Beláttuk, hogy ha az állítás igaz a $k$ természetes számra, akkor a $k+1$ természetes számra is igaz. Mivel az állítás igaz az $n=1$-re, ezért minden természetes számra igaz.

*2. megoldás.* Írjuk fel a sorozat elemeit az első elem és a rekurziós képlet segítségével:

$$a_1 = 5 = 3^0 + 4,$$

$$a_2 = 3 \cdot 5 - 8,$$

$$a_3 = 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8 = 3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^2 \cdot 5 - (3+1) \cdot 8,$$

$$a_4 = 3 \cdot (3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8) - 8 = 3^3 \cdot 5 - 3^2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^3 \cdot 5 - (3^2 + 3 + 1) \cdot 8.$$

Ezek alapján: $a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \ldots + 1) \cdot 8$. A mértani sorozat összegképletével:

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \cdot 8 = 3^{n-1} \cdot 5 - 4 \cdot 3^{n-1} + 4 = 3^{n-1} + 4.$$

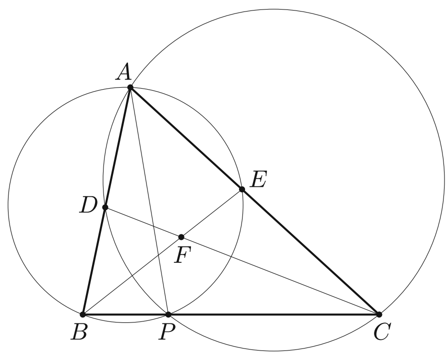
**Balga Attila, Székely Péter**
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium

## Matematika feladatok megoldása

**B. 4979.** *Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben $D$ és $E$ rendre az $AB$, illetve az $AC$ oldalnak belső pontja. A $BE$ és $CD$ szakaszok metszéspontja $F$. Bizonyítsuk be, hogy ha $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, akkor $ADFE$ húrnégyszög.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

**I. megoldás.** Legyen a $BC$ egyenes és az $AEB\triangle$ köréírt körének $B$-től különböző metszéspontja $P$. A $C$ pontnak erre a körre vonatkozó hatványa $CP \cdot BC = CE \cdot CA$.




Tudjuk, hogy $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$. Utóbbi egyenletből kivonva előbbit, azt kapjuk, hogy

$$BC \cdot (BC - CP) = BD \cdot BA.$$

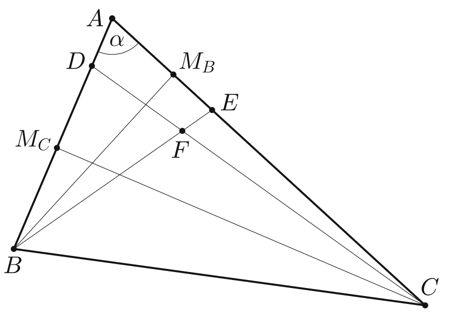
Viszont $BC - CP = BP$, így $BP \cdot BC = BD \cdot BA$.

Az egyenlet jobb oldala a $B$ pontnak az $ADC\triangle$ köréírt körére vonatkozó hatványa. Ezek szerint az egyenlőség miatt $P$ rajta van az $ADC\triangle$ köréírt körén is.

Legyen $APC\sphericalangle = \varphi$. Ekkor kerületi szögek egyenlősége miatt az $ADPC$ körön $ADC\sphericalangle = APC\sphericalangle = \varphi$. Tudjuk, hogy $APB\sphericalangle = 180° - \varphi$. Az $ABPE$ körön a kerületi szögek miatt $AEB\sphericalangle = APB\sphericalangle = 180° - \varphi$. Így $ADF\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \varphi$ és $AEF\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 180° - \varphi$, mivel $D$, $F$, $C$, illetve $E$, $F$, $B$ egy egyenesen vannak. Ezek szerint $ADF\sphericalangle + AEF\sphericalangle = 180°$, tehát $ADFE$ valóban húrnégyszög, hiszen két szemközti szögének összege 180°.

