

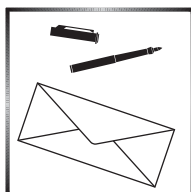
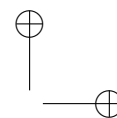
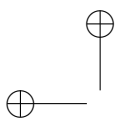
KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

70. évfolyam 5. szám

Budapest, 2020. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK		
<i>Kós Géza</i> : Térbe kilépő bizonyítások, ráadás	258	Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
<i>Domokos Gábor, Kovács Flórián, Lángi Zsolt, Regős Krisztina, Varga Péter Tamás</i> : Konvex poliéderek egyensúlyi pontjai	264	Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
<i>Varga Péter</i> : Megoldásvázlatok a 2020/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladat-sorához	273	Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Matematika C gyakorlat megoldása (1552.)	284	Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Matematika feladatok megoldása (4992., 5006.)	286	Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1609–1615.)	288	Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5102–5109.)	289	Felelős kiadó: KATONA GYULA
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (777–779.)	291	Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Informatikából kitűzött feladatok (511–513., 45., 144.)	292	Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
<i>Berke Martin</i> : Vezető henger mozgása homogén mágneses térben	297	INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247
Fizika gyakorlatok megoldása (688., 697.)	305	A matematika bizottság vezetője: HERMANN PÉTER
Fizika feladatok megoldása (5186., 5190., 5194., 5199.)	308	Tagjai: GYENES ZOLTÁN, KÁROLYI GERGELY, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KÓS RITA, LORÁNT LÁSZLÓ, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR
Fizikából kitűzött feladatok (396., 709–712., 5230–5239.)	313	A fizika bizottság vezetője: RADNAI GYULA
Problems in Mathematics	317	Tagjai: BARANYAI KLÁRA, HOLICS LÁSZLÓ, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SIMON LÁSZLÓ, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC
Problems in Physics	319	Az informatika bizottság vezetője: SCHMIEDER LÁSZLÓ
		Tagjai: BUSA MÁTÉ, CSERTÁN ANDRÁS, FARKAS CSABA, FODOR ZSOLT, LÁSZLÓ NIKOLETT, LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR
		Fordítók: GRÓF ANDREA, TASNÁDI ANIKÓ
		Szerkesztőségi titkár: TRÁSY GYÖRGYNÉ
		A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
		A lap megrendelhető az Interneten: www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml
		Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
		Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
		E-mail: szerk@komal.hu
		Internet: http://www.komal.hu
		This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml
		A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Térbe kilépő bizonyítások, ráadás¹

Gergonne megoldása az Apollóniusz-feladatra

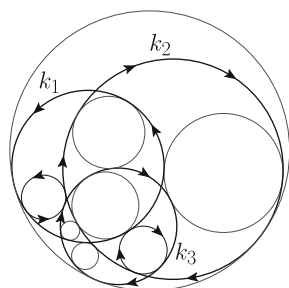
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A pergai Apollóniusztól² származtatják a következő klasszikus feladatot.

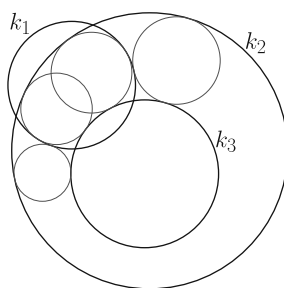
Apollóniusz-feladat: *Adott három kör, k_1 , k_2 és k_3 . Szerkesszük meg az összes olyan m kört, amely k_1 , k_2 és k_3 mindegyikét érinti.*

A feladatnak sokféle speciális és elfajuló esete létezik: valamelyik kör helyett egyenes (végtelen sugarú kör) is lehet, illetve a kör egy ponttá fajulhat (nulla sugarú kör), ilyenkor az érintés helyett azt követeljük meg, hogy m átmenjen az illető ponton. Néhány nagyon speciális esettel már általános iskolában találkoztunk, mint például három adott ponton átmenő, vagy a három adott egyenest érintő körök megszerkesztése.

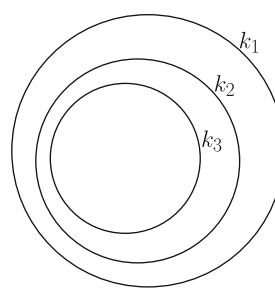
Szeretjük kikötni, hogy k_1 , k_2 és k_3 általános helyzetű legyen, vagyis a középpontjaik ne essenek egy egyenesre, ne menjenek át egy ponton, ne érintsék egymást, a sugaraik különbözőek legyenek, és a három körnek ne legyen közös érintője. Ismert, hogy általános helyzetű körök esetén az m kör nyolc- vagy négyféle lehet, és az is elfordulhat, hogy nincs ilyen érintő kör; egy-egy ilyen elrendezést lerajzoltam az 1a.–1c. ábrákon.



1a. ábra



1b. ábra

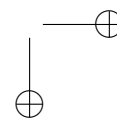
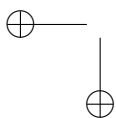


1c. ábra

A megoldásokat (az érintő köröket) csoportokba rendezhetjük úgy, hogy a köröket és egyeneseket irányítjuk, és csak olyan érintést engedünk meg, amikor az egymást érintő köröknek és egyeneseknek az iránya is megegyezik. Az 1.a ábrán a nyilacsukák jelzik az egyik lehetséges irányítást; a nyolc érintő kör közül kettő felel meg

¹A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

²Pergai Apollóniusz (Ἀπολλώνιος ὁ Περραιῖος) görög matematikus és csillagász, Kr.e. 2–3. század.





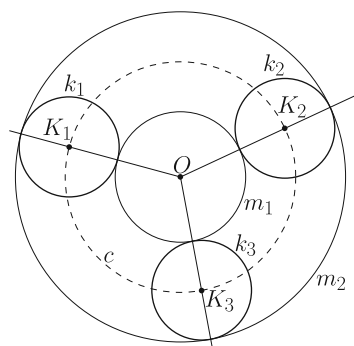
ennek a szigorúbb feltételnek. Világos, hogy csak annak van jelentősége, hogy k_1 , k_2 , k_3 közül mely párok azonos vagy ellentétes irányításúak, tehát a megoldásokat négy (esetleg üres) csoportba osztottuk. Érdekes a feladatot így is megfogalmazni:

Irányított Apollóniusz-feladat: Adott három irányított kör, k_1 , k_2 és k_3 . Szerkesszük meg az összes olyan m irányított kört, amely k_1 , k_2 és k_3 mindegyikét érinti úgy, hogy az érintési pontokban a körök iránya azonos.

Az Apollóniusz-feladatra sokféle megoldás ismert; talán a legszebb Gergonne³ szerkesztése. A cikksorozatnak ebben az utolsó utáni részében az ő szerkesztését szeretném bemutatni.

Az azonos sugarú körök esete

Ha k_1 , k_2 és k_3 irányítása azonos (mondjuk pozitív), és a sugaruk ugyanakkora, akkor könnyű dolgunk van. Legyen a három kör középpontja K_1 , K_2 , illetve K_3 , a közös sugár r . Rajzoljuk meg a K_1 , K_2 , K_3 pontokon átmenő c kört; ennek középpontja legyen O , sugara r_0 . (Előfordulhat, hogy $r_0 < r$.) Könnyű meggondolni, hogy a feladatnak két megoldása van, az O középpontú, $|r_0 - r|$ sugarú m_1 kör és az $r_0 + r$ sugarú m_2 kör (2. ábra).



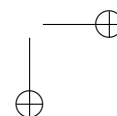
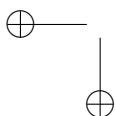
2. ábra

Az általános esetet megpróbálhatjuk visszavezetni az egyenlő sugarú esetre, ehhez hasznos és kézenfekvő eszköz az inverzió: kereshetünk egy olyan inverziót, vagy inverziók egymás utánját, amely előbb két, majd végül mindhárom kört ugyanakkora sugarú, és azonos irányítású körbe képezi. Helyette inkább egy másik irányt szeretnék mutatni, amely nem fog minden esetben működni, de jól bemutatja a Gergonne-féle szerkesztést, és hogy milyen matematikai érdekességek vannak mögötte.

