

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük P , Q , R -rel.

a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az A , P , Q , R pontok egy síkban vannak?

A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?

c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernak 14 csúcsa, 12 lapja és 24 éle lett? (16 pont)

9. Legyen $f(x) = 2x^2 - x^3$; $x \in [0; 2]$. Az $f(x)$ függvény grafikonjához illesztünk jobbról egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:

a) a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a 2 abszcisszájú pontban;

b) a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az $f(x)$ grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területével.

Adjuk meg a parabola egyenletét. (16 pont)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2020/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Adott két függvény:

$$f(x) = \frac{2x+9}{3}; \quad g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}.$$

Van-e olyan $x \in \mathbb{R}$, ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik? (6 pont)

b) Van-e olyan p valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:

$$A = \log_2(p+2) + \log_2(p-2); \quad B = 1 + \log_2(p+10)? \quad (6 \text{ pont})$$

Megoldás. a) 1. megoldás. $g(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$,

$$2x+9 = 3 \cdot |x+2|.$$

Ha $x < -2$, akkor

$$2x+9 = -3x-6,$$

$$x = -3.$$

Ha $x \geq -2$, akkor

$$2x + 9 = 3x + 6,$$

$$x = 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

2. megoldás. $2x + 9 = 3\sqrt{x^2 + 4x + 4}$, ha $x \geq \frac{-9}{2}$, akkor négyzetre emelhetünk:

$$4x^2 + 36x + 81 = 9x^2 + 36x + 36,$$

$$9 = x^2,$$

$$x = \pm 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

$$b) \quad \log_2(p + 2) + \log_2(p - 2) = 1 + \log_2(p + 10).$$

Kikötés: $p > 2$,

$$\log_2(p^2 - 4) = \log_2(2p + 20).$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton:

$$p^2 - 4 = 2p + 20$$

$$p^2 - 2p - 24 = 0,$$

$$p_1 = -4; \quad p_2 = 6.$$

Csak a $p = 6$ megoldás tesz eleget a feltételeknek. Az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. Solymász tanár úr biológia órájára 26 végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánetológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő célzattal) meglehetősen szigorú volt, ezért 21-en nem kaptak ötöst biológiából és 19-en nem kaptak ötöst humánetológiából. Ugyanakkor 8-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.

a) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból? (4 pont)

A biológia próbaérettségit mind a 26 diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga $\frac{60}{13}$ lett.

b) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (8 pont)

Megoldás. a) 1. *megoldás.* 5 tanulónak van ötöse biológiából, 7 tanulónak van ötöse humánétológiából; $5 + 7 = 12$, de csak 8 tanulónak van legalább az egyik tárgyból ötöse, ezért mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

2. *megoldás.* Ha mindkét tárgyból x tanulónak van ötöse, akkor csak biológiából $5 - x$ tanulónak van ötöse. Csak humánétológiából $7 - x$ tanulónak van ötöse.

$$5 - x + x + 7 - x = 8.$$

Tehát mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

b) 1. *megoldás.* A hármas, négyes és ötös osztályzatok száma: $a, a \cdot q, a \cdot q^2$.

$$a + aq + aq^2 = 26,$$

$$\frac{3a + 4aq + 5aq^2}{26} = \frac{60}{13}.$$

Mindkét egyenletből a -t kifejezve:

$$\frac{26}{1 + q + q^2} = \frac{120}{3 + 4q + 5q^2}.$$

Rendezés után:

$$5q^2 - 8q - 21 = 0, \quad q_1 = -\frac{7}{5}; \quad q_2 = 3.$$

Csak a $q = 3$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0,6249 \approx 0,62$.

