisebb lenne 20 kΩ-nál.) A kérdéses valószínűség:

$$p_{20}=\frac{2}{25}=0{,}08=8\%.$$

Hasonló módon láthatjuk be, hogy

$$p_{15}=\frac{3}{25}=0{,}12=12\%,$$

$$p_{12}=\frac{4}{25}=0{,}16=16\%,$$

és végül

$$p_{10}=\frac{5}{25}=0{,}2=20\%.$$

A fenti esetek a 10 kΩ-nál *nem kisebb* eredőjű kapcsolások mindegyikét tartalmazzák, így $p_{\geqslant 10}=p_{30}+p_{20}+p_{15}+p_{12}+p_{10}=0{,}6=60\%$. Annak valószínűsége, hogy az eredő ellenállás 10 kΩ-nál *kisebb,* a „hiányzó” 40%-kal egyenlő:

$$p_{<10}=1-p_{\geqslant 10}=0{,}4=40\%.$$

Endrész Balázs (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

Megjegyzés: Az első esetben az ellenállások nagysága, a második esetben pedig az ellenállások reciprokának nagysága *számtani sorozatot* alkot. Ez tette lehetővé, hogy különböző ellenálláspárok eredője éppen ugyanakkorának bizonyuljon.

(G. P.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

P. 5233. *Egy levelibéka egy tőle vízszintesen s távolságra, de h magasságban lévő levélre akar a talajról felugrani. Milyen irányba és mekkora sebességgel kell elrugaszkodnia, hogy a legkevesebb energiára legyen ehhez szüksége?*

(*5 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

Megoldás. Jelöljük az elugró levelibéka kezdősebességének vízszintes komponensét v_x-szel, a függőleges összetevőt v_y-nal, a mozgás idejét pedig t-vel. A ferde hajítás képletei szerint

$$v_x t = s \qquad \text{és} \qquad h = -\frac{g}{2}t^2 + v_y t,$$

vagyis

$$v_x = \frac{s}{t} \qquad \text{és} \qquad v_y = \frac{h + (g/2)t^2}{t} = \frac{h}{t} + \frac{g}{2}t.$$

Ezek segítségével kiszámíthatjuk a béka elrugaszkodásakor végzett munkáját, ami a kezdeti mozgási energiájával egyenlő:

$$E = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right).$$

Ennek a kifejezésnek keressük a minimumát a t változó függvényében. A minimum „helye" szempontjából az $m/2$-es tényező érdektelen, tehát elhagyható. Tekintsük a

$$v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{h}{t} + \frac{g}{2}t\right)^2 = \frac{s^2 + h^2}{t^2} + \frac{g^2 t^2}{4} + gh$$

kifejezést! Az utolsó tag t-től független állandó, tehát a minimum keresésénél elhagyhatjuk. Másrészt a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$\frac{s^2 + h^2}{t^2} + \frac{g^2 t^2}{4} \geqslant 2\sqrt{\frac{s^2 + h^2}{t^2} \cdot \frac{g^2 t^2}{4}} = g\frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{g}.$$

Az egyenlőség a legkisebb elrugaszkodási energiának felel meg, amihez tartozó $t = t_0$ időtartamra

$$\frac{s^2 + h^2}{t_0^2} = \frac{g^2 t_0^2}{4}, \qquad t_0^2 = 2\frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{g}.$$

A levelibéka kezdősebességének a vízszintessel bezárt α szögére (vagyis az elrugaszkodás irányára) fennáll:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{h}{t_0} + \frac{g}{2}t_0}{\frac{s}{t_0}} = \frac{h}{s} + \frac{g}{2s}t_0^2 = \frac{h}{s} + \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s},$$

vagyis

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h+\sqrt{h^2+s^2}}{s}.$$

($h=0$ esetén a jól ismert $\alpha = 45°$-os eredményt kapjuk.)