*Diszkusszió:* Akkor lehetne probléma az ábrával – és így a bizonyítással is –, hogyha az $AEB\triangle$ köréírt köre érinti $BC$-t, vagy pedig a $BC$ szakaszon kívül metszi másodszor. A $C$-ből felírt hatvány a körre ekkor is helyes lesz, így $CE \cdot CA = CP \cdot BC$ teljesülni fog. Hogyha a $BC$ szakaszon kívül metszi a kör az egyenest, az csak $B$-n túl lehet, így ha $P$ „rossz" helyen van, akkor $CP \geqslant BC$ teljesülni fog. Ennek alapján $CP \cdot BC \geqslant BC^2$, így a $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$ egyenletben $BD \cdot BA \leqslant 0$, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, mert ekkor $D$ nem belső pontja lenne az $AB$ oldalnak. Ezek szerint a feltétel alapján a $P$ pont a $BC$ szakasz belső pontja, az ábra mindig megfelelő, és a bizonyítás helyes.

*Tóth Balázs* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján




**II. megoldás.** Legyen az $ABC$ háromszög $A$-nál fekvő belső szöge $\alpha$, a $B$-ből, illetve $C$-ből induló magasságvonalak talppontjai pedig $M_B$ és $M_C$.

A $BC$ oldalra felírt koszinusztételből:

$$(1)\qquad BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha,$$

valamint a feltétel szerint:

$$(2)\qquad BC^2 = CA \cdot CE + BD \cdot BA.$$

(1) és (2) különbségéből:

$$0 = CA(CA - CE) + BA(BA - BD) - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha,$$

$$0 = AE \cdot CA + AD \cdot BA - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha.$$

Rendezés után:

$$(3)\qquad 2\cos\alpha = \frac{AE}{BA} + \frac{AD}{CA}.$$

Másrészt az $ACM_C$ és $ABM_B$ derékszögű háromszögekből $\cos\alpha$-t kifejezve:

$$(4)\qquad 2\cos\alpha = \frac{M_C A}{CA} + \frac{M_B A}{BA}.$$

(3) és (4) különbsége alapján:

$$\frac{AE - M_BA}{AB} = \frac{M_CA - AD}{AC},$$

$$\frac{EM_B}{AB} = \frac{DM_C}{AC}. \tag{5}$$

Átrendezés után $\sin\alpha$-val bővítve:

$$\frac{DM_C}{EM_B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{AB \cdot \sin\alpha} = \frac{CM_C}{BM_B}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $DM_CC$ és $EM_BB$ derékszögű háromszögek hasonlóak, a megfelelő szögek egyenlők: $M_CDC\sphericalangle = M_BEB\sphericalangle$. Mivel $M_BEB\sphericalangle = AEF\sphericalangle$, és az $M_CDC\sphericalangle$ mellékszöge $FDA\sphericalangle$, így

$$AEF\sphericalangle + FDA\sphericalangle = 180°,$$

azaz $AEFD$ valóban húrnégyszög.

Ha a $D$ és $M_C$ pontok egybeesnek, akkor (5) miatt az $E$ és $M_B$ pontok is egybeesnek, az $ADFE$ négyszög két szemközti szöge derékszög, tehát ekkor is húrnégyszöget kapunk.

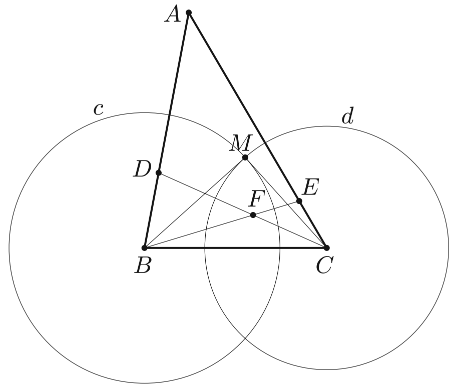
*Kocsis Anett* (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

**III. megoldás.** Tekintsük a $B$ középpontú, $\sqrt{BD \cdot BA} = r_1$ sugarú $c$; és a $C$ középpontú, $\sqrt{CE \cdot CA} = r_2$ sugarú $d$ köröket. Ezekre a körökre invertálva az $A$ pontot kapjuk a $D$ és az $E$ pontot, mivel úgy választottuk meg a sugarakat, hogy ez teljesüljön.

