Matematika feladatok megoldása

B. 4992. *Az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyikét pirosra vagy kékre színezzük. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk három különböző számot, amelyek számtani sorozatot alkotnak, és mindhárom szám színét a másik színre változtatjuk. Mely n-ekre lehet az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges színezéséből kiindulva elérni, hogy mindegyik szám piros legyen?*

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy az $n \geqslant 8$ esetekben bármelyik kiinduló színezés esetén elérhető, hogy a számok pirosak legyenek, viszont $n \leqslant 7$ esetén mindig megadható olyan alaphelyzet is, amikor ez nem érhető el.

Először azt mutatjuk meg, hogy nyolc szomszédos szám esetén mindig megadható olyan néhány lépésből álló színezési sorozat, amely végül a nyolc szám közül egynek a színét megváltoztatja, a többit pedig változatlanul hagyja.

Az alábbi táblázatban a felső sorban elhelyezett számok jelentsék a nyolc szám közül annak a sorszámát, amelynek a színét kizárólagosan meg akarjuk változtatni, míg az alatta elhelyezkedő sorozatok azt, hogy ez a változtatás (csak ennek a nyolc számnak a felhasználásával) milyen lépésekkel érhető el.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
4, 5, 6	5, 6, 7	4, 5, 6	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 3	2, 3, 4
5, 6, 7	6, 7, 8	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5
1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8	4, 5, 6	5, 6, 7	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 5, 8
		2, 5, 8	5, 6, 7	6, 7, 8	2, 5, 8		
		1, 2, 3	1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8		

Tehát ha $n \geqslant 8$, akkor bármelyik kék számra tekinthetünk egy szomszédos nyolcast és azzal ezt a számot a fenti sorozatok valamelyikével pirosra színezhetjük.

Meg kell még mutatni, hogy $n \leqslant 7$-re mindig van olyan kiinduló helyzet, amelyből nem színezhető a megengedett lépésekkel midegyik szám pirosra.

Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, és nem csak piros színű számaink vannak, akkor nem tudjuk a színezésüket megváltoztatni.

Legyen ezek után $3 \leqslant n \leqslant 7$ és induljunk ki abból a helyzetből, amikor a 2 kék, a többi szám pedig piros színű. Nevezzük a színezés szempontjából *fontos számok*nak a 2, 3, 5, 6 közül azokat, amelyek nem nagyobbak, mint az aktuális n. A következő táblázatban a *fontos számokat* félkövéren szedtük.

1	**2**	**3**	4	**5**	**6**	7

$n = 7$-ig a lehetséges háromtagú számtani sorozatok:

$$\{1, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, 4\}, \{\mathbf{3}, 4, \mathbf{5}\}, \{4, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{5}, \mathbf{6}, 7\}, \{1, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{2}, 4, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{5}, 7\}, \{1, 4, 7\}.$$

Természetesen, ha $n < 7$, akkor ezek közül azokat el kell hagyni, amelyekben az n-nél nagyobb szám is előfordul.

A bizonyítás szampontjából azonban ez nem jelent problémát, mert sorra ellenőrizhetően mindegyik ilyen sorozatban a „fontos számok" közül pontosan nulla vagy kettő szerepel, azaz ezen lépések egyike sem fogja a színezésben szereplő kék számok paritását megváltoztatni. Induláskor csak egy szám, nevezetesen a 2 volt kék, így nem érhető el, hogy mindegyik szám piros legyen.

Terjék András József (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

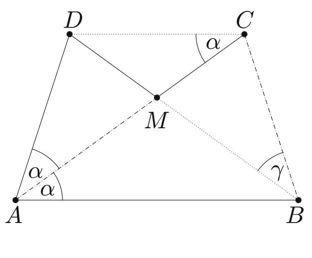
Összesen 51 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 31, 3 pontot 8 tanuló. 2 pontos 5, 1 pontos 1 tanuló dolgozata. 0 pontos 5, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.