2. *megoldás.* Legyen a hármasok száma a , a négyesek száma b , az ötösök száma c . Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\text{I.} \quad a + b + c = 26,$$

$$\text{II.} \quad \frac{3a + 4b + 5c}{26} = \frac{60}{13},$$

$$\text{III.} \quad b^2 = ac.$$

Az első egyenletből: $a = 26 - b - c$. A második egyenletet átalakítva: $3a + 4b + 5c = 120$. Az előző összefüggést beírva: $3(26 - b - c) + 4b + 5c = 120$. Ebből: $b = 42 - 2c$ és $a = c - 16$.

Így a harmadik egyenlet: $(42 - 2c)^2 = (c - 16) \cdot c$. Az egyenletet rendezve: $3c^2 - 152c + 1764 = 0$, ennek megoldásai: $c_1 = 18$ és $c_2 = \frac{98}{3}$.

Csak a $c = 18$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0,6249 \approx 0,62$.

3. a) Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ függvény lokális maximumhelyét. (5 pont)
- b) Mekkora területet zár be a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 6x - 24$ függvény grafikonja és az x tengely? (6 pont)
- c) Mennyi az $a_n = \frac{11n-5}{3n+8}$ sorozat határértéke? (3 pont)

Megoldás. a) A deriváltfüggvény: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$. A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált nulla.

$$3x^2 - 6x - 24 = 0, \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 4.$$

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	lok. max. h.	↓	lok. min. h.	↑

Vagy a táblázat helyett: A második derivált, $f''(x) = 6x - 6$, $f''(-2) = -18 < 0$ és $f''(4) = 18 > 0$.

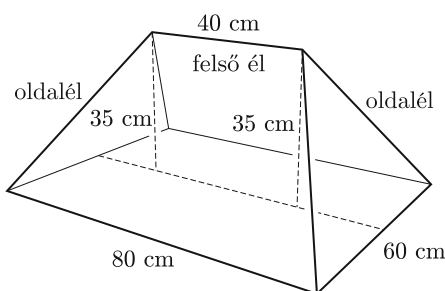
Tehát a függvénynek az $x = -2$ helyen van lokális maximuma.

b) $3x^2 - 6x - 24 = 0, \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 4,$

$$T = \left| \int_{-2}^4 (3x^2 - 6x - 24) dx \right| = \left| [x^3 - 3x^2 - 24x]_{-2}^4 \right| =$$

$$= |(64 - 48 - 96) - (-8 - 12 + 48)| = 108.$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11n - 5}{3n + 8} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11 - \frac{5}{n}}{3 + \frac{8}{n}} = \frac{11 - 0}{3 + 0} = \frac{11}{3}.$



4. Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai 60 cm és 80 cm. A babaházra egy levehető „sátortetőt” készített. A tető felső éle 40 cm hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabbik középvonala felett, attól 35 cm távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.

a) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket. (7 pont)

Zsófi a tető trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszet szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

b) Mekkora a legnagyobb területű téglalap területe, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg. (6 pont)

Megoldás. a) (Az 4.a. ábra jelölései alapján.) Az oldalél hosszának kiszámítása:

1. lehetőség. Az AT_1F_1 derékszögű háromszögben $F_1T_1 = 20$ és $AF_1 = 30$. A Pitagorasz-tétel az AF_1T_1 derékszögű háromszögben: $AT_1 = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13} \approx 36,06$. Pitagorasz-tétel az AT_1E derékszögű háromszögben: $AE^2 = AT_1^2 + ET_1^2$.

$$AE = \sqrt{35^2 + (10\sqrt{13})^2} = \left(\sqrt{30^2 + (5\sqrt{65})^2}\right) = 5\sqrt{101} \approx 50,25 \text{ cm}$$

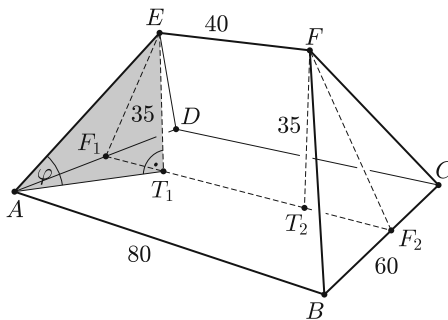
az oldalél hossza.