Azonos sugarú körök a félsíkmodellben

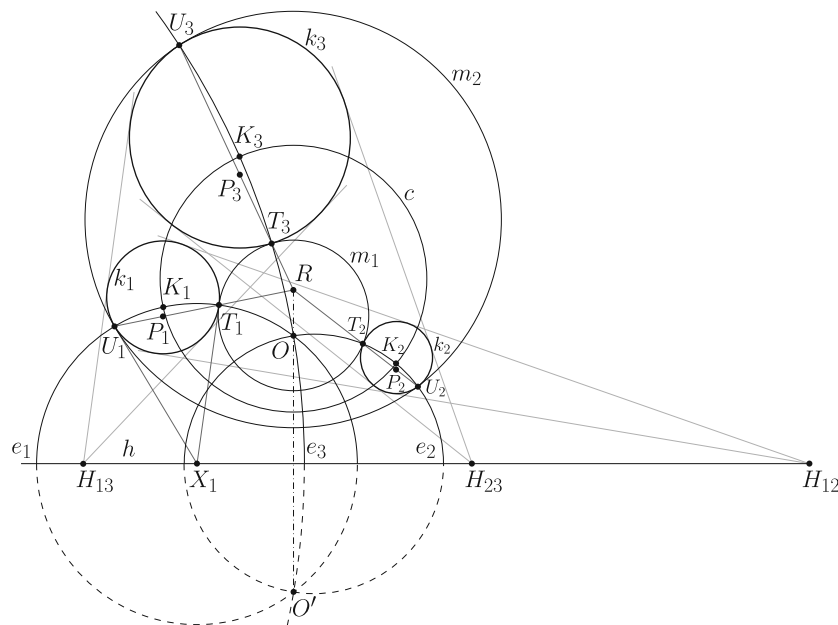
A cikksorozat 6. részében már láttunk példákat arra, hogy a Poincaré-féle félsíkmodellben különböző méretűnek látszó körvonalak mégis lehetnek „ugyanakkorák”: két körvonal akkor „ugyanakkora”, ha a külső hasonlósági pontjuk a félsíkmodell határára esik. Nosza, szerkesszük meg az irányított k_1 , k_2 és k_3 köreink párjainak hasonlósági pontjait; legyen k_i és k_j hasonlósági pontja H_{ij} . A Monge-tételből tudjuk, hogy a három hasonlósági pont egy h egyenesre esik; ha szerencsénk van, akkor a h -nak ugyanazon az oldalán van k_1 , k_2 és k_3 ; ezt a félsíkot fogjuk a félsíkmodellnek tekinteni. A k_i kör „középpontja” a modellben legyen K_i , és legyen r a közös „sugár”. Rajzoljuk meg ismét a K_1 , K_2 , K_3 pontokon átmenő c körvonalat; ismét csak ha szerencsénk van, akkor c teljes egészében a félsík belsejébe esik, vagyis egy hiperbolikus „kör”. Legyen c modellbeli „középpontja” az O pont. A feladat

³Joseph Diez Gergonne francia matematikus, 1771–1859.





két megoldását, az m_1 és m_2 köröket úgy kapjuk, hogy ugyanezzel a középponttal rajzolunk egy r -rel kisebb, és egy r -rel nagyobb sugarú kört (3. ábra).



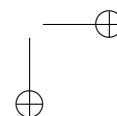
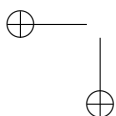
3. ábra

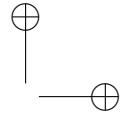
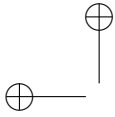
Azt gondolhatnánk, hogy ezzel vége, megszerkesztettük a két érintő kört, de inkább tanulmányozzuk tovább az ábrát; a lényeg csak ezután következik. Jelöljük T_i -vel, illetve U_i -vel a k_i érintési pontját az m_1 , illetve az m_2 körrel. A T_i pont a k_i és az m_1 külső hasonlósági pontja, az U_i pedig k_i és m_2 külső hasonlósági pontja; a Monge-tétel miatt a T_iU_i egyenes átmegy m_1 és m_2 belső hasonlósági pontján; jelöljük ezt R -rel.

Rajzoljuk meg az O és K_i pontokat összekötő e_i „egyeneseket” is, amelyek a határra merőleges félkörnek látszanak. (Ezzel már kilenc kört zsúfoltunk össze az ábrán.) A félkörök meghosszabbításai átmennek az O pont h -ra vonatkozó tükkörképén, az O' ponton. A c , m_1 , m_2 körök közös „középpontja” az O pont, ezért a látszólagos középpontjaik az OO' egyenesre esnek, így az R pont is az OO' egyenesen van.

Az első fontos észrevételünk, hogy az R pontnak a k_1 , k_2 , k_3 és e_1 , e_2 , e_3 körökre vonatkozó hatványa ugyanaz: az ROO' egyenes az e_1 , e_2 , e_3 körök közös hatványvonala, k_i és e_i hatványvonala pedig az RT_iU_i egyenes. Tehát: az R pont a k_1 , k_2 , k_3 körök hatványpontja.

Legyen most X_i az e_i félkör középpontja. Az e_i félkör átmegy k_i „középpontján”, ezért merőleges k_i -re; emiatt az X_iT_i és X_iU_i szakaszok a k_i érintői. A k_i körben a T_iU_i egyenes az X_i pont polárisa; mivel X_i a h egyenesen van, az RT_iU_i egyenes átmegy a h egyenes k_i -re vonatkozó pólusán (az ábrán P_i -vel jelöltem).





Gergonne szerkesztése az Apollóniusz-feladatra

Az előbbi okoskodásból elhagyhatjuk a félsíkmodell, a c és az e_i köröket, és leolvashatjuk Gergonne módszerét.

Gergonne szerkesztése: Legyen k_1, k_2 és k_3 hatványpontja R , jelölje k_i és k_j hasonlósági pontját H_{ij} . A három hasonlósági pont egyenesen legyen h , és a k_i körben legyen h pólusa a P_i pont. Az irányított Apollóniusz-feladatnak akkor létezik megoldása, mégpedig pontosan kettő, ha mindegyik k_i kört elmetshi a megfelelő RP_i egyenes, és a két metszéspont éppen a k_i két érintési pontja a két megoldás körrel.

Egy igazán jó szerkesztési eljárástól elvárjuk, hogy az összes megoldást megtalálja, és lehetőleg ne produkáljon hamis megoldásokat, amelyeket tovább kell válogatnunk. A fenti szerkesztésben van egy kis bizonytalanság: a módszer mindegyik k_i körön megadja a két megoldás érintési pontjait, de azt még el kell döntenünk, hogy mely érintési pontok tartoznak ugyanahhoz a körhöz.

Gergonne eljárása megszerkeszti a megoldásokat

Előbb azt fogjuk ellenőrizni, hogy ha az irányított Apollóniusz-feladatnak létezik megoldása, akkor Gergonne módszere megszerkeszti ezt a megoldást, mégpedig két különböző kört, és a két megoldás érintési pontjainak megkülönböztetésére is mutatunk egy egyszerű módszert.

Tegyük fel, hogy valamilyen m_1 irányított kör megoldása az irányított Apollóniusz-feladatnak; m_1 és k_i érintési pontját jelölje T_i .

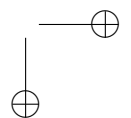
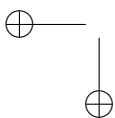
Először megszerkesztjük a másik megoldást. Legyen az R hatványpontnak a k_1, k_2, k_3 körökre vonatkozó közös hatványa λ . Az R középpontú, λ paraméterű inverzió⁴ a k_1, k_2, k_3 köröket önmagukra képezi; $\lambda > 0$ esetén az irányításukat megfordítja. Jelöljük T_i inverzét U_i -vel, és m_1 inverzét m_2 -vel; ha $\lambda > 0$, akkor m_2 legyen m_1 -gyel ellentétes irányítású. Az inverzió érintéstartósága miatt az m_2 kör érinti mindegyik k_i kört az U_i pontban, és az irányításuk is megegyezik. Tehát m_2 egy másik megoldása a feladatnak.

