gyöke. Mivel a polinomok folytonos függvények, ezért ha $a < b$ és $f(a)$ és $f(b)$ előjele különböző, akkor az f polinomnak a és b között van gyöke. Azt fogjuk belátni, hogy ha n páros, és $0 \leqslant n \leqslant 100$, akkor $p(n + 0,5) > 100$, ha pedig n páratlan, akkor $p(n + 0{,}5) < -100$. Az $S = \prod_{i=1}^{100} (n + 0,5 - i)$ szorzatban $100 - n$ darab negatív tényező van, és a $100 - n$ az n-nel megegyező paritású. Ezért elég azt belátni, hogy $|S| > 100$. A szorzatban legfeljebb két olyan tényező szerepel, amelynek az abszolút értéke legfeljebb 0,5, és legalább 96 olyan van, aminek legalább 2. Ezért a szorzat abszolút értéke legalább $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2^{96} = 2^{94} > 2^7 > 128 > 100$. Így páros n-re $p(n + 0{,}5) - i > 0$, páratlanra pedig $p(n + 0{,}5 - i) - i < 0$. Ebből következik, hogy ha $0 \leqslant n \leqslant 99$, akkor $n + 0{,}5$ és $n + 0{,}5 + 1$ között van gyöke $p(x) - i$-nek, és így van 100 különböző gyöke.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

38 dolgozat érkezett. 5 pontos 25, 4 pontos 11, 3 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (664–668.)

K. 664. Van hat érménk, melyek közül négy darab 100 grammos, kettő pedig 99 grammos. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg. Legalább hány mérésre van szükségünk ahhoz, hogy megtaláljuk az egyik könnyebb érmét?

K. 665. Egy utca egyik oldalán áll valahány játékrobot. Egy lépésben pontosan három robotnak tudjuk azt a parancsot adni, hogy menjen át az út túloldalára. Hány robot esetén lehet elérni, hogy a robotok az utca túloldalára kerüljenek át?

K. 666. Hány olyan hatjegyű szám van a 182 többszörösei között, melyben az első három számjegyből álló háromjegyű szám megegyezik az utolsó három számjegyből álló háromjegyű számmal?

K. 667. Induljunk ki egy pozitív egész számból. Egy lépésben, ha az aktuális számunk páros, akkor vegyük a felét, ha pedig páratlan, adjunk hozzá 1-et. A lépéseknek akkor van vége, ha el tudunk jutni az 1-hez.

a) Igaz-e, hogy bármelyik számból kiindulva előbb-utóbb (véges sok lépésben) az 1-hez jutunk?

b) Igaz-e, hogy legfeljebb 30 lépésben jutunk az 1-hez, ha egy négyjegyű számból indulunk ki?

K. 668. *a*) Hány olyan egyenlőszárú háromszög van, amelynek szárai 13 cm-esek és a területe 60 cm^2?

b) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek befogói páros egész számok, és területe 60 cm^2?

❄

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1623–1629.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1623. Legyen m pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy

a) létezik 3 olyan 2-hatvány, amely m-jegyű;

b) legfeljebb 4 olyan 2-hatvány létezik, amelyik m-jegyű.

(*Brazil feladat*)

C. 1624. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának P pontját kössük össze D-vel, BC oldalának Q pontját pedig A-val, az így kapott szakaszok metszéspontját jelöljük R-rel. Az ARD háromszög területe 1200, az APR háromszög területe 600, a $PBQR$ négyszög területe pedig $3380-240\sqrt{95}$ egység. Mekkora az $RQCD$ négyszög területe?

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

Feladatok mindenkinek

C. 1625. Igazoljuk, hogy az egyjegyű pozitív egész számok közül bármelyik ötöt kiválasztva akad közöttük néhány, amelyek összege osztható 10-zel.

C. 1626. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőpontja legyen F, a B-ből induló magasságvonal talppontja pedig T. Bizonyítsuk be, hogy ha $FAC\sphericalangle=30^\circ$, akkor $AF=BT$.

Róka Sándor (Nyíregyháza) javaslata alapján

C. 1627. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor $a>0$, $b>0$ és $c>0$.

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)