2. lehetőség. Pitagorasz-tétel az EF_1T_1 derékszögű háromszögben: $EF_1 = \sqrt{20^2 + 35^2} = 5\sqrt{65} \approx 40,31$. Pitagorasz-tétel az AF_1E derékszögű háromszögben: $AE^2 = AF_1^2 + EF_1^2$.

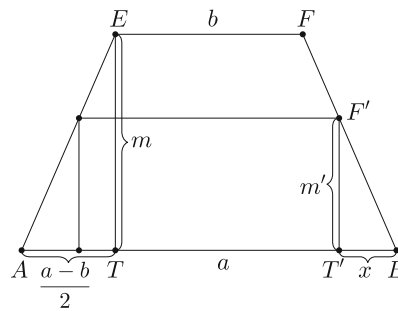
$$AE = \sqrt{35^2 + (10\sqrt{13})^2} = \left(\sqrt{30^2 + (5\sqrt{65})^2}\right) = 5\sqrt{101} \approx 50,25 \text{ cm}$$

az oldalél hossza.

Az oldalél vízszintes síkkal bezárt szöge a 4.a. ábrán φ -vel jelölt EAT_1 szög, amelyre $\sin \varphi = \frac{35}{5\sqrt{101}} \approx 0,6965$, ahonnan: $\varphi = 44,15^\circ$.



4.a. ábra



4.b. ábra

b) A 4.b. ábra jelöléseit használva: $ATE\Delta \sim BT'F'\Delta$, mert szögeik egyenlők.

$$\frac{m'}{x} = \frac{2m}{a-b} \Leftrightarrow m' = \frac{2m}{a-b} \cdot x.$$

Ebből a téglalap területe:

$$\begin{aligned} T(x) &= (a - 2x) \cdot \frac{2m}{a - b} \cdot x = \frac{2m}{a - b} \cdot (-2x^2 + ax) = -\frac{4m}{a - b} \cdot \left(x^2 - \frac{a}{2} \cdot x\right) = \\ &= -\frac{4m}{a - b} \cdot \left(\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16}\right) = -\frac{4m}{a - b} \cdot \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{ma^2}{4(a - b)}. \end{aligned}$$

Tehát a terület maximális, ha $x = \frac{a}{4} = 20$ cm.

II. rész

5. A DÖ 900 pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott 400 póló 2%-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvös feliratot nyomtatotta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók 3,4%-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a 900 alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett ...)

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták? (5 pont)

A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak $p\%$ -ával. Így a póló 50 Ft-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árat $p\%$ -kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár $p\%$ -ával csökkentették volna az árat.

b) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés? (11 pont)

Megoldás. a) 1. megoldás. Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Tehát 25 hibás póló van, ez az összes esetek száma. A kedvező esetek száma a második gépen készült pólók száma, azaz 17.

Így a kérdéses valószínűség: $\frac{17}{25} = 0,68$.

2. megoldás. Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Legyen A az az esemény, hogy a pólót a második gépen nyomtatták, B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott póló hibás. A keresett valószínűség: $p(A | B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$.

$$p(AB) = \frac{17}{900}, \quad p(B) = \frac{25}{900}, \quad p(A | B) = \frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}} = \frac{17}{25} = 0,68.$$

3. megoldás. Annak valószínűsége, hogy egy póló az első gépen készült: $p(1.) = \frac{4}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült: $p(2.) = \frac{5}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha az első gépen készült: $p(H | 1.) = 0,02$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha a második gépen készült: $p(H | 2.) = 0,034$.

