Matematika feladatok megoldása

B. 5001. *Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárszöge $120°$-nál kisebb, az alaphoz tartozó magassága m. A háromszög mindegyik csúcsát tükrözzük a szemközti oldalegyenesre. A három kapott pont egy másik egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja a', alaphoz tartozó magassága pedig m'. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=4.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál* (Budapest)

Megoldás. Legyen a háromszög alapja BC, szárainak metszéspontja A, szárszöge α, a tükörképpontok A', B', C', a magasságok talppontjai pedig T_A, T_B, T_C.

Kétféleképpen helyezkedhet el a tükrözéssel kapott háromszög az eredetihez képest, aszerint, hogy α kisebb vagy nagyobb, mint $60°$. (Amennyiben $\alpha=60°$, a háromszög szabályos, a tükrözések után egy kétszer akkora háromszöget kapunk, mindkét arány pontosan 2.)

1. eset: $\alpha<60°$ (*1. ábra*). $CBT_B\triangle\cong DB'T_B\triangle$, hiszen a szimmetria miatt $B'C'\parallel CB$, így $CBT_B\sphericalangle=T_BB'D\sphericalangle$, $BCT_B\sphericalangle=T_BDB'\sphericalangle$, mert váltószögek, továbbá a tükrözés miatt $BT_B=T_BB'$. Ezzel beláttuk, hogy $B'D=a$. Ugyanígy igazolható az is, hogy $C'E=a$. Az egyik arány az eddigiek alapján:

$$\frac{a'}{a}=\frac{B'C'}{a}=\frac{B'D+ED+C'E}{a}=\frac{2a+ED}{a}=2+\frac{ED}{a}.$$

A tükrözés miatt $AT_A=T_AA'$, így a másik arány:

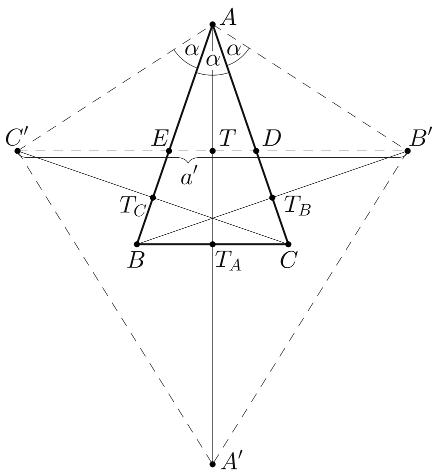
$$\frac{m'}{m}=\frac{TA'}{m}=\frac{AA'-AT}{m}=\frac{2m-AT}{m}=2-\frac{AT}{m}.$$

Az $ADE\triangle\sim ABC\triangle$, az oldalak és magasságok aránya megegyezik, vagyis $\frac{ED}{BC}=\frac{AT}{AT_A}$. Az a oldalt és az m magasságot beírva: $\frac{ED}{a}=\frac{AT}{m}$. Ebből a két arány összege valóban:

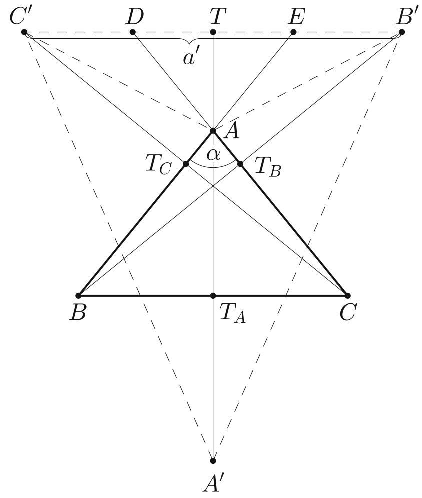
$$\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=\left(2+\frac{ED}{a}\right)+\left(2-\frac{AT}{m}\right)=4.$$

2. eset: $\alpha>60°$ (*2. ábra*). Az első eset szerint haladva a tükrözés és a szimmetria alapján $B'D=C'E=a$. Ezzel kapjuk, hogy

$$\frac{a'}{a}=\frac{B'C'}{a}=\frac{B'D+C'E-DE}{a}=\frac{2a-DE}{a}=2-\frac{DE}{a}.$$



1. ábra



2. ábra

Az $A'B'C'$ háromszög alaphoz tartozó magassága $A'T = A'T_A + AT_A + AT = 2m + AT$. Az m'/m arány:

$$\frac{m'}{m} = \frac{A'T}{m} = \frac{2m + AT}{m} = 2 + \frac{AT}{m}.$$

Az ABC és AED háromszögek hasonlóságából az alapjaik aránya megegyezik a hozzájuk tartozó magasságok arányával:

$$\frac{DE}{a} = \frac{AT}{m}.$$

A két arány összege tehát ismét:

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = 2 - \frac{DE}{a} + 2 + \frac{AT}{m} = 4.$$

Lovas Márton (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., Budapest, 8. évf.) dolgozata alapján

Összesen 59 dolgozat érkezett. 3 pontos 39, 2 pontos 12 tanuló dolgozata. 1 pontot 4, 0 pontot 4 tanuló kapott.

B. 5095. *Legyenek a, b, c nullától különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ és $\frac{ca}{b}$ számok összege egész, akkor külön-külön is egészek.*

(*3 pont*) *George Stoica* (Saint John, Kanada)

I. megoldás. Indirekten tegyük fel, hogy az egyik tag nem egész. Mivel a, b és c szerepe felcserélhető, föltehetjük, hogy például az első tag, $\frac{ab}{c}$ nem egész. Ez azt jelenti, hogy van olyan p prím, ami a nevező kanonikus alakjában magasabb kitevőn van, mint a számlálóban. Jelölje rendre x, y és z a p legmagasabb hatványának a kitevőjét, amivel a, b illetve c osztható. Ekkor az $\frac{ab}{c}$ tört számlálójának prímtényezős alakjában a p kitevője $x+y$, a nevezőjében z, és indirekt feltevésünk értelmében $z>x+y$.