B. 5006. *Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M. Az AC átló felezi a BAD szöget, $AM = BC$ és $BM = CD$. Határozzuk meg a trapéz szögeit.*

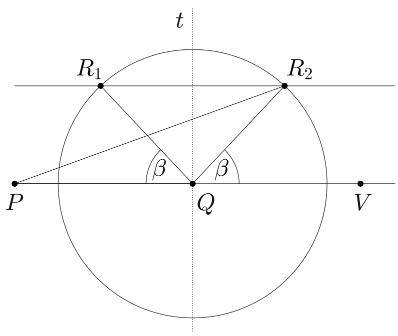
(*4 pont*) OKTV feladat alapján

Megoldás. A trapéz alapjain fekvő $CAB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ szögek váltószögek, tehát egyenlők. Emiatt az ACD háromszög egyenlő szárú. A trapéz ismert tulajdonsága, hogy az AMD és BCM háromszögek területe egyenlő. Azt is tudjuk a feladat feltételei, illetve az előbbi szögegyenlőség alapján, hogy $AM = BC$, továbbá $BM = CD = DA$. Vagyis az AMD és BCM háromszögeknek nem csak a területük egyezik meg, hanem két-két oldaluk is (*1. ábra*).

Belátjuk, hogy ez a két háromszög egybevágó is.



1. ábra



2. ábra

Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelynek két-két oldala és területe megegyezik. Ha adott a terület, akkor ismerjük az adott oldalakhoz tartozó magasságokat is. Ha felvesszük az egyik adott oldalt (PQ) és az ismert hozzátartozó magassággal párhuzamost húzunk ezzel az oldallal, akkor biztos, hogy a háromszög harmadik csúcsa csak ezen a párhuzamos egyenesen helyezkedhet el. A harmadik csúcs (R) ezen kívül rajta van az adott szakasz egyik végpontja mint középpont körül rajzolt, a másik adott oldal hosszúságával megegyező sugarú körvonalon. A párhuzamos egyenes és a körvonal egymást legfeljebb két pontban metszi (R_1, R_2) a *2. ábra* szerint. (A másik párhuzamos egyenes berajzolása, a végpontok és a körüljárás felcserélése nem vezet ezektől eltérő megoldásra.)

A kör középpontjában a PQ egyenesre állított merőleges egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el az R_1Q és R_2Q szakaszok, ezért $PQR_1\sphericalangle = VQR_2\sphericalangle$, tehát a PQR_1 és PQR_2 szögek, ha nem egyenlők, akkor $180°$-ra egészítik ki egymást.

Most térjünk vissza az AMD és BCM háromszögek vizsgálatához. Előfordulhat-e itt, hogy az első ábrán α-val és γ-val jelölt szögek kiegészítő szögek? A szögek elhelyezkedése alapján $\alpha = ACD\sphericalangle < BCD\sphericalangle$ és $\gamma = DBC\sphericalangle < ABC\sphericalangle$, így ekkor

$$180° = \alpha + \gamma < BCD\sphericalangle + ABC\sphericalangle$$

lenne, ez pedig ellentmondás, mert az $ABCD$ trapéz B-hez és C-hez tartozó szögei $180°$-ra egészítik ki egymást. Az α és γ szögek tehát ugyanakkorák.

Innen a megoldás már néhány lépésben befejezhető. Beláttuk tehát, hogy $DAM\triangle \cong MBC\triangle$. Az AMD és BMC szögek csúcsszögek, ezek is egyenlők, vagyis $ADM\sphericalangle = BMC\sphericalangle = AMD\sphericalangle = BCM\sphericalangle$. Ez a két háromszög tehát egyenlő szárú is. A DMC háromszög is egyenlő szárú, ennek a háromszögnek külső szöge a $DMA\sphericalangle$, amely ezek szerint 2α nagyságú. Az AMD egyenlő szárú háromszög szögeire

$$MAD\sphericalangle + AMD\sphericalangle + MDA\sphericalangle = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°.$$

Innen $\alpha = 36°$, végül az $ABCD$ trapéz szögei $72°$, $72°$, $108°$, $108°$.

Fleiner Zsigmond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 67 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 46, 3 pontot 11 tanuló. 2 pontos 3, 1 pontos 7 tanuló dolgozata.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1609–1615.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1609. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19,$$

$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$