A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1616–1622.)

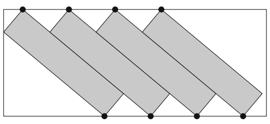
Feladatok 10. évfolyamig

C. 1616. Oldjuk meg az

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{\cfrac{5z}{4}+\cfrac{13}{6v}}}=\frac{135}{113}$$

egyenletet, ha x, y, z, v pozitív egész számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



C. 1617. Elhelyezhető-e átfedés nélkül négy darab 2×8-as téglalap egy 7×15-ös téglalap belsejében az *ábrán* látható elrendezésben? (Az ábra nem arányos.)

Feladatok mindenkinek

C. 1618. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\frac{(n-1)n}{n+1}$ sorozat elemeire $n\geqslant 1$ esetén fennáll:

$$\frac{2}{3}\leqslant a_{n+1}-a_n<1.$$

C. 1619. Egy hegyesszögű háromszög mindhárom oldalfelező pontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Bizonyítsuk be, hogy a behúzott szakaszok által meghatározott hatszög területe a háromszög területének felével egyenlő.

(*Horvát feladat*)

C. 1620. Mekk Elek, az ezermester egy ugródeszkát eszkábált az udvarára. Mérései alapján megállapította, hogy ha a róla való elugráshoz a deszka vége az alaphelyzet alá hajlik x dm-rel, akkor a deszkáról $0{,}5x^2+ax+b$ dm magasra tud ugrani. Sajnos a és b értékét elfelejtette, azonban arra emlékszik, hogy ha 10 cm-t hajlott le a deszka, akkor 35 cm magasra ugrott, négyszer ekkora lehajlásnál pedig négyszer ekkorát ugrott. Milyen a, illetve b értékeket határozott meg Mekk Elek?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1621. Egy érintőtrapéz oldalainak mérőszámai egész számok, melyek valamilyen sorrendben egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezik. Tudjuk, hogy a beírható körének sugara és a rövidebbik alapja egyaránt 6. Mekkora a másik három oldala?

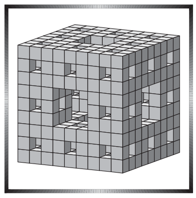
Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

C. 1622. Bizonyítsuk be, hogy az $y=1-|x-1|$ és az $y=|2x-a|$ függvények grafikonja által közrezárt alakzat területe kisebb, mint $\frac{1}{3}$, ha $1<a<2$.

(*Horvát feladat*)

Beküldési határidő: 2020. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5110–5117.)

B. 5110. Egy egyenlő szárú háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le. Bizonyítsuk be, hogy az alapra illeszkedő kis háromszögek alaphoz tartozó magassága megegyezik a háromszögbe írható kör sugarával.

(*3 pont*)

B. 5111. Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $a+b=1$ és $a^2+b^2=2$. Határozzuk meg a^8+b^8 értékét.

(*3 pont*) *Szalai Máté* (Szeged) javaslata alapján

B. 5112. Egy kártyapakliban p darab piros és k darab kék kártya van. Hányféleképpen választhatunk ki a pakliból kártyákat úgy, hogy a piros kártyák száma n-nel több legyen, mint a kék kártyák száma?

(*4 pont*)

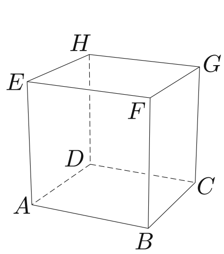
B. 5113. Legyenek a, b és c adott, páronként relatív prím pozitív egészek. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$x^a+y^b=z^c$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az (x,y,z) pozitív egész számhármasok körében.

(*5 pont*)

B. 5114. Az $ABCDEFGH$ egységkockát elmetszettük egy síkkal úgy, hogy az AB és AD éleket az A-tól azonos, x távolságra levő P és Q belső pontjaikban, a BF élt pedig az R pontban metszi. Mekkora a BR távolság, ha $QPR\sphericalangle=120°$?



(*4 pont*)