A feladatban szereplő feltétel szerint

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA = r_1^2 + r_2^2,$$

tehát a Pitagorasz–tétel megfordítása értelmében a $BCM$ háromszög derékszögű, vagyis a két kör bezárt szöge (ami a metszéspontjukba húzott érintők bezárt szöge) 90°. Ebben az esetben, ha valamelyik körre invertáljuk a másik kört, akkor annak a képe önmaga lesz, tehát invariáns alakzat. Ezeket felhasználva láthatjuk, hogy ha $D$-t invertáljuk a $d$, valamint $E$-t a $c$ körre, akkor képeiknek egybe kell esniük, ez pedig csak a két egyenes metszéspontjában lehetséges, amit az *ábrán* $F$-fel jelöltünk.




Látható, hogy ebben az esetben $BD \cdot BA = r_1^2 = BF \cdot BE$, azaz a $BDF$ és $BAE$ háromszögek hasonlók, tehát $DFB\sphericalangle = BAE\sphericalangle$.

Ekkor az $ADFE$ négyszög valóban húrnégyszög lesz, hiszen a szemközti szögeinek összege 180°. Ezzel állításunkat beláttuk.

*Tubak Dániel* (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

*Megjegyzés.* A megoldás csak a következő tétel alkalmazásával teljes: Két inverzió sorrendje pontosan akkor cserélhető fel, ha az alapkörök merőlegesen metszik egymást.

Esetünkben az $A$ pont $c$ körre vonatkozó inverze a $D$ pont, majd ennek a $d$-re vonatkozó inverze rajta van a $CD$ egyenesen. Másrészt az $A$ pont $d$-re vonatkozó inverze az $E$ pont, majd ennek inverze a $c$-re a $BE$ egyenesen van. Ha a két inverzió felcserélhető, akkor valóban csak a két egyenes metszéspontja, az $F$ pont lehet a közös kétszeres inverz.

Vázoljuk az inverziók sorrendjére vonatkozó tétel bizonyítását.

Az inverzió szögtartó. Ebből következően az inverzió inverziótartó: ha $P$ és $Q$ egymás képei az $i$ körre való inverziónál, és $P'$, $Q'$, $i'$ ezek képei a $j$ körre való inverziónál, akkor $P'$ és $Q'$ egymás képei az $i'$-re való inverziónál. Valóban, $P$ és $Q$ pontosan akkor egymás képei $i$-nél, ha a $P$-n is és $Q$-n is átmenő körök valamennyien merőlegesek $i$-re – ez a tulajdonság pedig megmarad, ha $j$-re invertálunk.

Tehát ha az $i_1$, $i_2$ körökre való inverziók kommutativitását vizsgáljuk, akkor áttranszformálhatjuk őket egy inverzióval, a transzformációk megmaradnak, kommutativitásuk ott is vizsgálható.

Két metsző körre vonatkozó inverzió két metsző egyenesre vonatkozó tükrözéssé változik, ha a két kör metszéspontja körüli inverziót alkalmazunk.

A szögtartás miatt akkor és csak akkor cserélhető fel a tükrözések sorrendje, ha a két egyenes merőleges egymásra.

