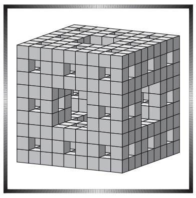
C. 1622. Bizonyítsuk be, hogy az $y = 1 - |x-1|$ és az $y = |2x - a|$ függvények grafikonja által közrezárt alakzat területe kisebb, mint $\frac{1}{3}$, ha $1 < a < 2$.

(*Horvát feladat*)

Beküldési határidő: 2020. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5110–5117.)



B. 5110. Egy egyenlő szárú háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le. Bizonyítsuk be, hogy az alapra illeszkedő kis háromszögek alaphoz tartozó magassága megegyezik a háromszögbe írható kör sugarával.

(*3 pont*)

B. 5111. Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $a + b = 1$ és $a^2 + b^2 = 2$. Határozzuk meg $a^8 + b^8$ értékét.

(*3 pont*) *Szalai Máté* (Szeged) javaslata alapján

B. 5112. Egy kártyapakliban p darab piros és k darab kék kártya van. Hányféleképpen választhatunk ki a pakliból kártyákat úgy, hogy a piros kártyák száma n-nel több legyen, mint a kék kártyák száma?

(*4 pont*)

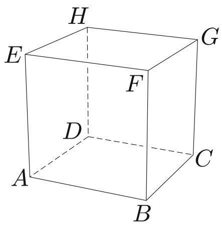
B. 5113. Legyenek a, b és c adott, páronként relatív prím pozitív egészek. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$x^a + y^b = z^c$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az (x, y, z) pozitív egész számhármasok körében.

(*5 pont*)

B. 5114. Az $ABCDEFGH$ egységkockát elmetszettük egy síkkal úgy, hogy az AB és AD éleket az A-tól azonos, x távolságra levő P és Q belső pontjaikban, a BF élt pedig az R pontban metszi. Mekkora a BR távolság, ha $QPR\sphericalangle = 120°$?



(*4 pont*)

B. 5115. Ali erszényében n darab érme lapul, Babának pedig van $n-1$ darab, kezdetben üres erszénye. Baba a következő játékot játssza: a kezdetben egy erszényben lévő érméket szétosztja két erszénybe, egyikbe a_1, másikba b_1 érmét téve ($a_1, b_1 > 0$), és a táblára felírja az a_1b_1 szorzatot. Majd innentől (az előzőhöz hasonlóan) a k-adik lépésben ($k = 2, 3, \ldots$) kiválaszt egy legalább két érmét tartalmazó erszényt, a benne lévő érméket szétosztja két üres erszénybe, egyikbe a_k, másikba b_k érmét téve ($a_k, b_k > 0$), és a táblára felírja az a_kb_k szorzatot.

A játék akkor ér véget, ha minden erszénybe 1-1 érme került. Ekkor Ali kiszámolja a táblán lévő a_kb_k szorzatok összegét és ennyi aranyat ad Babának.

Legfeljebb mennyi aranyat kaphat Baba?

(*5 pont*)

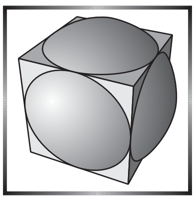
B. 5116. Legyen $a, b, c > 0$ és $x, y, z \geqslant 0$. Igazoljuk, hogy ha $x + aby \leqslant a(y+z)$, $y + bcz \leqslant b(z+x)$, és $z + cax \leqslant c(x+y)$, akkor $x = y = z = 0$ vagy $a = b = c = 1$.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Kanada)

B. 5117. Az A, B, C, D pontok (ebben a sorrendben) egy egyenesre esnek. Az AB, BC és CD szakaszokra (azonos félsíkban) emelt szabályos háromszögek harmadik csúcsai legyenek rendre E, F, illetve G. Jelöljük az egyenesen szomszédos pontok távolságát a következőképpen: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Mutassuk meg, hogy az $EFG\sphericalangle$ akkor és csak akkor $120°$-os, ha $a + c = b$ vagy $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (780–782.)

A. 780. Egy $n \times n$-es táblázatot kiszíneztünk úgy, hogy minden 2×2-es részben legyen legalább két azonos színű mező. Legfeljebb hány színt használhattunk a színezésben?

A *Dürer-verseny* feladata alapján

A. 781. Szeretnénk körzővel és vonalzóval megszerkeszteni egy egyenlő szárú háromszöget. Ehhez a következő négy adatból kapunk meg kettőt: a háromszög alapjának hossza (a), a háromszög szárának hossza (b), a beírt körének sugara (r), a körülírt körének sugara (R). A hat lehetséges esetből melyek azok, amikor a háromszög biztosan megszerkeszthető?

Rubóczky György (Budapest) ötlete alapján