Az elugrás sebességének nagysága (optimális esetben):

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{\frac{h^2+s^2}{t_0^2} + \frac{g^2t_0^2}{4} + gh} = \sqrt{g\left(\sqrt{s^2+h^2}+h\right)}.$$

Vakaris Klyvis (Brüsszel, Belgium, 12. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

P. 5249. *Az AA jelű akkumulátor hossza* 5 cm, *átmérője* 1,4 cm.

a) Mekkora energiát tárol egy 1,2 V*-os,* 2800 mAh*-s akku?*

b) Mekkora sebességre gyorsulna fel ez a 17 grammos akku, ha az eltárolt energiáját teljesen a saját mozgási energiájává alakítaná?

c) Hányszor kevesebb energiával lehetne ugyanekkora térfogatú vizet 20 °C*-ról* 100 °C*-ra melegíteni?*

d) Mennyi energia van ugyanekkora térfogatú kristálycukorban, amelynek sűrűsége kb. 0,77 g/cm^3, *energiatartalma pedig* 1680 kJ/100 gramm?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

Megoldás. *a*) A tárolt (elektromos) energiát úgy kaphatjuk meg, hogy a feszültséget, az áramerősséget és a működés idejét összeszorozzuk. A 2,8 Ah-s akkumulátor 2,8 ampert tud leadni 1 órán, vagyis 3600 másodpercen keresztül, így a tárolt energia

$$E_0 = U\cdot I\cdot t = 1{,}2\ \mathrm{V}\cdot 2{,}8\ \mathrm{A}\cdot 3600\ \mathrm{s} = 12\,096\ \mathrm{J} \approx 12\ \mathrm{kJ}.$$

b) Egy $m = 17\ \mathrm{g} = 0{,}017\ \mathrm{kg}$ tömegű test $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiája akkor egyezik meg a fenti E_0 energiával, ha a sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2\ \mathrm{kJ}}{0{,}017\ \mathrm{kg}}} = 1190\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

c) Az r sugarú, ℓ hosszúságú akkumulátor térfogata:

$$V = r^2\pi\ell = (0{,}7\ \mathrm{cm})^2\cdot\pi\cdot 5\ \mathrm{cm} = 7{,}70\ \mathrm{cm}^3.$$

Ekkora térfogatú víz tömege

$$m_{\text{víz}} = 7{,}70\ \mathrm{g} = 0{,}0077\ \mathrm{kg}.$$

A víz fajhője $c = 4{,}2\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\ ^\circ\mathrm{C}}$, a hőmérsékletének emelkedése $\Delta T = 80\ ^\circ\mathrm{C}$, a felmelegítéséhez szükséges hő

$$Q = cm_{\text{víz}}\Delta T = 2{,}59\ \mathrm{kJ},$$

ami az E_0 elektromos energiánál 4,6-szer kevesebb.

d) Az akkumulátor térfogatával megegyező térfogatú kristálycukor tömege kb. 6 g. Ezt a megadott „energiatartalommal” összeszorozva $E_{\text{kémiai}} \approx 100$ kJ értéket kapunk, ami az E_0 elektromos energiának mintegy nyolcszorosa.

Kovács Kinga (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A feladat az ugyanakkora helyen „tárolható” különböző fajtájú (elektromos, mechanikai, termikus és kémiai) energia nagyságrendjének összehasonlítása szempontjából tanulságos. (A Szerk.)

74 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 399. Hűtőszekrény fagyasztójában készítsünk különböző alakú jégdarabokat, és ezek felhasználásával mérjük meg a jég sűrűségét!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 721. Egy építőkocka-készletben minden elem tömör fából készült, egyforma tömegű és téglatest alakú. Minden téglatest egyik éle 6 cm, a másik kettő lehet eltérő. Lali négy elemet egymásra rakott, legfelülre egy kocka alakú darab került, és minden elem teljes alsó lapjával támaszkodott az alatta lévőre. Elgyönyörködött a toronyban, és azt is észrevette, hogy a torony különleges: minden emelet alatt ugyanakkora a nyomás. Rajzoljuk le a tornyot, és tüntessük fel a rajzon a méreteket is!

(*3 pont*)

G. 722. Felül nyitott edényben gázlángon vizet forralunk. Közvetlenül a gáz elzárása és a láng kialvása után fehér gőzfelhőt figyelhetünk meg az edény felett. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget!

(*3 pont*)

G. 723. Van egy 5 dioptriás gyűjtőlencsénk és egy -8 dioptriás szórólencsénk. A sötét szobába a lyukas függönyön át párhuzamos, vízszintes fénynyaláb érkezik, és kerek foltot vetít a falra. Melyik lencsét és hova kell helyeznünk, hogy a falon a folt ponttá zsugorodjon össze?

Ha most a másik lencsét is a fény útjába állítjuk, hová tegyük, hogy ismét párhuzamos fénynyalábot nyerjük, és ismét kerek fényfoltot lássunk a falon? Ez a fényfolt kisebb vagy nagyobb lesz az eredetinél?