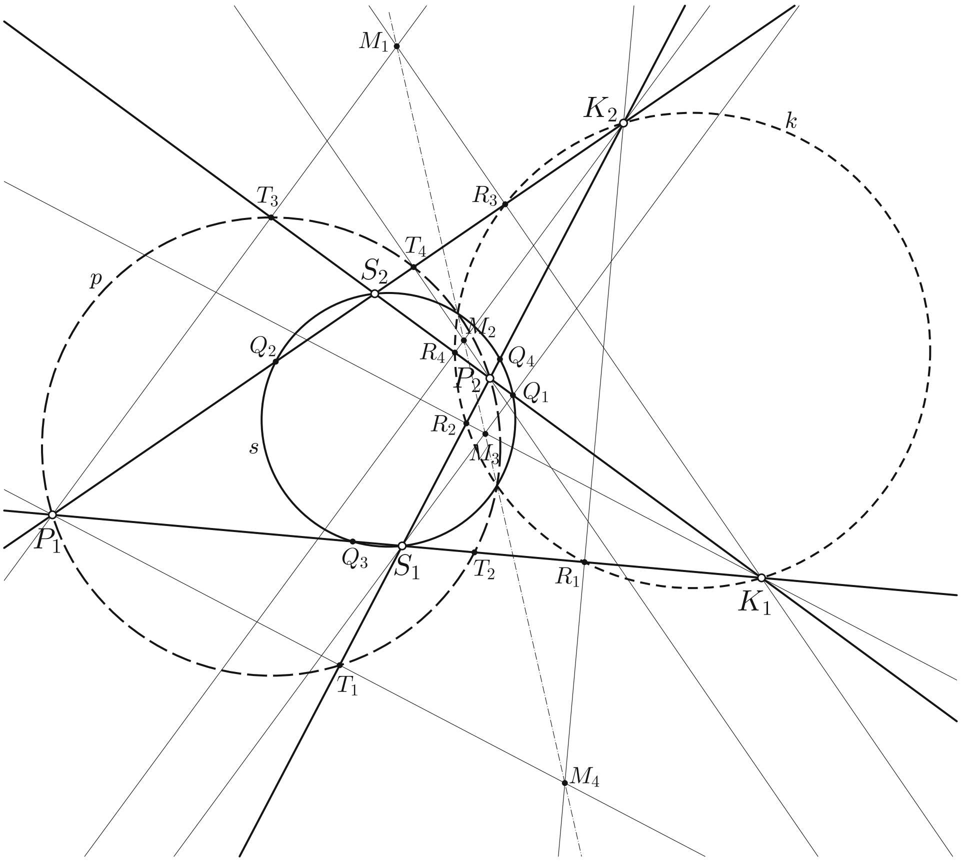
Összesen 36 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 30, 4 pontot 2, 3 pontot 1 tanuló. 2 pontos 2 tanuló, 1 pontos 1 tanuló dolgozata.

**B. 4985.** *Adott négy egyenes úgy, hogy közülük bármelyik három meghatároz egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négy háromszögnek a magasságpontja egy egyenesre illeszkedik.*

(*5 pont*)

**Megoldás.** A négy egyenes metszéspontjait betűzzük meg az ábrán látható módon $P_1$, $P_2$, $K_1$, $K_2$, $S_1$, $S_2$-vel. Az eredeti megoldás szerint ezek színeket is jelentenek. A betűzést úgy választottuk, hogy mindegyik egyenesen a $K_i$, $P_j$, $S_k$ pontok közül pontosan egy helyezkedjen el, vagy más szóval bármely három egyenes által meghatározott háromszögnek mindhárom csúcsa különböző „színű”. A Thalész-tétel megfordításából látható, hogy az összes háromszög magasság-talppontjai rajta vannak az azonos nevű/színű pontok által meghatározott szakaszra mint átmérőre emelt körökön. A $P_1P_2$ Thalész-köre által kimetszett talppontokat $T_i$-vel, a $K_1K_2$ Thalész-köre által kimetszetteket $R_j$-vel, míg az $S_1S_2$ Thalész-köre által kimetszett magasság-talppontokat $Q_k$-val jelöltük. Legyenek továbbá a Thalész-körök ebben a sorrendben a $p$, $k$, $s$ körök. A háromszögek magasságpontjai $M_1$, $M_2$, $M_3$ és $M_4$. Azt fogjuk belátni, hogy a magasságpontoknak a három körre vett hatványai egyenlők, ezért csak egy egyenesen lehetnek (már akkor is egy egyenesen kell legyenek, ha két körre egyenlő a hatványuk.)