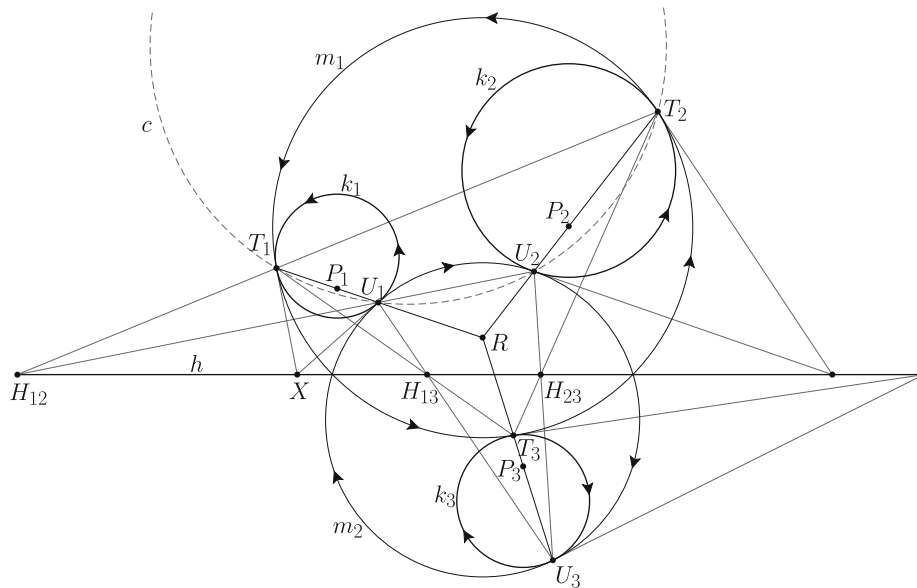
Az m_1, k_i és k_j irányított körök páronként vett hasonlósági pontjai T_i, T_j és H_{ij} ; ezek a Monge-tétel szerint egy egyenesen vannak; ugyanígy, az m_2, k_i és k_j körök páronként vett hasonlósági pontjai, az U_i, U_j és H_{ij} is egy egyenesen vannak (4. ábra).

Az m_2 szerkesztése miatt $RT_1 \cdot RU_1 = RT_2 \cdot RU_2 = \lambda$, ezért T_1, T_2, U_1, U_2 egy c körön van. A c és m_1 hatványvonala a T_1T_2 egyenes, a c és m_2 hatványvonala az U_1U_2 egyenes. A két hatványvonal metszéspontja a H_{12} pont, tehát H_{12} hatványa az m_1 és m_2 körökre ugyanakkora. Ugyanez igaz a H_{13} és a H_{23} pontokra is; ebből látjuk, hogy a h egyenes az m_1 és az m_2 hatványvonala.

Most húzzuk meg k_1 közös érintőit az m_1 és m_2 egyenesekkel; ezek metszéspontja legyen X . A T_1X egyenes a k_1 és m_1 hatványvonala, az U_1X egyenes pedig

⁴Pozitív λ esetén a $\sqrt{\lambda}$ sugarú körre vonatkozó inverzió, negatív λ esetén a $\sqrt{|\lambda|}$ sugarú körre vonatkozó inverzió tükörképe.





4. ábra

a k_1 és m_2 hatványvonala, tehát X rajta van az m_1 és m_2 hatványvonalán is, ami – mint láttuk – a h . Másrészt a T_1U_1 egyenes az X pont polárisa a k_1 körben; mivel h átmegy az X ponton, az X polárisa is átmegy a h pólusán, a P_1 ponton. Tehát a P_1 pont az RT_1U_1 egyenesen van. Ugyanígy láthatjuk, hogy az RT_2U_2 és az RT_3U_3 egyenes is átmegy P_2 -n, illetve P_3 -on.

Ezzel ellenőriztük, hogy Gergonne módszere tényleg megszerkeszti a megoldásokat. Az is látszik, hogy a hat érintési pontot hogyan kell két hármas csoportba osztanunk: ha már eldöntöttük, hogy mondjuk a k_1 kör és az RP_1 egyenes két metszéspontja közül melyik a T_1 és melyik az U_1 , akkor a további négy metszéspont közül T_j az, amelyik a $H_{1j}T_1$ egyenesen, U_j pedig az, amelyik a $H_{1j}U_1$ egyenesen van ($j = 2, 3$).

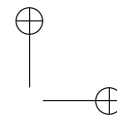
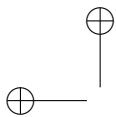
Ha számítógéppel szeretnénk ábrát rajzolni a szerkesztéshez, akkor T_1 és U_1 kijelölése után a T_j és az U_j pontot az RP_j egyenes és a $H_{1j}T_1$, illetve RP_j és $H_{1j}U_1$ metszéspontjaként érdemes definiálnunk.

Gergonne eljárása csak a megoldásokat szerkeszti meg

A megfordítás is igaz: amit Gergonne módszere megszerkeszt, azok valóban megoldások.

A k_1 kör és az RP_1 egyenes két metszéspontját betűzzük meg T_1 -gyel és U_1 -gyel. A két megoldást úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy a k_1 kört a T_1 , illetve az U_1 pontból felnagyítjuk. A T_2, U_2, T_3, U_3 pontokat máshogy fogjuk definiálni, de végül ugyanazok a pontok lesznek.

Legyen a k_1 kör második metszéspontja a $H_{12}T_1$ és a $H_{12}U_1$ egyenessel A , illetve B . Először megmutatjuk, hogy az AB egyenes átmegy a P_1 ponton. Vizsgál-



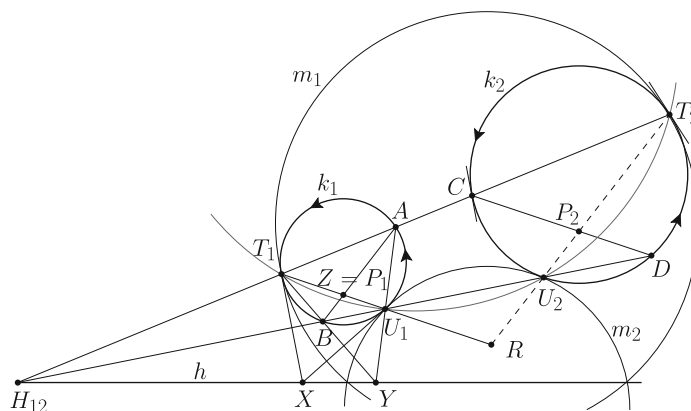
juk a k_1 körbe írt T_1U_1AB négyszöget a k_1 -re vonatkozó polaritás szerint. Legyen az AU_1 és BT_1 egyenesek metszéspontja Y , az AB és T_1U_1 egyenesek metszéspontja pedig Z .

A $H_{12}YZ$ háromszög autopoláris, ezért a Z pont polárisa a $H_{12}Y$ egyenes, és ezen rajta van a T_1U_1 egyenes pólusa, az X pont is. Tehát Z polárisa a h egyenes, és $Z = P_1$.

A k_1 kört középpontosan a k_2 körbe nagyíthatjuk a H_{12} pontból; az A, B, T_1, U_1 pontok képét jelöljük rendre T_2, U_2, C -vel, illetve D -vel; a P_1 pont képe P_2 . Mivel

$$1 = \frac{H_{12}T_1 \cdot H_{12}A}{H_{12}U_1 \cdot H_{12}B} = \frac{H_{12}T_1 \cdot H_{12}T_2}{H_{12}U_1 \cdot H_{12}U_2},$$

a T_1, U_1, T_2, U_2 pontok egy körön vannak. A k_1, k_2 és a $T_1U_1T_2U_2$ körök hatványpontja R , emiatt a $T_2U_2P_2$ egyenes átmegy R -en is. Tehát T_2 és U_2 valóban a k_2 kör és az RP_2 egyenes két metszéspontja (5. ábra).