Bayes tétele alapján annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült, feltéve, hogy hibás:

$$p(2. | H) = \frac{p(H | 2.) \cdot p(2.)}{p(H | 1.) \cdot p(1.) + p(H | 2.) \cdot p(2.)}.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{0,034 \cdot \frac{5}{9}}{0,02 \cdot \frac{4}{9} + 0,034 \cdot \frac{5}{9}} = 0,68.$$

b) Legyen x a póló árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q = 1 - \frac{p}{100}$. Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor a póló kétszeres árleszállítás utáni ára $xq - 500$ forint, tehát

$$(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q.$$

Ha mindkét alkalommal $p\%$ a csökkentés, akkor az új ár xq^2 forint, tehát

$$(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2.$$

Az első egyenletből $q = 0,9$, azaz $p = 10$. A q értékét a második egyenletbe behelyettesítve:

$$(x - 500) \cdot 0,9 + 90 = x \cdot 0,81,$$

$x = 4000$. A póló eredeti ára 4000 Ft, p értéke pedig 10.

Ellenőrzés: $4000 - 500 = 3500$, 10%-kal csökkentve 3150;

4000 csökkentve 10%-kal 3600, $3600 - 500 = 3100$;

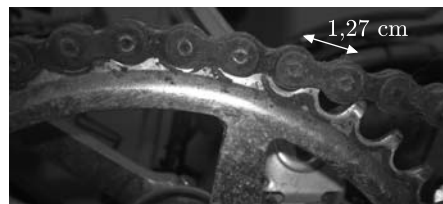
4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240.

$3150 = 3100 + 50$ és $3150 = 3240 - 90$, tehát a kapott eredmények helyesek.

6. *Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron 46 fog található, a hátsó fogaskeréken pedig 18 fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.) Az 1. ábrán a lánccsal felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánccsal a fogaskerékre. Két lánccsal tengelye 1,27 cm távolságra van egymástól (lásd 2. ábra).*

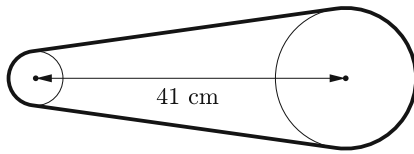


1. ábra



2. ábra

a) *Milyen hosszú lánccsal férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk lánccsal? (3 pont)*



3. ábra

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm van egymástól (3. ábra) és a lánc teljesen feszes.

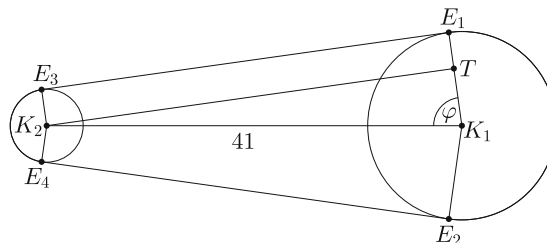
b) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (10 pont)

A láncokat gyártó üzemben 160 láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok 2%-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban 5000 láncdarab kering a futószalagon.

c) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét. (3 pont)

Megoldás. a) Az első lánctányérra annyi láncszem fér, ahány fog található rajta, tehát 46. Így a lánctányérra tekert lánc hossza $46 \cdot 1,27 = 58,42$ cm.

b) A lánc az ábrának megfelelően két kör közös külső érintőszakaszaiból és két körívből áll. Az első kör kerülete az előbbiek alapján 58,42 cm, így a kör sugara: $r_1 = 9,298$ cm. A hátsó fogaskeréken 18 fog van, így a kerülete: $18 \cdot 1,27 = 22,86$. A kör sugara: $r_2 = 3,638$ cm.