Ha például a $P_1K_1S_2$ háromszög $M_1$ magasságpontjának vizsgáljuk a $p$ körre (az ábrán szaggatott vonallal jelzett) vonatkozó hatványát és a $k$ körre (az ábrán a pontokkal jelölt kör) vonatkozó hatványát, akkor ehhez a két körhöz érdemes hozzávennünk még a $P_1K_1$ Thalész-körét is, legyen ez a $c$ kör. Ezen a körön is




rajta vannak a $P_1$, $K_1$, $R_3$, $T_3$ pontok. Így a $p$ és $c$ körök hatványvonala a $P_1T_3$ egyenes, továbbá a $k$ és $c$ körök hatványvonala a $K_1R_3$ egyenes. Látjuk tehát, hogy az $M_1$ pont a $p$, $k$ és $c$ körök hatványpontja, tehát a $p$-re és $k$-ra vonatkozó hatványa is megegyezik. Ugyanígy bizonyítható a hatványok egyenlősége bármely másik két körre és magasságpontra. Az állítást ezzel beláttuk.

*Beke Csongor* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24, 4 pontot 1, 3 pontot és 2 pontot szintén 1-1 tanuló. 1 pontos 1, 0 pontos 1 tanuló dolgozata.

**B. 5052.** *Kezdő és Második egy kezdetben üres* $19\times 19$*-es táblázat mezőibe ír felváltva egy-egy számot, 0-t vagy 1-et. Amikor már az összes mező ki van töltve, kiszámolják a sorösszegeket és az oszlopösszegeket. A legnagyobb sorösszeg legyen* $A$*, a legnagyobb oszlopösszeg pedig* $B$*. Ha* $A>B$*, akkor Kezdő nyer; ha* $A<B$*, akkor Második; ha pedig* $A=B$*, akkor döntetlen a játék eredménye. Van-e valakinek nyerő stratégiája?*

(*6 pont*)

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy Kezdő számára létezik nem vesztő stratégia.

Legyen Kezdő első száma 0, mindegy, hogy hol. Ezt követően Kezdő minden további lépésében a Második által előtte beírt számtól különböző számot ír be: ha van hely abban az oszlopban, ahová Második utoljára írt számot, akkor abba az oszlopba, különben pedig egy olyan oszlopba, amibe hasonló esetben még nem tett számot. Ilyen biztos, hogy van, mert Második ezen stratégia mellett pontosan 9 oszlopot fejez be, a többi 9 oszlop pedig (a kezdőoszlopot nem számolva, hiszen ott mindenképpen Kezdő rakja az utolsó számot) csak akkor telhet meg, ha Kezdő egy ilyen esetben oda rakja a számát, tehát marad bennük addig hely.

Így $B \leqslant 10$, hiszen minden oszlopban legfeljebb eggyel nagyobb az 1-esek száma, mint a 0-áké, mivel az utolsó lépés kivételével az oszlopban bármely játékos minden egyeséhez tartozik a másik játékosnak egy-egy különböző 0-ja. Másrészt összesen $(19 \cdot 19 - 1)/2 = 180$ darab 1-es van a táblázatban, mivel a legelső lépésen kívül minden lépéspár (Második, majd Kezdő lépése) során a beírt számok összege 1. Ebből a skatulyaelv miatt következik, hogy a 19 sor egyikében legalább 10 az 1-esek száma, tehát $A \geqslant 10 \geqslant B$, vagyis Második nem nyerhet.

Ezután azt mutatjuk meg, hogy Második számára is létezik nem vesztő stratégia (lényegében ugyanaz, mint Kezdőé, csak sorokra alkalmazva).

Második írjon Kezdő utolsó leírt számának sorába másmilyen számot; amikor pedig nem tud, akkor egy olyan sorba írja a másmilyen számot, ahová még nem írt számot ilyen helyzetben. Ez lehetséges, hiszen a stratégia szerint Kezdő pontosan 10 sort fejez be, ekkor kell Másodiknak önállóan lépnie, és ahová lép, ott onnantól Kezdő lépése után páros sok szám lesz, tehát azokat Kezdő nem tudja befejezni. Így 10 sort Kezdő fejez be, 9 sorba pedig Második rak önállóan egy-egy számot, ezeken a számokon kívül pedig minden sorban ugyanannyi 1 és 0 van. Tehát minden sorban legfeljebb 10 darab 1-es van. Összesen 180 vagy 181 darab 1-es van a táblázatban (Kezdő utolsó számától függően), tehát a skatulya-elv szerint kell lennie olyan oszlopnak, ahol legalább 10 darab 1-es van. $A \leqslant 10 \leqslant B$, vagyis Kezdő nem nyerhet.