(*3 pont*)

G. 724. Egy kísérletnél azt halljuk, hogy az 50 Hz-es váltóárammal táplált vasmagos tekercs zúg. Mi az oka a zúgásnak? Mekkora frekvenciájú hangot hallhatunk?

(*3 pont*)

P. 5261. A 2017. évi Tour de France hetedik szakaszának győztesét célfotó segítségével állapították meg: Marcel Kittel 6 milliméter előnnyel 3 tízezred másodperccel hamarabb ért a célba, mint Edvald Boasson Hagen.

a) Mekkora sebességgel érkeztek a kerékpárversenyzők a célba?

b) A hivatalos eredménylista szerint az első három versenyző azonos, 5 óra 3 perc 18 másodperc alatt tette meg a 213,5 kilométeres távot. Mekkora a kerékpárosok egész távra vonatkozó átlagsebessége?

c) Mi az oka annak, hogy az első három befutó eredményét azonos idővel rögzítették?

(*3 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5262. Forma 1-es pilóták olyan versenyen vesznek részt, ahol nem a legnagyobb sebességgel lehet eredményesen szerepelni. Egy kijelölt, $d = 1250$ m hosszúságú távolságot állandó sebességgel kell megtenni, majd mindenkinek $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ lassulással kell megállni. Az győz, aki az indulástól számítva a legrövidebb idő alatt áll meg.

a) Mekkora sebességgel kell haladnia az állandó sebességű szakaszon a győztes pilótának, ha a lehető legrövidebb idő alatt akar megállni?

b) Mekkora utat tesz meg ekkor az indulástól a megállásig?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5263. A magyar előírások szerint engedély nélkül csak olyan fegyver tartható, melynek torkolati energiája (tehát az az energia, amivel a lövedék a cső torkolatát elhagyja) nem haladja meg a 7,5 J-t. Ennek az előírásnak pontosan megfelelő légpuskánk csövének hossza 480 mm, csőátmérője 4,5 mm és lövedéke szabályos ólomgolyó.

a) Mekkora a golyót gyorsító erő átlaga egy lövés alatt? Mekkora az átlagos nyomás a csőben?

b) Mekkora a golyó torkolati sebessége?

c) Mekkora a golyóra ható közegellenállási erő röviddel a cső elhagyása után?

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5264. Egy versenyautó 60 m sugarú, kör alakú tesztpályán álló helyzetből indul. Érintőleges gyorsulása a mozgás első négy másodpercében állandó, nagysága 6 m/s^2.

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az idő függvényében, hogy mekkora szögsebességgel forog az autó gyorsulásvektora a menetirányhoz képest!

b) Mennyi idő múlva lesz ez a szögsebesség a legnagyobb? Mekkora lesz ez a maximális szögsebesség?

(*5 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes, Szlovákia

P. 5265. Vízilabdázó 70 cm kerületű, 400 g tömegű vízilabdát tart a vízszint felett úgy, hogy a labda éppen érinti a vízfelszínt. Legalább mennyi munkát kell végeznie a vízilabdázónak, hogy a labdát teljes egészében a víz alá nyomja?

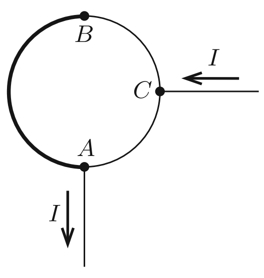
(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5266. Az f szabadsági fokú molekulákból álló ideális gáz valamely egyensúlyi folyamata során úgy tágul ki, hogy közben nyomása a térfogatával egyenes arányban növekszik. A végzett munkánál hányszor több hőt vesz fel ilyenkor a gáz?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

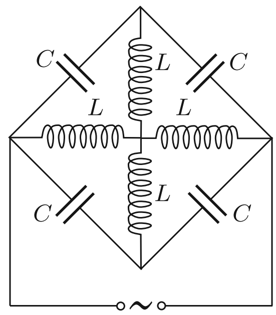
P. 5267. Pista vizsgálgatja szemüvegét. A szemüveg a Nap fényét a lencsétől 50 cm-re fókuszálja. Észreveszi, hogy a Nap fényét visszaverve két fényesebb pont (fókuszpont) is található, az egyik 17, a másik 7 cm-rel a lencse előtt. Mekkora a lencse anyagának törésmutatója?