A három tört összege

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c}{abc}=\frac{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}{abc}.$$

Ez a tört egész, azaz a nevező osztja a számlálót. A számláló első tagjában p kitevője $2x+2y$, c^2-ben $2z$, $\left(a^2+b^2\right)$-ben pedig legalább $\min(2x,2y)$; így $c^2\left(a^2+b^2\right)$ kanonikus alakjában a p kitevője legalább

$$2z+\min(2x,2y)\geqslant 2z>2x+2y.$$

Ebből következik, hogy a tört számlálójában a p maximális kitevője $2x+2y$. A tört nevezőjében viszont p maximális kitevője $x+y+z>2x+2y$, ami ellentmondás.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Az

$$\left(x-\frac{ab}{c}\right)\left(x-\frac{bc}{a}\right)\left(x-\frac{ca}{b}\right)=$$

$$=x^3-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)x^2+\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}\right)x-\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}=$$

$$=x^3-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)x^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)x-abc$$

egész együtthatós polinom főegyütthatója 1, racionális gyökei pedig $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ és $\frac{bc}{a}$.

A Rolle-tétel (racionális gyökteszt)* miatt ezek a gyökök egészek is, ami éppen a feladat állítása.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.),
Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 11. évf.)

52 dolgozat érkezett. 3 pontos 32, 2 pontos 3, 1 pontos 12 versenyző. 0 pontos 5 versenyző.

B. 5105. *Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör.*

(*4 pont*) Javasolta: *Szabó Kornél* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

* `http://math.bme.hu/ nagyat/rolle.pdf`

I. megoldás. Ha $n \leqslant 2$, akkor nyilván $k=1$, hiszen a gráfban nem lehet irányított kör.

Tegyük fel ezután, hogy $n \geqslant 3$. Ekkor $k \geqslant 2$, mivel például egy irányított n hosszú kör megfelelő színezéséhez legalább két szín szükséges. Megmutatjuk, hogy $k=2$ szín már mindig elegendő. Számozzuk meg a gráf csúcsait az $1,2,\dots,n$ számokkal, és egy i csúcsból egy j csúcsba mutató irányított él legyen piros, ha $i<j$, és legyen kék, ha $i>j$. Ekkor, ha az $i_1,i_2,\dots,i_t$ csúcsok ebben a sorrendben egy egyszínű irányított kör csúcsai lennének, akkor vagy $i_1<i_2<\ldots<i_t<i_1$-nek, vagy $i_1>i_2>\ldots>i_t>i_1$-nek kellene teljesülnie, azonban világos, hogy ezek egyike sem állhat fenn. Ezzel mutattunk olyan színezést 2 színnel, ami megfelelő.

Tehát $n=1,2$ esetén $k=1$, $n \geqslant 3$ esetén pedig $k=2$.

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $n \geqslant 3$ esetén $k=2$. A kezdeti feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. Tegyük fel, hogy az állítás minden n csúcsú gráfra igaz, és tekintsünk egy $n+1$ csúcsú gráfot. Válasszuk ki ennek egyik, P csúcsát. A P csúcsot és a vele szomszédos éleket elhagyva, a kapott n csúcsú gráf az indukciós feltevés szerint megfelelően kiszínezhető két színnel. A P-vel szomszédos élek közül pedig a P-be menőket színezzük pirosra, a P-ből indulókat pedig kékre. Így az egész gráf színezése megfelelő: ha egy irányított kör nem megy át P-n, akkor az indukciós feltevés szerint nem lehet egyszínű. Ha pedig átmegy P-n, akkor tartalmaz egy P-be menő és egy P-ből induló élt is, és ezek különböző színűek.

Argay Zsolt (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Egy szín biztosan nem lesz elég, hiszen lehet a gráfban irányított kör. Megmutatjuk, hogy egyébként pedig két szín elég lesz. Kezdjük el az egyik színnel (piros) beszínezni az éleket, és legyen a színezésünk olyan értelemben maximális, hogy jelenleg még nincs piros irányított kör, de ha bármelyik további élt színeznénk pirosra, akkor már lenne. Színezzük ezért a többi élt kékre. Megmutatjuk, hogy ekkor nincs kék irányított kör. Tegyük fel indirekt, hogy van kék irányított kör: $B_1,B_2,\dots,B_t,B_1$. A B_iB_{i+1} él nem lévén piros, a B_{i+1}-et B_i -vel irányított piros út köti össze (minden $i=1,\dots,t$-re). Legyen ez az út: $B_{i+1}A_1^iA_2^i\dots A_{k_i}^iB_i$. Tekintsük a következő piros irányított utakat:

$$\big(B_1A_1^tA_2^t\dots A_{k_t}^tB_t\big),\ \big(B_tA_1^{t-1}A_2^{t-1}\dots A_{k_{t-1}}^{t-1}B_{t-1}\big),\ \dots,\ \big(B_2A_1^1A_2^1\dots A_{k_1}^1B_1\big).$$

Ezeket összefűzve egy piros irányított kört kapunk a B_v csúcsokon keresztül. Elképzelhető, hogy az összefűzött utaknak volt közös csúcsa vagy éle, de ez csak annyit jelent, hogy több piros irányított kört is kaptunk. Ez azonban ellentmond a piros szín használatával kapcsolatban megfogalmazott feltételünknek, azaz ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyításunk teljes.

Kerekes Boldizsár (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

45 dolgozat érkezett. 4 pontos 38, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.