Mivel mindkét félnek van olyan stratégiája, melyet használva a másik fél nem nyerhet, egyik fél számára sem létezik nyerő stratégia.

*Czett Mátyás* (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. 6 pontos 29, 5 pontos 8, 4 pontos 5, 3 pontos 1, 2 pontos 8, 0 pontos 7 dolgozat.

**B. 5059.** *Legyen valamely pozitív egész $c$-re $\{a_n\}$ a következő, rekurzív módon definiált sorozat: $a_0 = c$ és $a_{n+1} = \left[a_n + \sqrt{a_n}\,\right]$, ha $n \geqslant 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat tagja a 2019, akkor a korábbi tagok között nincs négyzetszám, de a későbbi tagok között végtelen sok négyzetszám fordul elő.*

(*5 pont*)

**Megoldás.** Belátjuk, hogy ha $\left[x + \sqrt{x}\,\right] = a_i$, akkor $a_{i-1} = x$. Az $x$ -re igaz a rekurzív feltétel, továbbá $y > x$-re $\left[y + \sqrt{y}\,\right] > \left[x + \sqrt{x}\,\right]$ (a lineáris rész 1-gyel nő, a gyökös rész szigorúan monoton nő), $y < x$-re $\left[y + \sqrt{y}\,\right] < \left[x + \sqrt{x}\,\right]$, tehát $x$

az egyetlen lehetőség: a sorozat bármelyik eleme tehát egyértelműen meghatározza a korábbiakat.

Így megkeresve a számokat, a sorozat korábbi, 2019 előtti elemei sorrendben: 1805, 1847, 1889, 1932, 1975, 2019, melyek egyike sem négyzetszám (gyökeik megközelítő értéke rendre: 42,4853; 42,9767; 43,4626; 43,9545; 44,441; 44,9333). Mivel $1764+\sqrt{1764}>1805$, $1763+\sqrt{1763}<1805$, valóban nincs korábbi eleme a sorozatnak. Így a korábbi tagok között nincs négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy ha van egy négyzetszám a sorozatban, akkor a sorozat egy alkalmas későbbi eleme is négyzetszám, tehát végtelen sok négyzetszám van a sorozatban. Pontosabban: Ha $a_i=b^2$, akkor $a_{i+2b+1}=(2b)^2$. Ugyanis a sorozat következő három eleme rendre $a_{i+1}=b^2+b$, $a_{i+2}=b^2+2b$, $a_{i+3}=b^2+3b$ lesz (hiszen $b^2+\sqrt{b^2}=b^2+b$, $b^2<b^2+b<b^2+2b<b^2+2b+1=(b+1)^2$, és így $b^2+b$ és $b^2+2b$ gyökének egész része is $b$). Azaz $a_{i+3}=(b+1)^2+b-1$. A $c$-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$, ha $0<c<b+1$. Ez $c=1$-re igaz; tegyük fel, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$. Ekkor

$$a_{i+1+2c+1}=(b+c)^2+b-c+b+c=(b+c)^2+2b$$

és

$$a_{i+1+2c+2}=a_{i+1+2(c+1)}=(b+c)^2+2b+b+c=(b+c+1)^2+b-(c+1)$$

(hiszen $(b+c)^2+b-c<(b+c)^2+2b<(b+c)^2+2b+2c+1=(b+c+1)^2$). Tehát az állítás teljesül $(c+1)$-re is. Helyettesítsünk be $c=b$-t, ezzel megkapjuk a fenti állítást.

A sorozat elemei 2019 után: 2019, 2063, 2108, 2153, 2199, 2245, 2292, 2339, 2387, 2435, 2484, 2533, 2583, 2633, 2684, 2735, 2787, 2839, 2892, 2945, 2999, 3053, 3108, 3163, 3219, 3275, 3332, 3389, 3447, 3505, 3564, 3623, 3683, 3743, 3804, 3865, 3927, 3989, 4052, 4115, 4179, 4243, 4308, 4373, 4439, 4505, 4572, 4639, 4707, 4775, 4844, 4913, 4983, 5053, 5124, 5195, 5267, 5339, 5412, 5485, 5559, 5633, 5708, 5783, 5859, 5935, 6012, 6089, 6167, 6245, 6324, 6403, 6483, 6563, 6644, 6725, 6807, 6889.