(*5 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest



P. 5268. Egy $d_1 = 3$ mm és egy $d_2 = 1{,}5$ mm átmérőjű rézvezetéket úgy forrasztunk össze, hogy az egyes vezetékdarabok félköröket alkotva $r = 4$ cm sugarú körré egészítsék ki egymást. A zárt kör egyik forrasztási pontjához (A) és a vékonyabbik huzalból készült félkör felezőpontjához (C) egy-egy igen hosszú egyenes vezeték csatlakozik. Határozzuk meg a körvezető középpontjában a mágneses mező indukcióvektorát, ha a csatlakozó vezetékekben $I = 25$ A erősségű áram folyik!

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5269. Mekkora frekvenciájú szinuszos váltóárammal szemben képvisel az *ábrán* látható összeállítás végtelen nagy ellenállást?

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5270. A radon 222-es izotópjának felezési ideje 5508 perc. Hány nap elteltével csökken egytizedére a radon aktivitása?

(*4 pont*) *Tankönyvi feladat nyomán*

P. 5271. Egy pontszerű test az *ábrán* látható kétféle útvonalon juthat el az A pontból az ℓ távolságban lévő B pontig. Az a) esetben a test vízszintes egyenes pályán mozog, a b) esetben pedig egy függőleges síkban elhelyezkedő, h mélységű körív mentén. Mindkét mozgás kezdősebessége v_0. Melyik mozgás tart hosszabb ideig? (A súrlódás és a légellenállás elhanyagolható.)

Adatok: $v_0 = 1$ m/s, $\ell = 1$ m, $h = 2{,}5$ cm.

(*6 pont*) Közli: *Berke Martin,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2020. december 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 8. November 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 477): **K. 669.** Let us consider the set of 3-digit positive integers containing all the digits 1, 2, 3 exactly once. Find the smallest positive integer that contains each number from the previous set as consecutive digits. **K. 670.** Grandma bought two candles: the red candle was 2 cm longer than the blue one. On All Saints' Day she lit the red candle at 5:30 p.m. then she lit the blue candle at 7 p.m. and let them burn all the way down. The two candles were equal in length at 9:30 p.m. The blue candle burned out at 11 p.m and the red one finished at 11:30 p.m. What was the initial length of the red candle? **K. 671.** We know that the first five terms of an increasing arithmetic sequence are all positive primes. Find the smallest prime at the 5$^{\text{th}}$ position. **K. 672.** A garden is divided into 16 patches as shown in the *figure.* In each patch, either roses or tulips or daisies or gerberas are grown: only one type of flower in each, but every row, every column, and both diagonals contain every type of flower. In how many different ways is it possible to arrange the flowers in this way? (Two arrangements are considered different if there exists a patch that contains a different kind of flower.) **K. 673.** The students in a class (we do not know how many of them there are) decided that everyone would buy some small present to everyone else for Christmas, and they would also buy some present together for each of their 11 teachers. Unfortunately, the Christmas party was cancelled. Then they decided to divide the presents equally among all the siblings of the students. (Each sibling gets the same present.) Was that possible if the total number of siblings was 15?

New exercises for practice – competition C (see page 478): **Exercises up to grade 10: C. 1630.** The numbers 1 to 32 are written in the white fields of a chessboard, using each number once. Then the sum of the numbers in the adjacent fields is entered in each black field. What are the smallest and largest possible values of the sum of the numbers in the black fields? **C. 1631.** Let AB be a chord in a unit circle. Triangle ABC is right-angled at B, and vertex C lies on the circle. Triangle ABD is isosceles right-angled, and AB is the hypotenuse. How long is the chord AB if the two triangles have equal areas? What is this area? **Exercises for everyone: C. 1632.** How many different infinite arithmetic sequences of positive integer terms are there in which 24, 744 and 2844 all occur? Two arithmetic sequences are considered different if they have different first terms or different common differences. **C. 1633.** Let P be an interior point of one side of a unit square. Consider all parallelograms with one vertex at P, and one on each side of the square. Prove that if P is not the midpoint of the side then (i) there are exactly two rectangles among these parallelograms, and (ii) the sum of the areas of these two rectangles is 1. **C. 1634.** Prove the following inequality: $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\cdots+\frac{1}{2017\cdot 2020}<\frac{1}{3}$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1635.** Given two intersecting circles, construct* a secant through one of the intersection points such that the segment bounded by the two circles is divided $1:2$ by the intersection point. Write down and explain the steps of the construction. (Elementary steps like bisecting an angle or reflecting a point in a line do not need to be described in detail.) **C. 1636.** The Hungarian poet Dezső Kosztolányi spent a few weeks in Paris when he was a student. When he was given for change a ten-centime coin not in circulation any more, he wanted to give it away. He did not succeed, which he explained to himself by the expression on his face revealing his intentions. Therefore he decided to get 9 valid ten-centime coins, mix them with the worthless coin in his pocket, and by not looking at them he pays with one of them in a shop. He continued doing so until he had a single coin in his pocket: the coin out of circulation. What is the probability of this?