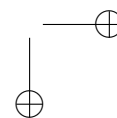
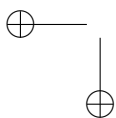
5. ábra

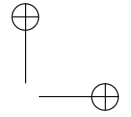
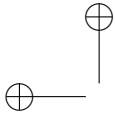
Vegyük észre, hogy a T_1P_1A és CP_2T_2 háromszögek hasonlóak, mert a megfelelő oldalaik párhuzamosak; a két háromszöget ugyanaz a H_{12} középpontú nagyítás viszi egymásba, mint a k_1 és a k_2 kört; emiatt a k_1 kör T_1 -ben és A -ban húzott érintői párhuzamosak a k_2 kör C -ben, illetve T_2 -ben húzott érintőivel.

Nagyítsuk a T_1 pontból a k_1 kört $\frac{T_1R}{T_1P_1}$ -szeresére; a k_1 képe legyen az m_1 irányított kör: az m_1 kör a T_1 pontban érinti k_1 -et, és T_2 -ben érinti k_2 -t, és az irányuk is megegyezik.

Hasonlóan, nagyítsuk az U_1 pontból a k_1 kört $\frac{U_1R}{U_1P_1}$ -szeresére, az így kapott kör legyen m_2 . A T_i és U_i pontok felcserélésével ugyanígy kapjuk, hogy az m_2 kör az U_1 pontban érinti k_1 -et, és U_2 -ben érinti k_2 -t.

Ugyanezt elmondhatjuk a k_2 helyett a k_3 körrel is, így definiáljuk a T_3 és U_3 pontokat. Mivel az m_1 és m_2 definíciójában csak a k_1 kör és az R, P_1, T_1 és U_1 pontok szerepelnek, azt kapjuk, hogy ugyanaz az m_1 és m_2 kör k_3 -at érinti a T_3 , illetve az U_3 pontban.





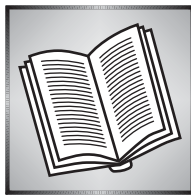
Feladatok

1. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek átmennek két adott ponton, és érintenek egy adott egyenest.
2. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy adott ponton, és érintenek két adott egyenest.
3. Az ABC háromszögbe írt kör a BC oldalt a D pontban érinti. A BC oldalhoz hozzáírt kör középpontját D -vel összekötő egyenes a beírt kört másodszer a T pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a BTC kör érinti a beírt kört.
4. A körökre illesztett kúpokkal igazoljuk, hogy az irányított Apollóniusz-feladatnak nulla vagy két megoldása van.

Fuss el véle

Ideje ezt a hosszúra nyúlt sorozatot befejezni, a tanévnek is a végére értünk. Mindenkinék köszönöm a figyelmet és a türelmet; különösen azoknak, akik végigolvasták, és a feladatokon is gondolkodtak.

Kós Géza



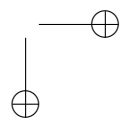
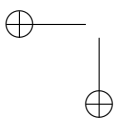
Konvex poliéderek egyensúlyi pontjai

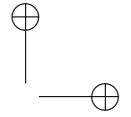
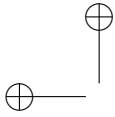
1. Bevezetés

Jelen folyóirat egy korábbi számában megjelent cikkben [5] vízszintes síkra helyezett, saját tömeggel rendelkező konvex poliéderek stabil egyensúlyi helyzetére vonatkozó eredményeket ismerhettünk meg. Ezen cikkben, az *egyensúlyi pont* fogalmának ismertetése után, többek között két állítás bizonyítását olvashatjuk:

- Minden homogén tömegeloszlású (röviden: homogén) tetraédernek legalább két stabil egyensúlyi pontja van (azaz van két olyan lapja, melyen a test elbillenés nélkül megáll), illetve
- létezik olyan homogén 19 lapú konvex poliéder, melynek pontosan egy stabil egyensúlyi pontja van.

Érdeemes megjegyezni, hogy az első állítás megtalálható, mint a Gnädig Péter, Honyek Gyula és Vígh Máté szerkesztette, 333 furfangos feladat fizikából című feladatgyűjtemény F. 120-as feladata [4]. Az említett [5] cikk végén a szerző négy kérdést fogalmaz meg konvex poliéderek egyensúlyi pontjaira vonatkozóan. Ezek közül az első három kérdés stabil egyensúlyi pontokra vonatkozik, és a cikkben megtalálhatjuk a felvetett problémákkal kapcsolatos ismereteink összefoglalását is. Jelen írásunkban többek között azzal a (negyedikként közölt) kérdéssel kívánunk részletesen foglalkozni, amely csúcson – tehát nem stabil módon – egyensúlyozott tetraéderre vonatkozik:





1. kérdés. *Igaz-e, hogy minden homogén tetraédernek van legalább két olyan csúcsa, amely egyensúlyi pont?*

Ez a megfogalmazás a hivatkozott cikk első kérdésének „duálisaként” is felfogható. A kérdés logikáját követve természetes módon adódnak a cikk végén feltüntetett kérdések csúcsokra vonatkozó változatai is, mint például a következő:

2. kérdés. *Létezik-e olyan homogén poliéder, melynek összes csúcsa közül pontosan egy olyan van, amely egyensúlyi pont? Ha igen, mennyi az ilyen tulajdonságú homogén konvex poliéderek minimális csúcscsúszáma?*

A kérdést továbbgondolva egy általánosabb kérdéshez is eljuthatunk:

3. kérdés. *Adott számú és jellegű egyensúlyi ponttal rendelkező homogén poliéderek közt mennyi a minimális lap-, illetve csúcscsúszámú poliéder lapjainak, illetve csúcsainak száma?*

Cikkünk fő témája a 3. kérdés precízebb megfogalmazása, illetve a vele kapcsolatos ismereteink összefoglalása. Ehhez viszont definiálnunk kell a konvex poliéderek egyensúlyi pontjainak különböző típusait, illetve a konvex poliéderek ezekkel kapcsolatos osztályozási rendszerét. Első lépésben talán nem árt felidézniünk egy konvex test egyensúlyi pontjának fogalmát [5].

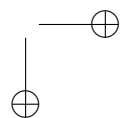
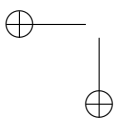
1. definíció. *Legyen K egy konvex test, és X a test egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy a test egy Y határpontja K egy egyensúlyi pontja X -re nézve, ha az Y -on átmenő, XY szakaszra merőleges sík nem metszi a K test belsejét. Ha X a K test tömegközéppontja (homogén sűrűséget feltételezve), azt mondjuk, hogy az Y pont K egy egyensúlyi pontja.*

Érdekes meggondolni, hogy K minden belső pontja lehet K tömegközéppontja alkalmas inhomogén sűrűséget feltételezve, valamint azt, hogy ha Y a K test egy egyensúlyi pontja X -re nézve, akkor K -t alátámasztva Y -ban egy vízszintes síkkal úgy, hogy ne billenjen el, X pontosan Y felett fog elhelyezkedni. A továbbiakban nem csupán stabil egyensúlyi pontokkal foglalkozunk, így érdemes azzal folytatnunk, hogy az egyensúlyi pontok szóba jöhető típusait – akár homogén, akár inhomogén sűrűségeloszlást feltételezve – definiáljuk.

Képzelnünk el, hogy az Y egyensúlyi pontban alátámasztott testet kicsit kibillentjük az egyensúlyi helyzetéből. Előfordulhat, hogy ezt bármilyen irányban megcsinálva a test visszabilen az egyensúlyi helyzet felé, vagy éppen ellenkezőleg, tovább billen, és távolodik az egyensúlyi helyzettől. Előfordulhat az is, hogy a billentés irányától függően a test időnként vissza-, időnként pedig tovább billen az egyensúlyi helyzethez képest. Ezekben az esetekben az egyensúlyi helyzetet rendre stabil, instabil, vagy nyereg típusú egyensúlyi helyzetnek hívjuk. Ezekre példa egy kocka lapközéppontja, csúcsai, illetve élközéppontjai. A precíz matematikai megfogalmazáshoz az alábbi definíciót adjuk.