Mivel $6889=83^2$, a fentiek szerint végtelen sok négyzetszám van a sorozatban.

*Németh Márton* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)

57 dolgozat érkezett. 5 pontos 41, 4 pontos 9, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 3 dolgozat.

**B. 5083.** *Van-e olyan* 100*-adfokú valós együtthatós* $p(x)$ *polinom, melyre a* $p\big(p(x)\big)$ *polinomnak* 10 000 *különböző valós gyöke van?*

(*5 pont*)

**Megoldás.** Van ilyen polinom. Legyen $p(x)=\prod_{i=1}^{100}(x-i)$. Ekkor $p\big(p(x)\big)$ gyökei a $p(x)-i$ $(i=1,2,\dots 100)$ polinomok gyökei. Két ilyen különböző polinomnak nem lehet közös $x_0$ gyöke, hiszen $p(x_0)-i=p(x_0)-j$ nem teljesülhet különböző $i$, $j$ esetén. Ezért elég azt belátni, hogy mind a száz polinomnak van száz különböző gyöke. Mivel a polinomok folytonos függvények, ezért ha $a < b$ és $f(a)$ és $f(b)$ előjele különböző, akkor az $f$ polinomnak $a$ és $b$ között van gyöke. Azt fogjuk belátni, hogy ha $n$ páros, és $0 \leqslant n \leqslant 100$, akkor $p(n + 0,5) > 100$, ha pedig $n$ páratlan, akkor $p(n + 0{,}5) < -100$. Az $S = \prod_{i=1}^{100} (n + 0,5 - i)$ szorzatban $100 - n$ darab negatív tényező van, és a $100 - n$ az $n$-nel megegyező paritású. Ezért elég azt belátni, hogy $|S| > 100$. A szorzatban legfeljebb két olyan tényező szerepel, amelynek az abszolút értéke legfeljebb 0,5, és legalább 96 olyan van, aminek legalább 2. Ezért a szorzat abszolút értéke legalább $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2^{96} = 2^{94} > 2^7 > 128 > 100$. Így páros $n$-re $p(n + 0{,}5) - i > 0$, páratlanra pedig $p(n + 0{,}5 - i) - i < 0$. Ebből következik, hogy ha $0 \leqslant n \leqslant 99$, akkor $n + 0{,}5$ és $n + 0{,}5 + 1$ között van gyöke $p(x) - i$-nek, és így van 100 különböző gyöke.

*Beke Csongor* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

38 dolgozat érkezett. 5 pontos 25, 4 pontos 11, 3 pontos 2 dolgozat.

## A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (664–668.)

**K. 664.** Van hat érménk, melyek közül négy darab 100 grammos, kettő pedig 99 grammos. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg. Legalább hány mérésre van szükségünk ahhoz, hogy megtaláljuk az egyik könnyebb érmét?

**K. 665.** Egy utca egyik oldalán áll valahány játékrobot. Egy lépésben pontosan három robotnak tudjuk azt a parancsot adni, hogy menjen át az út túloldalára. Hány robot esetén lehet elérni, hogy a robotok az utca túloldalára kerüljenek át?

**K. 666.** Hány olyan hatjegyű szám van a 182 többszörösei között, melyben az első három számjegyből álló háromjegyű szám megegyezik az utolsó három számjegyből álló háromjegyű számmal?

**K. 667.** Induljunk ki egy pozitív egész számból. Egy lépésben, ha az aktuális számunk páros, akkor vegyük a felét, ha pedig páratlan, adjunk hozzá 1-et. A lépéseknek akkor van vége, ha el tudunk jutni az 1-hez.

*a*) Igaz-e, hogy bármelyik számból kiindulva előbb-utóbb (véges sok lépésben) az 1-hez jutunk?

*b*) Igaz-e, hogy legfeljebb 30 lépésben jutunk az 1-hez, ha egy négyjegyű számból indulunk ki?