New exercises – competition B (see page 479): **B. 5126.** Prove that if $n\geqslant 3$, then there exist n distinct positive integers such that the sum of their reciprocals is 1. (*3 points*) **B. 5127.** Given a convex angle and a line segment of length k, determine the locus of those points inside the angle through which there exists a line cutting off a triangle of perimeter k from the angle. (*4 points*) **B. 5128.** Find all pairs of relatively prime integers (x,y) such that $x^2+x=y^3+y^2$. (*4 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 5129.** Two players are taking turns in selecting one of the coefficients a, b and c of the polynomial x^3+ax^2+bx+c, and giving it some integer value of their choice. Prove that the starting player can achieve that (after the three steps) all three roots of the polynomial should be integers (i.e. that the polynomial can be expressed as a product of three polynomials of integer coefficients). (*3 points*) **B. 5130.** There are n points in

*with straight edge and compasses on paper, or with appropriate geometric construction software the plane. We know that for any k points ($k \geqslant 2$), it is possible to select two of them with distance at most 1. Show that the points can be covered with $k-1$ disks of unit radius. (*5 points*) **B. 5131.** Let H be an equilateral triangle of unit area, let O be a fixed point, and for any point P let H_P denote the triangle obtained from triangle H by a parallel shift with vector $\overrightarrow{OP}$. Consider the set N of points P for which the area of the intersection $H \cap H_P$ is at least $4/9$. What is the area of N? (*5 points*) (Based on the idea of *V. Vígh,* Székkutas) **B. 5132.** How many different strings of 2021 letters can be made of letters A, B and C such that the number of A's is even and the number of B's is of the form $3k+2$? (*6 points*) **B. 5133.** Given six points in the space, no four of which are coplanar, prove that they can be divided into two sets of three such that the two triangular plates spanned by the two sets of three points should intersect each other. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 480): **A. 786.** In a convex set S that contains the origin it is possible to draw n disjoint unit circles such that viewing from the origin non of the unit circles blocks out a part of another (or a complete) unit circle. Prove that the area of S is at least $n^2/100$. (Submitted by: *Dömötör Pálvölgyi,* Budapest) **A. 787.** Let p_n denote the n^{th} prime number and define $a_n = \lfloor p_n \nu \rfloor$, where ν is a positive irrational number. Is it possible that there exist only finitely many k such that $\binom{2a_k}{a_k}$ is divisible by p_i^{10} for all $i = 1, 2, \ldots, 2020$? (Submitted by: *Abhishek Jha,* Delhi, India and *Ayan Nath,* Tezpur, India) **A. 788.** Solve the following system of equations: $x + \frac{1}{x^3} = 2y$, $y + \frac{1}{y^3} = 2z$, $z + \frac{1}{z^3} = 2w$, $w + \frac{1}{w^3} = 2x$.

Problems in Physics

(see page 506)

M. 399. Make different shapes of ice pieces in the freezer of a refrigerator and use them to measure the density of ice.

G. 721. In a building block set, every element is made of solid wood. Each of them has the same mass and has the shape of a cuboid. One side of each cuboid has a length of 6 cm, but the other two sides of the cuboids may be different. Luis put four blocks on top of one another, at the top there was a cube-shaped block. The whole bottom face of each block touched the face of the block below. Luis was amused by the tower, and also noticed that the tower is special for the pressure at the bottom face of each block is the same. Draw the sketch of the tower and also indicate in your figure the lengths of the sides of the cuboids. **G. 722.** In a pot, open at its top, water is boiled on a gas stove. Right after turning off the burner of the gas stove and after the flames ceased, white vapour cloud can be observed above the pot. Explain the phenomenon. **G. 723.** We have a converging and a diverging lens of powers of 5 dioptres and of -8 dioptres, respectively. A horizontal and parallel light beam enters into a dark room through a hole of a curtain, and a circular bright spot is created on the wall of the room. Which lens and where should be placed in order that the spot shrinks to a point? Then the other lens is put into the light beam as well. Where should it be placed in order that again a parallel beam of light be gained? Will this spot on the wall be smaller or greater than the original spot was? **G. 724.** In an experiment we can hear the humming sound of the iron core coil when 50 Hz AC current is given to it. What is the reason of the humming sound? What is the frequency of the humming sound?