2. definíció. *Legyen P egy konvex poliéder, X a P tömegközéppontja és Y a P egyensúlyi pontja X -re nézve.*

- *Ha Y a P egy lapjának belső pontja, akkor azt mondjuk, hogy Y egy stabil egyensúlyi pont.*





- Ha Y a P egy élének belső pontja, és az XY szakaszra merőleges, Y -on átmenő sík P -t csak ebben az élben metszi, azt mondjuk, hogy Y egy nyereg típusú egyensúlyi pont.
- Ha Y a P egy csúcsa, és az XY szakaszra merőleges, Y -on átmenő sík P -t csak ebben a csúcsban metszi, azt mondjuk, hogy Y egy instabil egyensúlyi pont.
- Ha Y -ra a fenti három feltétel egyike sem teljesül, azt mondjuk, hogy Y egy degenerált egyensúly.

Meggondolható, hogy P határának a súlyponthoz legközelebbi pontja mindig stabil, a legtávolabbi pontja pedig mindig instabil egyensúlyi pont, tehát P -nek mindig van legalább egy stabil, és legalább egy instabil pontja.

A matematikai analízis egyik híres tételéből, a Poincaré–Hopf-tételből [1] következik, hogy ha egy konvex poliédernek csak nemdegenerált egyensúlyi pontjai vannak, akkor a stabil pontok S , instabil pontok U és a nyeregpontok H száma kielégíti az

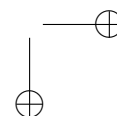
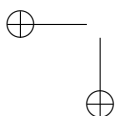
$$S - H + U = 2$$

összefüggést. Érdemes ezt összehasonlítani a jól ismert Euler-tétellel, mely szerint ha egy konvex poliédernek f lapja, e éle és v csúcsa van, akkor $f - e + v = 2$. Ezen mennyiségek jól szemléltethetők az 1. ábrán látható három poliéder segítségével.

f	6	7	7
v	8	10	10
e	12	15	15
$n = f + v + e$	26	32	32
S •	6	7	6
U ○	8	10	8
H ●	12	15	12
$N = S + U + H$	26	32	26
$C = n - N$	0	0	6

1. ábra. Három homogén sűrűségű poliéder és jellemző számadataik: a lapok (f), csúcsok (v) és élek (e) száma, a stabil (S), instabil (U) és nyereg-típusú (H) egyensúlyi pontok száma, ezek összege ($n = f + v + e$, $N = S + U + H$), valamint a poliéderek mechanikai komplexitása ($C = n - N$, lásd a 3. definíciót).

A cikk további részében csak olyan konvex poliéderekkel foglalkozunk, melyeknek nincsenek degenerált egyensúlyi pontjai.





2. Poliéderek komplexitása

Ahogy a bevezetőben említettük, „nemdegenerált” esetben, azaz ha a poliéder minden egyensúlyi pontja stabil, instabil, vagy nyeregpont, akkor ezek S , U és H száma kielégíti az $S - H + U = 2$ összefüggést. Így a fenti adatok közül pl. S és U értéke meghatározza H értékét is. A továbbiakban $(S, U)^E$ -vel fogjuk jelölni az S stabil és U instabil egyensúlyi ponttal rendelkező konvex poliéderek családját. Hasonlóan, az Euler-tétel szerint minden konvex poliéder f lapszáma, e élszáma és v csúcscsúszáma kielégíti az $f - e + v = 2$ összefüggést. Ennek alapján az f lapú és v csúcúsú konvex poliéderek családját $(f, v)^K$ -val fogjuk jelölni. Ezen osztályokat rendre a poliéder egyensúlyi, illetve kombinatorikus osztályának nevezzük.

Említettük, hogy tetszőleges konvex poliédernek van legalább egy stabil és legalább egy instabil pontja, azaz tetszőleges $(S, U)^E$ osztályban $S, U \geq 1$. Hasonlóan, minden konvex poliédernek van legalább 4 lapja és csúcsa, azaz minden $(f, v)^K$ osztályban $f, v \geq 4$. Erről az osztályozási rendszerről többet is tudunk. Steinitz egy tétele [6] szerint pontosan akkor van f lapú és v csúcúsú konvex poliéder, ha

$$(1) \quad f \geq 4, \quad \text{és} \quad \frac{f}{2} \leq v \leq 2f - 4.$$

A továbbiakban azokat a pozitív egészekből álló (f, v) számpárokat, melyek az (1) egyenlőtlenségeket kielégítik, poliedrikus számpároknak nevezzük.

A cikkünkben tárgyalt fő fogalom az alábbi.

3. definíció. Legyen P egy konvex poliéder, melynek nincs degenerált egyensúlyi pontja. Jelölje $N(P)$ a poliéder összes egyensúlyi pontjának számát, és $n(P)$ a lapjai, élei és csúcscsúszáma összegét. Ekkor a $C(P) = n(P) - N(P)$ mennyiséget a P poliéder (mechanikai) komplexitásának nevezzük.

Vegyük észre, hogy a poliéder minden lapja, csúcsa és éle legfeljebb egy egyensúlyi pontot tartalmaz. Tehát ha $P \in (f, v)^K$ és $P \in (S, U)^E$, akkor $S \leq f$ és $U \leq v$, amiből a $H \leq e$ is következik a nyeregpontok H és az élek e számára. Így P komplexitása nem lehet negatív. Másképp megfogalmazva, P komplexitása azon lapjainak, éleinek és csúcscsúszáma száma, melyek nem tartalmaznak egyensúlyi pontot, azaz pl. egy szabályos poliéder komplexitása nulla. A komplexitás értéke jól szemléltethető az illető poliéder (f, v) és (S, U) síkokon elfoglalt helyével, pontosabban ezen helyek egymáshoz viszonyított átlós távolságával, amint azt a 2. ábrán is láthatjuk.

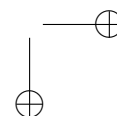
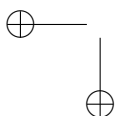
4. definíció. Legyen $S, U \geq 1$. Az $(S, U)^E$ egyensúlyi osztály (mechanikai) komplexitásán az osztályhoz tartozó poliéderek komplexitásának minimumát értjük. Másképpen:

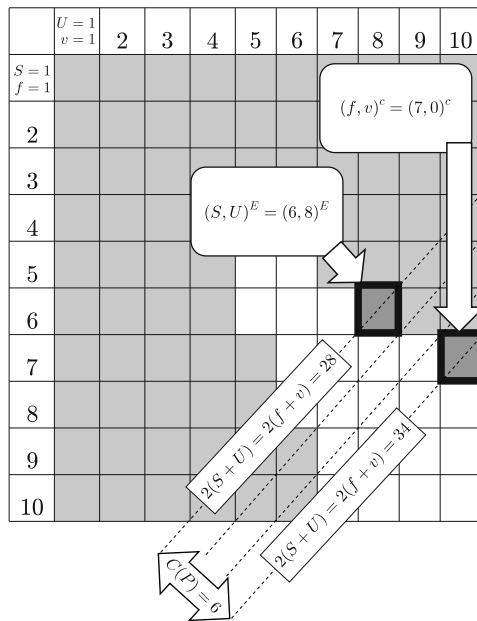
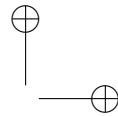
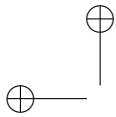
$$C(S, U) = \min \{C(P) : P \in (S, U)^E\}.$$

Ha $P \in (f, v)^K$ és $P \in (S, U)^E$, akkor a Poincaré–Hopf-tétel és az Euler-tétel alapján $C(P) = 2(f + v - S - U)$. Minthogy $f \geq S$ és $v \geq U$, az

$$R(S, U) = \min \{f + v - S - U : f \geq S, v \geq U \text{ és } (f, v) \text{ egy poliedrikus pár}\}$$

mennyiség kétszerese alsó becslése a $C(S, U)$ komplexitásnak:





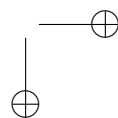
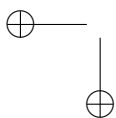
2. ábra. Az 1. ábra jobb szélén látható poliéder elhelyezkedése az (S, U) és (f, v) síkokon. A komplexitás értéke a megfelelő cellákon átmenő feltüntetett átlók távolságával arányos.