Az ábra jelöléseit használva: K_2T párhuzamos E_3E_1 -gyel. Ekkor $K_1T = r_1 - r_2 = 5,66$. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, tehát a K_2K_1T háromszög derékszögű. Felírva Pitagorasz tételét:

$$E_3E_1 = K_2T = \sqrt{K_2K_1^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{41^2 - 5,66^2} = 40,61 \text{ cm.}$$

Ugyanebben a háromszögben: $\cos \varphi = \frac{5,66}{41} \approx 0,138$, ebből $\varphi = 82,065^\circ$. Az első lánctányéron lévő ív hossza:

$$i_1 = \frac{360^\circ - 2\varphi}{180^\circ} \cdot r_1 \cdot \pi \approx 31,786 \text{ cm.}$$

A hátsó fogaskeréken lévő ív hossza:

$$i_2 = \frac{2\varphi}{180^\circ} \cdot r_2 \cdot \pi \approx 10,421 \text{ cm.}$$

Tehát a lánc hossza: 123,43 cm.

c) A hibás láncdarabok binomiális eloszlású valószínűségi változót alkotnak, melynek paraméterei $n = 5000$ és $p = 0,02$. Így a várható érték: $n \cdot p = 5000 \cdot 0,02 = 100$.

7. Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy 13 fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a 13 ember.” (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb” és „legalább” szavak matematikai lényegét . . .)

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13-an szálltak be az üres liftbe.

a) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.) (3 pont)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok: 12.A: 32 fő, 12.B: 33 fő, 12.C: 31 fő, 12.D: 30 fő, 12.E: 29 fő, 12.F: 28 fő? (6 pont)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezét fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezét. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezét, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni.”

c) Mire alapozta állítását? (3 pont)

Az E5vös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítők is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítővásznat, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

d) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól? (4 pont)

Megoldás. a) Alkalmazzuk a skatulya elvet, legyenek az osztályok a skatulyák. A liftben $6 \cdot 2 + 1$ diák utazott. Így a skatulya elv általános alakja alapján van legalább egy olyan osztály, amelyből legalább három diák utazott a liftben.

b) A végzős évfolyamon összesen 183 diák van. Közülük választunk ki 12 diákot, így az összes esetek száma: $\binom{183}{12}$.

Az egyes osztályokból 2-2 főt rendre $\binom{32}{2}$, $\binom{33}{2}$, $\binom{31}{2}$, $\binom{30}{2}$, $\binom{29}{2}$, $\binom{28}{2}$ módon választhatjuk ki. Mivel ezeket egymástól függetlenül választhatjuk, ezért a kedvező esetek száma:

$$\binom{32}{2} \cdot \binom{33}{2} \cdot \binom{31}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{28}{2}.$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{32}{2} \cdot \binom{33}{2} \cdot \binom{31}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{183}{12}} = 0,00399 \approx 0,004.$$

c) Tekintsük a résztvevőket egy hatpontú egyszerű gráf csúcsainak. Két csúcs akkor van összekötve, ha a résztvevők kezét fogtak. Az egyes csúcsok fokszámainak összege: $5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$. Mivel a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszerese, így ez nem lehet páratlan szám.

d) A sorrendek száma az ismétléses permutáció segítségével számolható ki:

$$P_{14}^{\{2;3;4;5\}} = \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = 2\,522\,520.$$

Tehát 2 522 520-féle sorrendben pakolhatta be a dolgokat.

8. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:

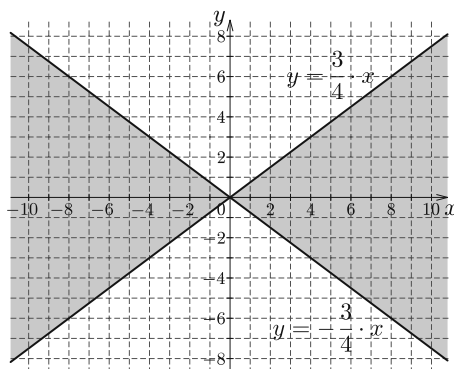
a) $A := \{P(x; y) \mid 9x^2 - 16y^2 \geq 0\}$. (5 pont)

b) $B := \{Q(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$. (3 pont)

