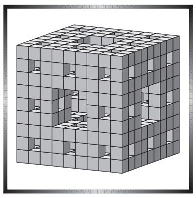
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1628. Adjunk meg két olyan különböző pozitív egész n számot, amelyre $4^n + 4^9 + 4^{100}$ négyzetszám.

C. 1629. Egy gömb átmegy egy 8 egység élű kocka egyik lapjának négy csúcsán és érinti a szemközti lapot. Határozzuk meg a gömb sugarát.

(*Horvát feladat*)

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5118–5125.)

B. 5118. Lehet-e x, $\dfrac{14x+5}{9}$ és $\dfrac{17x-5}{12}$ egyszerre egész szám?
(*3 pont*)

B. 5119. A hegyesszögű ABC háromszögben a beírt kör BC-vel párhuzamos érintője az AC oldalt a D pontban metszi. A D pont merőleges vetülete a BC oldalon az F pont. Mutassuk meg, hogy $AB = AD + BF$.

(*3 pont*)

B. 5120. Kiszíneztük a pozitív egész számokat úgy, hogy $a+b$ színét mindig egyértelműen meghatározza a és b színe; azaz, ha a és a' azonos színűek, valamint b és b' azonos színűek, akkor $a+b$ és $a'+b'$ is azonos színűek. Igazoljuk, hogy ha van olyan szín, amit többször is használtunk, akkor a színezés valahonnan kezdve periodikus.

(*4 pont*)

B. 5121. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok, n pedig pozitív egész szám:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

(*4 pont*)

B. 5122. Zicc ErWin a Bergengóc Kosárliga valaha volt legbiztosabb kezű büntetődobója. Bár karrierje során a legelső büntetőjét kihagyta, az összesen 222 222 büntetődobásából csupán 2020 maradt ki.

A bergengóc statisztikusok szerint egy kosaras egy büntetődobása *érdekes,* ha a dobást közvetlenül követően teljesül az, hogy a sikeres dobások (az összes dobáshoz mért) százalékos aránya pozitív egész szám. (Például ha valaki az addigi összesen 40 kísérletéből 12-t bedobott, akkor az utolsó dobása érdekes volt, mert $\frac{12}{40} \cdot 100 = 30 \in \mathbb{N}^+$, viszont az ezt követő 41-edik dobás – akár sikeres, akár nem – semmiféleképpen nem lesz érdekes.)

Legalább hány érdekes büntetője volt Zicc ErWinnek?

(*5 pont*)

B. 5123. Andi és Bori elosztotta egymás között a SET játék* 81 kártyalapját; Andihoz 40, Borihoz 41 lap került. Mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, ami SET-et alkot. Mennyi lehet az így kapott darabszámok összege?

(*6 pont*)

B. 5124. A szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, E a gúla csúcsa. Az AB és CE kitérő élek normáltranszverzálisának talppontjai az AB szakaszon P, a CE szakaszon pedig Q. Tudjuk, hogy Q felezi a CE élt. Határozzuk meg az $AP:PB$ arányt, és számítsuk ki az alaplapnak az oldallapokkal bezárt szögét.

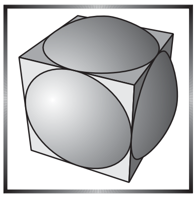
(*5 pont*)

B. 5125. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör középpontja O, az AB és DC félegyenesek az E pontban metszik egymást. A BCE körben az E-vel átellenes pont F. Mutassuk meg, hogy az AC, BD és OF egyenesek egy ponton mennek át.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (783–785.)



A. 783. *Poliminónak* nevezünk egy összefüggő alakzatot, ha azt egységnégyzetek oldalaik mentén történő összeillesztésével kapjuk. Legyen $n \geqslant 3$ egész szám. Keressük meg n függvényében a legnagyobb pozitív egész C-t, melyre teljesül a következő feltétel: ha egy végtelen négyzetrács minden mezőjét kiszínezzük n szín valamelyikével, akkor található egy legalább c területű polimínó, mely legfeljebb $n-1$ színt tartalmaz.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Stara Zagora) és *Stefan Gerdjikov* (Szófia)

*`https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml`.