

- [8] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Editeur, Paris, 1975, *Forme, hasard et dimension*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
- [9] J. H. Shapiro, *A fixed-point farrago*, Universitext, Springer, 2016.

Bessenyei Mihály és Péntes Evelin  
Debrecen

## Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



### I. rész

1. a) Adott két függvény:

$$f(x) = \frac{2x+9}{3}; \quad g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}.$$

Van-e olyan  $x \in \mathbb{R}$ , ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik? (6 pont)

- b) Van-e olyan  $p$  valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:

$$A = \log_2(p+2) + \log_2(p-2); \quad B = 1 + \log_2(p+10)? \quad (6 \text{ pont})$$

2. Solymás tanár úr biológia órájára 26 végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánétológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő céllal) meglehetősen szigorú volt, ezért 21-en nem kaptak ötöst biológiából és 19-en nem kaptak ötöst humánétológiából. Ugyanakkor 8-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.

- a) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból? (4 pont)

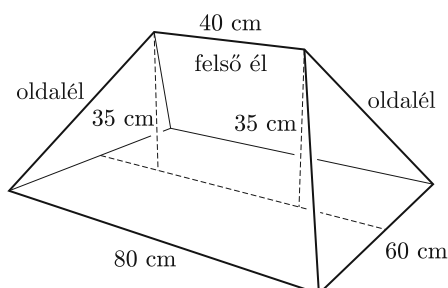
A biológia próbaérettségét mind a 26 diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga  $\frac{60}{13}$  lett.

- b) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (8 pont)

3. a) Határozzuk meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$  függvény lokális maximumhelyét. (5 pont)

b) Mekkora területet zár be a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x^2 - 6x - 24$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely? (6 pont)

- c) Mennyi az  $a_n = \frac{11n-5}{3n+8}$  sorozat határértéke? (3 pont)



4. Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai 60 cm és 80 cm. A babaházra egy levehető „sátortetőt” készített. A tető felső éle 40 cm hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabik középvonala felett, attól 35 cm távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.

a) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket.

(7 pont)

Zsófi a tető, trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszet szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

b) Mekkora a legnagyobb területű téglalap területe, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg.

(6 pont)

## II. rész

5. A DÖ 900 pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott 400 póló 2%-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvs feliratot nyomtatatta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók 3,4%-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a 900 alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett ...)

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták?

(5 pont)

A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak  $p\%$ -ával. Így a póló 50 Ft-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árat  $p\%$ -kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár  $p\%$ -ával csökkentették volna az árat.

b) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés?

(11 pont)

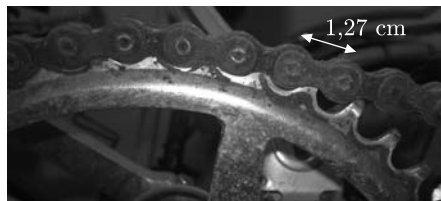
6. Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron 46 fog található, a hátsó fogaskeréken pedig 18 fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.) Az 1. ábrán a lánc felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánc a fogaskerékre. Két lánctengelye 1,27 cm távolságra van egymástól (lásd 2. ábra).

a) Milyen hosszú lánc férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk láncsal?

(3 pont)



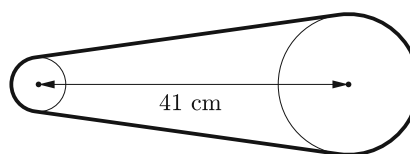
1. ábra



2. ábra

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm van egymástól (3. ábra) és a lánc teljesen feszes.

b) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegyre pontosággal adjuk meg.) (10 pont)



3. ábra

A láncokat gyártó üzemben 160 láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok 2%-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban 5000 láncdarab kering a futószalagon.

c) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét. (3 pont)

7. Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy 13 fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a 13 ember.” (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb” és „legalább” szavak matematikai lényegét . . .)

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13-an szálltak be az üres liftbe.

a) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.) (3 pont)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok: 12.A: 32 fő, 12.B: 33 fő, 12.C: 31 fő, 12.D: 30 fő, 12.E: 29 fő, 12.F: 28 fő? (6 pont)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezét fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezét. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezét, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni.”

c) Mire alapozta állítását? (3 pont)

Az E5ös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítői is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítőlámpát, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

d) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól? (4 pont)

8. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:

a)  $A := \{P(x; y) \mid 9x^2 - 16y^2 \geq 0\}$ . (5 pont)

b)  $B := \{Q(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ . (3 pont)

c) Mekkora az  $A \cap B$  halmaz területe? (8 pont)

9. Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 8.$$

a) Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban? (3 pont)

b) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak. (5 pont)

c) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat  $n$ -edik eleme a másodiktól kezdve:  $a_n = 3^{n-1} + 4$ . (8 pont)

**Balga Attila, Székely Péter**

Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium

## Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: <http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml>. Előfizetési díj a 2020–2021-es tanévre (2020 szeptemberétől 2021 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

*Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.*