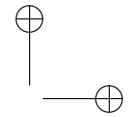
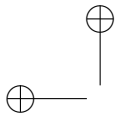
1. megjegyzés. Minden $S, U \geq 1$ esetén $C(S, U) \geq 2R(S, U)$.

Az S és U mennyiségek értékeitől függően explicit módon is megadhatjuk $R(S, U)$ értékét, ahol az $\lceil x \rceil$ mennyiség az x valós szám értéke felfelé kerekítve egészszekre.

$$(2) \quad R(S, U) = \begin{cases} \left\lceil \frac{S}{2} \right\rceil - U + 2, & \text{ha } S > 4 \text{ és } S > 2U - 4, \\ \left\lceil \frac{U}{2} \right\rceil - S + 2, & \text{ha } U > 4 \text{ és } U > 2S - 4, \\ 8 - S - U, & \text{ha } S, U \leq 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezen képletek geometriai jelentése a 3. ábrán látható. Mivel minden poliédernek legalább 4 lapja és 4 csúcsa van, ha $S, U \leq 4$, akkor $C(S, U)$ legalább akkora, mint az (S, U) osztály „távolsága” a $(4, 4)$ osztálytól, azaz „optimális esetben” az osztály egy tetraédert tartalmaz, ez a magyarázata a 3. esetben szereplő képletnek. Ha (S, U) egy poliedrikus pár, akkor „optimális esetben” $(S, U)^E$ tartalmaz egy S lapú és U csúcsú poliédert. Ez felel meg az $R(S, U) = 0$ esetnek. Ha (S, U) nem poliedrikus pár, mert pl. S nagy U -hoz képest, azaz $S > 4$ és $S > 2U - 4$, akkor a legtöbb, amit remélhetünk, hogy találunk az osztályban egy poliédert, melynek





$S \backslash U$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

3. ábra. Az $R(S, U)$ függvény értelmezése $S, U \leq 10$ esetén (az (S, U) táblázatot néhány poliéder képe illusztrálja, a poliedrikus párokhoz tartozó cellák világos háttérűek). Adott (S, U) párhoz tartozó $R(S, U)$ érték kiolvasható a táblázatból az (S, U) mezőnek a legközelebbi fehér mezőtől mért diszkrét távolságaként, lásd a sötétszürke háttérű $(2, 2)^E, (2, 9)^E, (10, 3)^E$ egyensúlyi osztályoknak megfelelő három példát.

S lapja van, és a legkevesebb csúcsa, ami egy S lapú poliédernek lehet, azaz $\lceil \frac{S}{2} \rceil + 2$. Ebből vezethető le az 1. esetben, illetve analóg módon a 2. esetben szereplő képlet.

Felmerülhet a kérdés, hogy milyen $(S, U)^E$ osztályokra teljesülhet a $C(S, U) = 2R(S, U)$ egyenlőség. Ahogy az [5] cikkben láttuk, az $(1, U)^E, 1 \leq U \leq 4$ osztályok nem tartalmazzak tetraédert, tehát ezekben az osztályokban biztosan nem igaz az egyenlőség. Az alábbi állítás, melyet Domokos és szerzőtársai [2] igazoltak 2018-ban azt mutatja, hogy az említett egyenlőség az $(S, 1)^E, 1 \leq S \leq 4$ osztályokban sem teljesül.

1. tétel. *Nincs homogén sűrűségű mono-instabil tetraéder, azaz minden tetraédernek legalább két csúcsa instabil egyensúlyi pont.*

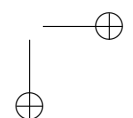
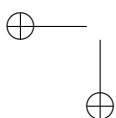
3. Az egyensúlyi osztályok komplexitási korlátai

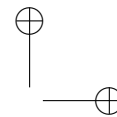
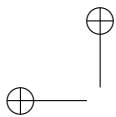
A fentiek alapján talán meglepő, hogy az alábbi tétel [2] igaz.

2. tétel. *Ha $S, U \geq 2$, akkor $C(S, U) = 2R(S, U)$.*

Ezen tétel egyik speciális eseteként azt kapjuk, hogy ha van S lapú és U csúcsú poliéder, akkor van S lapú és U csúcsú olyan poliéder is, melynek minden lapján és csúcsában van egyensúlyi pont.

A tétel bizonyítása azzal egyenértékű, hogy minden $(S, U)^E$ osztályban konstruálunk egy konvex poliédert, melynek komplexitása éppen $2R(S, U)$. Ezt több lépésben tehetjük meg. A $2 \leq S, U \leq 5$ egyenlőtlenségek teljesülése esetén az $(S, U)^E$ osztályban számítógép segítségével kereshető alkalmas poliéder: tetraéder, ha

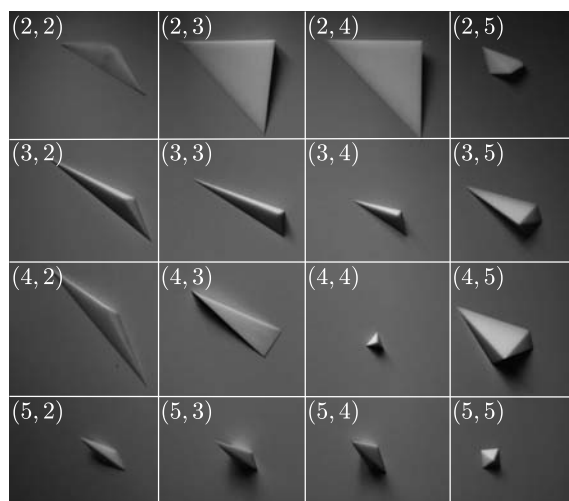




$S, U \leq 4$, és négyszög alapú gúla, ha $S = 5$ vagy $U = 5$. Az $(S, S)^E$, $S \geq 6$ osztályokban közvetlenül, geometriai megfontolások alapján található ezen osztálybeli, S lapú és S csúcús poliéder: $S \geq 4$ esetén egy szabályos $(S - 1)$ -szög alaplapú egyenes gúla éppen a megkívánt tulajdonságú. Végül a többi osztályban megfelelő tulajdonságú poliéder a fenti poliéderek apró deformációival kapható meg.

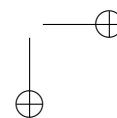
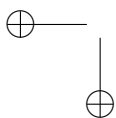
osztály	nemkonstans csúcsponti koordináták					egyensúly														
	C_x	C_y	D_x	D_y	D_z	a lapokon				a csúcson				az éleken						
						ABC	ABD	ACD	BCD	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	
(2, 2)	3,2	1,9	-2,2	0,3	1,8	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
(2, 3)	1,9	5,3	1,9	-0,9	5,2	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
(2, 4)	-0,9	5,3	1,9	0,9	5,2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	
(3, 2)	1,0	2,7	-0,9	-4,1	3,4	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	
(3, 3)	1,0	5,7	0,5	-0,5	1,3	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
(3, 4)	0,5	2,8	0,5	-0,7	1,2	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
(4, 2)	3,2	3,8	-2,2	-2,9	2,5	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	
(4, 3)	1,9	5,3	1,9	5,0	1,8	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	

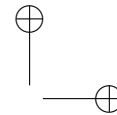
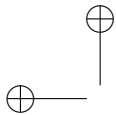
1. táblázat. Egy-egy példa az $(S, U)^E$, $S, U \in \{2, 3, 4\}$, $(S, U) \neq 4, 4$ egyensúlyi osztályokba tartozó tetraéderekre. A tetraéderek alábbi hat koordinátája adott konstans: $A_x = A_y = A_z = B_y = C_z = 0$, $B_x = 1$.



