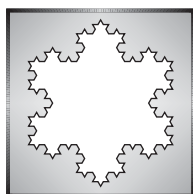


nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatai közül a legszebbeket különdíjban részesítjük.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség



C gyakorlat megoldása

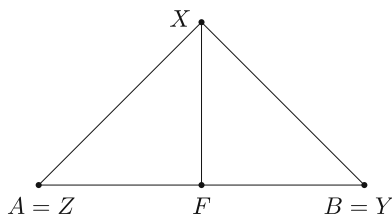
C. 1549. Az AB szakasz felezőpontja legyen F , továbbá legyen az AF szakasz egy tetszőleges pontja Z . F -ben merőlegest állítunk AB -re és felmérjük rá az $FX = FA$ távolságot. B -ben is merőlegest állítunk AB -re és felmérjük rá a $BY = AZ$ távolságot úgy, hogy X és Y az AB egyenesének egyazon oldalán legyenek. Mekkora lehet az XZY szög?

Javasolta: Surányi László (Budapest)

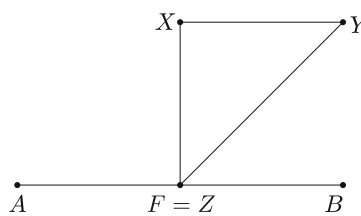
Megoldás. Készítsünk ábrát geogebra-ban, hátha megsejtünk valamit. A netes megoldás az alábbi oldalon található, és ott letölthető egy geogebra fájl, melyben a Z pont mozgatható az AF szakaszon: <https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=C1549&l=hu>.

Ez alapján az a sejtés, hogy a kérdéses szög értéke 45° , illetve az XYZ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Bizonyítsuk ezt be.

Ha a Z pont az A pontba esik, akkor az Y pont a B ponttal egyezik meg, és az XZY háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, $XZY \sphericalangle = 45^\circ$ (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Ha a Z pont az F pontba esik, akkor az $XZBY$ négyszög négyzet, az XZY háromszög ekkor is egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $\sphericalangle XZY = 45^\circ$ (2. ábra).

Ha a Z pont máshol helyezkedik el, arra az esetre adunk három megoldást. A honlapon két, ezektől különböző megoldás olvasható.

I. megoldás. Állítsunk merőlegest az X pontból a BY egyenesre, a talppontot jelölje P . Az $FBPX$ négyszög négyzet, mert három szöge derékszög és $FB = FX = a$. Ezért $PB = a$, és így $PY = a - b$ (3. ábra).

Mivel $PY = FZ = a - b$, $PX = FX = a$ és $\sphericalangle YPX = \sphericalangle ZFX = 90^\circ$, ezért az YPX és a ZFX háromszög egybevágó.

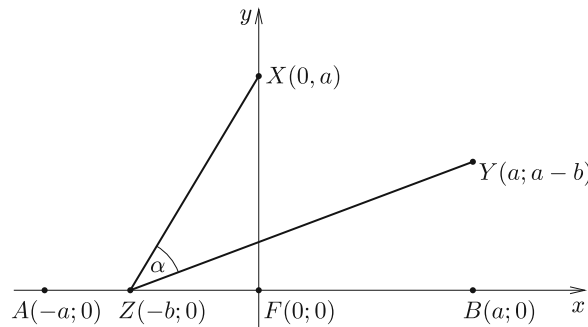
Ebből következik, hogy $XY = XZ$ és $\sphericalangle YXP = \sphericalangle ZXF$. Innen adódik, hogy

$$90^\circ = \sphericalangle FXP = \sphericalangle FXY + \sphericalangle YXP = \sphericalangle FXY + \sphericalangle ZXF = \sphericalangle ZXP,$$

és így

$$\sphericalangle XZY = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

II. megoldás. Helyezzük az ábrát koordinátarendszerbe úgy, hogy az F pont az origóban legyen, az A pont koordinátája $(-a; 0)$, a Z ponté pedig $(-b; 0)$. Ekkor a B pont koordinátái $(a; 0)$, az Y ponté pedig $(a; a - b)$ (4. ábra).



4. ábra

Írjuk fel a \vec{ZX} és \vec{ZY} vektorok skalárszorzatát kétféleképpen. Mivel $\vec{ZX} = (b; a)$ és $\vec{ZY} = (a + b; a - b)$, ezért egyrészt

$$\vec{ZX} \cdot \vec{ZY} = b(a + b) + a(a - b) = ab + b^2 + a^2 - ab = a^2 + b^2.$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\vec{ZX} \cdot \vec{ZY} &= \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot \cos \alpha = \sqrt{2}(a^2 + b^2) \cos \alpha.\end{aligned}$$

A kétfajta felírás egyenlő egymással:

$$\sqrt{2}(a^2 + b^2) \cos \alpha = a^2 + b^2,$$

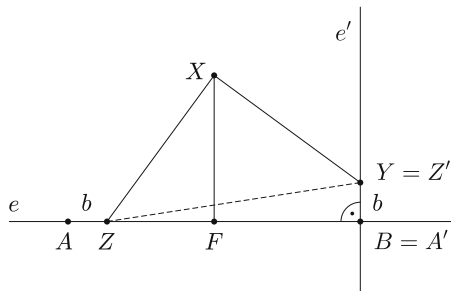
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = 45^\circ,$$

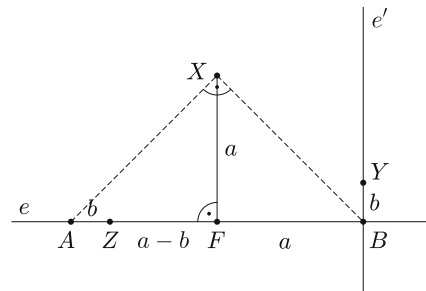
mivel 0° és 90° között van.

Gál Bence (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Mivel $FA = FX = FB$ és $\angle AFX = 90^\circ$, ezért az ABX háromszög egy $2a$ átlójú négyzet fele, $XA = XB$ és $\angle AXB = 90^\circ$ (5. ábra).



5. ábra



6. ábra

Forgassuk el az $e := AB$ egyenest az X pont körül 90° -kal. A kapott e' egyenes merőleges lesz az e egyenesre, így megegyezik a feladatban B -ben állított AB -re merőleges egyenessel (6. ábra).

Mivel $AX = BX$ és $\angle AXB = 90^\circ$, ezért a forgatás során A képe B lesz. Tudjuk, hogy $b = AZ = A'Z' = BY$, így Z képe $Y = Z'$. Mivel a forgatás távolságtartó, így $XZ = XZ' = XY$, és mivel 90 fokkal forgattunk, így $\angle ZXZ' = \angle ZXY = 90^\circ$. Tehát az XZY egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, és így a keresett szög, $\angle XZY = 45^\circ$.

91 dolgozat érkezett. 5 pontos 62, 4 pontos 11, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 11 dolgozat. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.