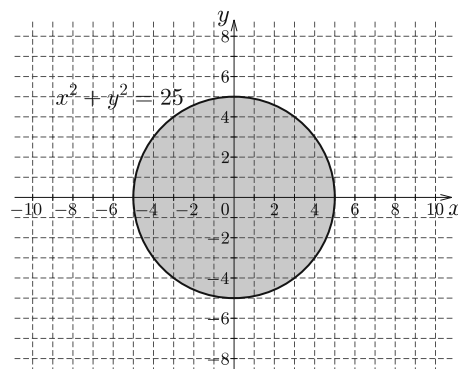
c) Mekkora az $A \cap B$ halmaz területe? (8 pont)

Megoldás. a) $9x^2 - 16y^2 = (3x - 4y) \cdot (3x + 4y) \geq 0$,

$3x - 4y \leq 0$ és $3x + 4y \leq 0$, vagy $3x - 4y \geq 0$ és $3x + 4y \geq 0$ (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

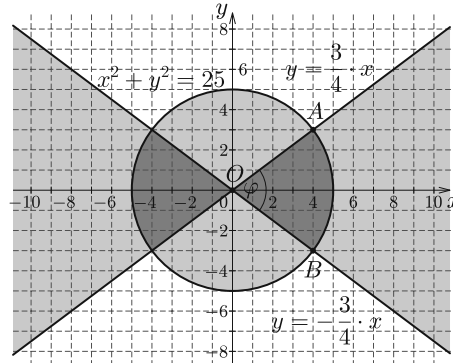
b) A keresett pontok az origó középpontú, 5 egység sugarú kör belseje és a körvonal (5. ábra).

c) A metszet két körcikk, amelyeket az egyenesek és az 5 egység sugarú kör határolnak (6. ábra). A körcikkhez tartozó φ középponti szögre:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}, \text{ ebből } \varphi = 73,74^\circ.$$

A metszet területe a két egybevágó körcikk területének összege:

$$T = 2 \cdot \frac{73,74^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \pi = 32,18.$$



6. ábra

A terület határozott integrál segítségével is kiszámítható. Az egyik körcikk felének területe:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \left| \int_0^4 \frac{3}{4} x \, dx \right| + \left| \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} \, dx \right|, \\ \int_0^4 \frac{3}{4} x \, dx &= \left[\frac{3}{8} x^2 \right]_0^4 = 6, \\ \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} \, dx &= \int_{\arcsin \frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} \cdot 5 \cos t \, dt = \int_{\arcsin \frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 25 \cos^2 t \, dt = \\ &= \frac{25}{2} \cdot \int_{\arcsin \frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) \, dt = \frac{25}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t \right]_{\arcsin \frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{25}{2} \left(\left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{12}{25} + \arcsin \frac{4}{5} \right) \right) = \frac{25}{4} \pi - 6 - \frac{25}{2} \arcsin \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Tehát a keresett terület:

$$2T = 4 \cdot \left(6 + \frac{25}{4} \pi - 6 - \frac{25}{2} \arcsin \frac{4}{5} \right) = 25\pi - 50 \cdot \arcsin \frac{4}{5} = 32,18.$$

9. Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 8.$$

- a) Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban? (3 pont)
- b) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak. (5 pont)
- c) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat n -edik eleme a másodiktól kezdve: $a_n = 3^{n-1} + 4$. (8 pont)

Megoldás. a) $a_1 = 5,$
 $a_2 = 3 \cdot 5 - 8 = 7,$
 $a_3 = 3 \cdot 7 - 8 = 13,$
 $a_4 = 3 \cdot 13 - 8 = 31,$
 $a_5 = 3 \cdot 31 - 8 = 85.$

Tehát az ötödik héten $5 + 7 + 13 + 31 + 85 = 141$ fő vett részt a játékban.

b) *1. megoldás.* A sorozat elemeinek utolsó számjegyei az elemek 10-zel való osztási maradékai. Az osztási maradékokkal ugyanazt a műveletet kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal.