4. ábra. Az $(S, U)^E$, $S, U \in \{2, 3, 4, 5\}$ egyensúlyi osztályokhoz tartozó (az 1-2. táblázatokban szereplő) 8 tetraéder, illetve 6 pentaéder, valamint a szabályos tetraéder és a szimmetrikus négyzet alapú gúla 3D nyomtatással készült példányai.

Mi a helyzet az $(S, 1)^E$ és az $(1, S)^E$ osztályokkal? A $C(S, U) \geq 2R(S, U)$ egyenlőtlenség egy alsó becslést ad $C(S, U)$ értékére. Adható felső becslés is? A válasz a legtöbb osztályra megtalálható a már említett [2] cikkben.





osztály	nemkonstans csúcsponti koordináták						
	C_x	C_y	D_x	D_y	E_x	E_y	E_z
(2, 5)	1,0	1,7	0,5	-0,3	2,1	1,2	1,2
(3, 5)	1,0	1,7	3,8	-2,2	1,6	0,9	0,9
(4, 5)	2,5	1,4	3,8	-2,2	2,0	1,2	1,2
(5, 2)	1,0	1,7	0,9	0,5	-0,6	-1,1	-1,1
(5, 3)	1,0	1,7	0,9	0,5	1,5	2,6	2,6
(5, 4)	1,0	1,7	1,3	0,8	1,5	2,6	2,6

2. táblázat. Egy-egy példa az $(i, 5)$ és $(5, i)$ $i \in \{2, 3, 4\}$ egyensúlyi osztályokba tartozó pentaéderekre. A pentaéderek alábbi hét koordinátája adott konstans:

$$A_x = A_y = A_z = B_x = C_x = D_x = 0, B_y = 1.$$

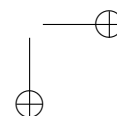
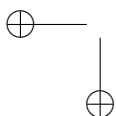
3. tétel. Ha $S \geq 4$ akkor $C(S, 1) \leq 59 + (-1)^S + 2R(S, 1)$; ha $U \geq 4$ akkor $C(1, U) \leq 90 + 2R(1, U)$.

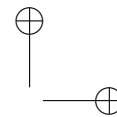
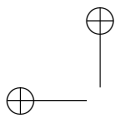
Talán érdemes megjegyezni, hogy az ezen tételben szereplő második, azaz a monostabil poliéderekre vonatkozó egyenlőtlenség igazolásához szükséges $(1, U)^E$ -osztályú konvex poliéderek a Conway és Guy által konstruált, a [5] cikkben ismertett monostabil (az $(1, 4)^E$ osztályba tartozó) poliéder apró deformációival állíthatók elő. A már hivatkozott [2] cikkben szereplő módszerek alkalmazásával konstruálható poliéder a $(2, 1)^E$, $(3, 1)^E$, $(1, 2)^E$ és az $(1, 3)^E$ osztályokban is, me-

$S \backslash U$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	[12]	[10, 70]	[8, 64]	[6, 96]	[8, 98]	[8, 98]	[10, 100]	[10, 100]	[12, 102]	[12, 102]
2	[10, 66]	8	6	4	6	6	8	8	10	10
3	[8, 64]	6	4	2	4	4	6	6	8	8
4	[6, 66]	4	2	0	2	2	4	4	6	6
5	[8, 66]	6	4	2	0	0	2	2	4	4
6	[8, 68]	6	4	2	0	0	0	0	2	2
7	[10, 68]	8	6	4	2	0	0	0	0	0
8	[10, 70]	8	6	4	2	0	0	0	0	0
9	[12, 70]	10	8	6	4	2	0	0	0	0
10	[12, 72]	10	8	6	4	2	0	0	0	0

5. ábra. Az egyensúlyi osztályok mechanikai komplexitása: az eredmények összefoglalása $S, U \leq 10$ esetén (a poliedrikus pároknak megfelelő cellák itt is világos háttérűek).

A zárójel nélkül szereplő egész számok pontos komplexitási értéket, az $S = 1$ sorban és $U = 1$ oszlopban szögletes zárójelbe tett számok komplexitási korlátokat jelentenek (két érték alsó és felső korlátot, egyetlen érték pedig csupán alsó korlátot ad meg – itt a felső korlát ismeretlen).





lyek mindegyike egy-egy felső korlátot ad az osztály komplexitásának mértékére, sőt az $(S, 1)^E$, $S > 3$ egyensúlyi osztályok komplexitásának felső korlátját ugyancsak a $(2, 1)^E$ és $(3, 1)^E$ osztályba tartozó két test apró deformációival konstruált testek segítségével kaphatjuk meg. A $(2, 1)^E$ és $(3, 1)^E$ egyensúlyi osztályokhoz konstruált poliéder olyan test, amelynek 18 csúcsa van, így tehát a 2. kérdés második felére jelenleg a következő válasz adható: mivel mono-instabil homogén sűrűségű tetraéder nem létezik, a homogén sűrűségű mono-instabil testek minimális csúcscsúszama legfeljebb 18, de legalább 5. Az 5. ábra táblázata összefoglalja az egyensúlyi osztályok komplexitásával kapcsolatos legjobb ismert becsléseket.



6. ábra. A Gömböc

Az 5. ábra alapján az egyetlen osztály, melyről nem tudjuk, hogy tartalmaz-e konvex poliédert, az $(1, 1)^E$ osztály. Érdekes megjegyezni, hogy általában a konvex testek közt ismert egy olyan homogén test, melynek egy stabil és egy instabil egyensúlyi pontja van. Ez a test, mely a fentiek szerint rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy (eltekintve az instabil egyensúlyi pontjától), bármilyen helyzetben alátámasztva addig gördül, amíg megtalálja egyetlen stabil egyensúlyi helyzetét, Gömböc néven ismert, és a 6. ábrán látható.

Felvetődhet az ötlet, hogy egy Gömböcöt poliéderrel nagyon finoman közelítve kaphatunk egy $(1, 1)^E$ osztályú konvex poliédert. Sajnos, intuíciónkkal talán ellentétes módon megmutatható, hogy „egyenletes” közelítést használva *tetszőleges* finomság esetén a keletkező poliédernek egynél több stabil, illetve instabil egyensúlyi pontja lesz. Ezt a jelenséget tárgyalja a [3] cikk.

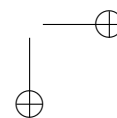
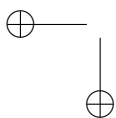
Ösztönözve a kutatást a kis lap- és csúcscsúszámú, Gömböc-tulajdonságú homogén konvex poliéderek keresésére, a cikket egy nemrég kitűzött díjra való felhívással fejezzük be. Ezen, $C(1, 1)$ értékének meghatározásáért kitűzött díj értéke amerikai dollárban:

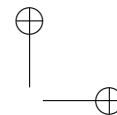
$$(1) \quad \frac{10^6}{C(1, 1)}.$$

A díj elnyerésének részletesebb feltételeit az érdeklődő olvasó megtalálhatja a [2] cikkben. Aki a díjjal kapcsolatban ennél bővebb információt szeretne vagy érdeklődne a jelen cikkben ismertetett téma felől, a cikk szerzőivel tudja felvenni a kapcsolatot.

Hivatkozások

- [1] V.I. Arnold, *Ordinary differential equations* 10th printing, 1998. MIT Press.
- [2] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.T. Varga, *Balancing polyhedra*, arXiv:1810.05382 [math.MG], October 12, 2018.





- [3] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *On the equilibria on finely discretized curves and surfaces*, *Monatsh. Math.*, **168** (2012), 321–345.
- [4] Gnädig Péter, Honyek Gyula és Vígh Máté, *333 furfangos feladat fizikából*, Typotex Kiadó, Budapest, 2014.
- [5] Lángi Zs. *Konvex poliéderek stabil lapjai*, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, **69**(5) (2019), 258–264.
- [6] E. Steinitz, *Über die Eulersche Polyederrelationen*, *Arch. Math. Phys.*, **11** (1906), 86–88.