P. 5261. The winner of stage 7 of the 2017 Tour de France was judged by photo finish. According to the photo finish Michael Kittel was only 6 millimetres ahead of Edvald Boason Hagen, the second, and their time difference was only 3 ten-thousands of a second.

a) At what speed did the cyclists travel at the finish? *b*) According to the official results the first three riders covered the 213.5 km distance during the same time of 5 hours 3 minutes and 18 seconds. What was the average speed of the riders for the whole distance? *c*) What may be the reason that the time of the first three riders was recorded to be the same? **P. 5262.** Formula One car drivers are participating in a race in which reaching the greatest speed is not the best tactic to win. A designated distance of $d = 1250$ m is to be covered at a constant speed, then each car has to stop at a deceleration of $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$. The winner is the driver who can stop in the least time, measured from the start of the car. *a*) What should the speed of the winning car be at the constant speed stage of the motion, if the driver wants to stop in the least time? *b*) How much distance does the winning car cover in this case from the start to the stop? **P. 5263.** According to the Hungarian gun law only those guns can be possessed without a license whose muzzle energy (the kinetic energy of the bullet as it is expelled from the muzzle of the gun) does not exceed 7.5 J. The length of the barrel of our air gun, which just satisfies the above rule, is 480 mm, the diameter of the barrel is 4.5 mm, and the bullet fired is a spherical lead shot. *a*) What is the mean force which accelerates the bullet during a shot? What is the average pressure in the barrel? *b*) What is the muzzle speed of the bullet? *c*) What is the drag force exerted on the bullet short after it leaves the barrel? **P. 5264.** A racing car starts from rest and goes along a circular race track of radius 60 m. Its tangential acceleration is constant in the first four seconds of its motion, its magnitude is $6\ \mathrm{m/s^2}$. *a*) Determine the angular speed at which the acceleration vector rotates with respect to the direction of the motion of the car. Sketch this angular speed as a function of the time. *b*) How much time elapses until this angular speed becomes the greatest? What is this greatest angular speed? **P. 5265.** A water polo player holds a ball above the water such that it just touches the surface of the water. The mass of the ball is 400 g, and its perimeter is 70 cm. At least how much work does the player have to do in order to push the ball totally under the water? **P. 5266.** A sample of ideal gas of degree of freedom f expands in an equilibrium process such that its pressure increases proportionally to the volume of the gas. By what factor will the absorbed heat by the gas be greater than the work done by the gas during the process? **P. 5267.** Steve is observing his eyeglasses. The lens of his glasses focuses the light of the Sun at a distance of 50 cm from the lens. He also observes that if the light of the Sun is reflected then two bright spots (foci) can be seen in front of the lens, one at a distance of 17 cm, and the other at a distance of 7 cm from the lens. What is the refractive index of the material of the lens? **P. 5268.** Two pieces of copper wires are soldered together, such that the two pieces form semicircles and together the wires form a circle of radius $r = 4$ cm. The diameters of the wires are $d_1 = 3$ mm and $d_2 = 1.5$ mm. To one of the solder points of the closed circle (A) and to the midpoint of the semicircle made of thinner wire (C) very long straight wires are connected (one to each point). Determine the magnetic induction at the centre of the circular wire, when the amperage in the straight wires is $I = 25$ A. **P. 5269.** What frequency sinusoidal AC supply is to be connected to the assembled elements shown in the *figure* in order that the arrangement have infinite resistance? **P. 5270.** The half life of the isotope radon-222 is 5508 minutes. How many days elapses until the activity of the radon sample decreases to one-tenth of its original value? **P. 5271.** A point-like object can move from point A to point B along the two paths shown in the *figure.* The distance between the two points is ℓ. In the case of *a*) the object moves along a horizontal straight path, and in the case of *b*) the object moves along a circular path in a vertical plane. The depth of the circular path is h. The initial speed of the object in both cases is v_0. Which motion lasts longer? (Air drag and friction is negligible.) *Data:* $v_0 = 1$ m/s, $\ell = 1$ m, $h = 2.5$ cm.