Az osztási maradékokból képzett (b_n) sorozat elemei rendre:

$$\begin{aligned} b_1 &= 5, \\ 3 \cdot 5 - 8 = 7, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } b_2 &= 7, \\ 3 \cdot 7 - 8 = 13, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } b_3 &= 3, \\ 3 \cdot 3 - 8 = 1, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } b_4 &= 1, \\ 3 \cdot 1 - 8 = -5, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } b_5 &= 5. \end{aligned}$$

És ettől kezdve minden ismétlődik, hiszen ugyanazokkal a számokkal végezzük ugyanazokat a műveleteket.

2. megoldás. Használjuk fel a feladat c) részében megadott $a_n = 3^{n-1} + 4$ képletet. Vizsgáljuk a három hatványainak 10-zel való osztási maradékait, ezekkel ugyanazokat a műveleteket kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal:

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } 1, \\ 3^1 &= 3 \cdot 3^0, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } 3 \cdot 1 = 3, \\ 3^2 &= 3 \cdot 3^1, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } 3 \cdot 3 = 9, \\ 3^3 &= 3 \cdot 3^2, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } 3 \cdot 9 = 27, \text{ azaz } 7, \\ 3^4 &= 3 \cdot 3^3, \text{ ennek } 10\text{-zel való osztási maradéka: } 3 \cdot 7 = 21, \text{ azaz } 1. \end{aligned}$$

Ettől kezdve az osztási maradékokban ismétlődik az 1; 3; 9; 7 sorozat. Ekkor az eredeti sorozat utolsó számjegyei az 5; 7; 3; 1 ismétlődő sorozatot alkotják.

c) *1. megoldás.* A bizonyítást teljes indukcióval végezzük: $a_1 = 5 = 3^0 + 4$, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, hogy $a_k = 3^{k-1} + 4$. Állítás: $n = k + 1$ -ra igaz, hogy $a_{k+1} = 3^k + 4$.

Bizonyítás: A rekurziós megadással: $a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 8$. Az indukciós feltételt felhasználva: $a_{k+1} = 3 \cdot (3^{k-1} + 4) - 8 = 3^k + 4$.

Beláttuk, hogy ha az állítás igaz a k természetes számra, akkor a $k + 1$ természetes számra is igaz. Mivel az állítás igaz az $n = 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

2. megoldás. Írjuk fel a sorozat elemeit az első elem és a rekurziós képlet segítségével:

$$a_1 = 5 = 3^0 + 4,$$

$$a_2 = 3 \cdot 5 - 8,$$

$$a_3 = 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8 = 3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^2 \cdot 5 - (3 + 1) \cdot 8,$$

$$a_4 = 3 \cdot (3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8) - 8 = 3^3 \cdot 5 - 3^2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^3 \cdot 5 - (3^2 + 3 + 1) \cdot 8.$$

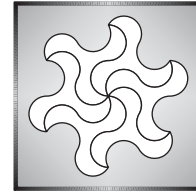
Ezek alapján: $a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 1) \cdot 8$. A mértani sorozat összegképletével:

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \cdot 8 = 3^{n-1} \cdot 5 - 4 \cdot 3^{n-1} + 4 = 3^{n-1} + 4.$$

Balga Attila, Székely Péter

Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium

Matematika feladatok megoldása



B. 4979. Az ABC hegyesszögű háromszögben D és E rendre az AB , illetve az AC oldalnak belső pontja. A BE és CD szakaszok metszéspontja F . Bizonyítsuk be, hogy ha $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, akkor $ADFE$ húrnégyszög.

(5 pont)

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

I. megoldás. Legyen a BC egyenes és az $AEB\Delta$ köréírt körének B -től különböző metszéspontja P . A C pontnak erre a körre vonatkozó hatványa $CP \cdot BC = CE \cdot CA$.

Tudjuk, hogy $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$. Utóbbi egyenletből kivonva előbbit, azt kapjuk, hogy

$$BC \cdot (BC - CP) = BD \cdot BA.$$

Viszont $BC - CP = BP$, így $BP \cdot BC = BD \cdot BA$.

