Az első két dobás összege úgy lehet 10, ha a játékos a $(4;6)$, $(6;4)$, vagy $(5;5)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

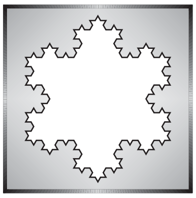
Az első két dobás összege úgy lehet 6, ha a játékos az $(1;5)$, $(5;1)$, $(2;4)$, $(4;2)$ vagy $(3;3)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{5}{36}$.

Az első két dobást követő dobás összege úgy lehet 4, ha a játékos az $(1;3)$, $(3;1)$ vagy $(2;2)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

(A két egymás utáni dobás egymástól független esemény), így ennek a valószínűsége $\frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36}$. A keresett valószínűség:

$$\frac{3}{36} + \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{41}{432} \approx 0{,}095.$$

**Varga Péter**
Budapest



## C gyakorlat megoldása

**C. 1552.** *Bizonyítsuk be, hogy ha* $0 < a < 1$ *és* $0 < b < 1$, *akkor*

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1.$$

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

**Megoldás.** Vegyük $a$ és $b$ harmonikus közepét:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Látható, hogy a feladatban a logaritmusok argumentumaként szereplő értékeket kapjuk.

Legyen $c$ egy valós szám, melyre teljesül, hogy $0 < c < 1$. Ekkor az $f(x) = \log_c(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, de helyettesítési értéke a $]0,1[$ tartományon végig pozitív marad, hiszen $x = 1$-re $f(x) = f(1) = \log_c(1) = 0$. Mivel a függvény szigorúan monoton csökken, ezért ha $x_1 \leqslant x_2$, akkor $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = x_2$.

A nevezetes közepekre való össszefüggés szerint két pozitív szám mértani közepe nem kisebb azok harmonikus közepénél. Ez $a$-ra és $b$-re a következőt jelenti: $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$. Mivel $a$ és $b$ 1-nél kisebb pozitív számok, ez (a fentiek alapján) azt jelenti, hogy

$$\log_a\left(\sqrt{ab}\right) \leqslant \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \quad \text{és} \quad \log_b\left(\sqrt{ab}\right) \leqslant \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Mivel (a fentiek alapján) tudjuk, hogy mind a négy logaritmikus kifejezés értéke pozitív, felírhatjuk, hogy

$$\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right) \leqslant \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Így tehát elég belátnunk, hogy $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right) \geqslant 1$, hiszen ekkor a feladatban szereplő egyenlőtlenség is teljesül.

Tegyük fel, hogy $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\log_b\left(\sqrt{ab}\right) \geqslant 1$. Ekvivalens átalakításokat használva:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log_a(ab)\cdot\frac{1}{2}\log_b(ab) &\geqslant 1,\\
\log_a(ab)\log_b(ab) &\geqslant 4,\\
(\log_a a+\log_a b)(\log_b a+\log_b b) &\geqslant 4,\\
(1+\log_a b)(\log_b a+1) &\geqslant 4,\\
\log_b a+1+\log_a b\log_b a+\log_a b &\geqslant 4,\\
\log_a b+\log_b a+\log_a b\log_b a &\geqslant 3.
\end{aligned}$$

Az ismert összefüggés szerint $\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}$. Ezt felhasználva az egyenlőtlenség tovább alakítható:

$$\begin{aligned}
\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+1 &\geqslant 3,\\
\log_a b+\frac{1}{\log_a b} &\geqslant 2,\\
(\log_a b)^2-2\log_a b+1 &\geqslant 0,\\
(\log_a b-1)^2 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Egy valós szám négyzete mindig nemnegatív, így ez az egyenlőtlenség mindig teljesül. Egyenlőség $\log_a b=1$ esetén áll fenn. Ekkor $a=b$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a feladatban szereplő egyenlőtlenség is minden esetben teljesül, és egyenlőség $a=b$ esetén áll fenn.

*Mészáros Márton* (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)

19 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 7 versenyző: Ajtai Boglárka, Hordós Adél Zita, Kis Károly, Mészáros Márton, Molnár István, Nyitrai Boglárka, Szigeti Donát. 4 pontos 3, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 0 pontos 2 dolgozat.