Domokos Gábor domokos@iit.bme.hu	Kovács Flórián kovacs.florian@epito.bme.hu
Lángi Zsolt zlangi@math.bme.hu	Regős Krisztina regoskriszti@gmail.com
	Varga Péter Tamás petercobbler@gmail.com

Megoldásvázlatok a 2020/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

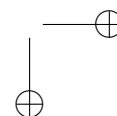
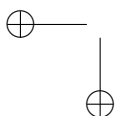
1. a) Oldjuk meg a $\sqrt{2x+6} = 9 - x$ egyenletet a valós számok halmazán.
(5 pont)
- b) Oldjuk meg a $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} \frac{4}{9}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.
(3 pont)
- c) Oldjuk meg a $\sin^2 4x + \sin 4x + \cos^2 4x = 2$ egyenletet a $[0; \pi]$ halmazon.
(4 pont)

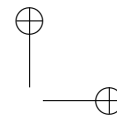
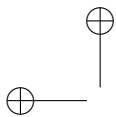
Megoldás. a) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geq -3$, értékészlete miatt $x \leq 9$, tehát $-3 \leq x \leq 9$. Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $2x + 6 = 81 - 18x + x^2$. Az egyenletet rendezve: $x^2 - 20x + 75 = 0$, melynek gyökei: $x_1 = 15$ és $x_2 = 5$.

A $[-3; 9]$ intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így csak $x_2 = 5$ megoldása az egyenletnek.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > 0$. A 0,3-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt: $x \leq \frac{4}{9}$, melyet az értelmezési tartománnyal összevetve a megoldáshalmaz: $]0; \frac{4}{9}]$.

c) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin^2 4x + \cos^2 4x = 1$, ezért a megoldandó egyenlet: $\sin 4x = 1$, ahonnan $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ebből az egyenlet megoldásai a keresett halmazon: $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ebből következik, hogy a kapott gyökök jók.





2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $y + 2x = x^2$ egyenletű parabola.

a) Írjuk fel a parabola $E(2;0)$ pontjában húzott érintő egyenletét. (3 pont)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (4 pont)

A koordináta-rendszerben a $(-4;0)$, $(4;0)$, $(4;8)$ és $(-4;8)$ csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.

c) Mekkora a középső rész területe? (6 pont)

Megoldás. a) Az E -ben húzott érintő meredekségét a parabola deriváltfüggvényének az $x = 2$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg. $f'(x) = 2x - 2$, így az érintő meredeksége $f'(2) = 2$.

Az érintő egyenlete: $y = 2x - 4$.

b) Teljes négyzetté alakítással: $y = (x - 1)^2 - 1$, ahonnan a parabola tengelypontja $T(1; -1)$. A parabola paraméterére: $\frac{1}{2p} = 1$, így $p = \frac{1}{2}$.

c) A megadott parabola a téglalapot a $(0;0)$, $(2;0)$, $(4;8)$ és $(-2;8)$ pontokban metszi. A $[-2;0]$ intervallumon az x tengely és a parabolaív közötti terület nagysága:

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{20}{3}.$$

A parabola tengelyes szimmetriája miatt a $[-2;0]$ és a $[2;4]$ intervallumokon a parabola alatti terület megegyezik, így a középső táblarész területét megkapjuk, ha egy 48 egység területű téglalaphoz kivonjuk a $[-2;0]$ és a $[2;4]$ intervallumhoz tartozó parabola alatti területet. Tehát a keresett terület:

$$T = 48 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{104}{3}.$$

3. a) Egy mértani sorozat 1011-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első 2019 tagjának a szorzatát. (6 pont)

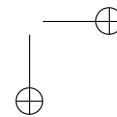
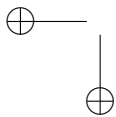
b) Jelölje x és y ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy $x \neq 0$ és az $(x; y)$ számpár megoldása a

$$100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} \leq 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (6 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. Jelölje a mértani sorozat hányadosát q ($q \neq 0$). Ekkor a feladat szövege alapján: $a_{1012} = q^2$, $a_{1013} = q^3$, \dots , $a_{2019} = q^{1009}$ adódik.

Hasonlóan az indexek csökkentésével: $a_{1010} = 1$, $a_{1009} = \frac{1}{q}$, $a_{1008} = \frac{1}{q^2}$, \dots , $a_1 = \frac{1}{q^{1009}}$.





Az előzőeket felhasználva a keresett szorzat:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{1009} \cdot a_{1010} \cdot a_{1011} \cdot \dots \cdot a_{2018} \cdot a_{2019} &= \\ = \frac{1}{q^{1009}} \cdot \frac{1}{q^{1008}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q} \cdot 1 \cdot q \cdot \dots \cdot q^{1008} \cdot q^{1009} &= 1. \end{aligned}$$

II. megoldás. Jelölje a mértani sorozat első tagját a_1 , hányadosát q ($q \neq 0$). Ekkor a sorozat tagjait felírva: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, \dots , $a_{2019} = a_1 \cdot q^{2018}$. Az első 2019 tagot összeszorozva a szorzat értéke:

$$a_1^{2019} \cdot q^{1+2+3+\dots+2018} = a_1^{2019} \cdot q^{2037171}.$$

A feladat feltétele szerint: $a_1 \cdot q^{1010} = q$, ahonnan ($q \neq 0$ miatt) $a_1 = \frac{1}{q^{1009}}$. A keresett szorzat:

$$\left(\frac{1}{q^{1009}}\right)^{2019} \cdot q^{2037171} = \frac{1^{2019}}{q^{2037171}} \cdot q^{2037171} = 1.$$

b) Mivel $100^x = (10^x)^2$ és $10^{4y} = (10^{2y})^2$, így $100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} = (10^x - 10^{2y})^2 \leq 0$. $(10^x - 10^{2y})^2 \leq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $10^x - 10^{2y} = 0$, vagyis $10^x = 10^{2y}$, azaz (a 10-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = 2y$. (Mivel $x \neq 0$, ezért) $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

4. A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.

A játék menete

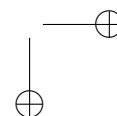
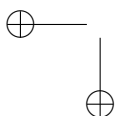
Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

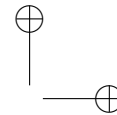
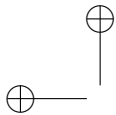
1. Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.
2. Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.
3. Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.
4. Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.

Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

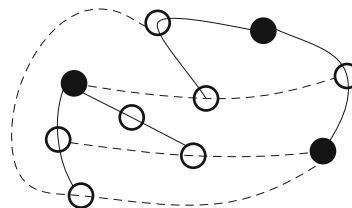
a) A 4.1. ábrán 3 pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan 4 új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfél pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje. (3 pont)

A 4.2. ábrán egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.





4.1. ábra



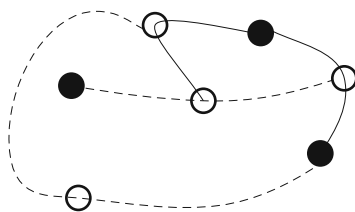
4.2. ábra

b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (4 pont)

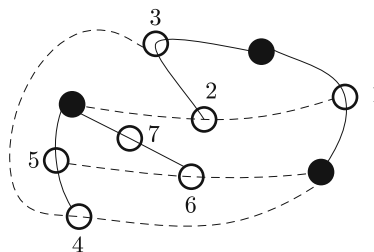
Levente Csabával már nagyon sokszor játszott a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 játékból legalább 8-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan 8-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (7 pont)

Megoldás. a) Egy lehetséges megoldás van a 4.3. ábrán.



4.3. ábra



4.4. ábra

b) A 4.4. ábrán látható sorrend miatt a kezdő játékos nyerte a játszmát.

c) Jelölje p annak a valószínűségét, hogy Levente megnyer egy játszmát. Ekkor annak a valószínűsége, hogy Csaba nyer $1 - p$.

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 8-szor nyer:

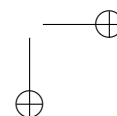
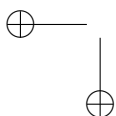
$$\binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1 - p)^2.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 9-szer nyer:

$$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1 - p)^1.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 10-szer nyer:

$$\binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1 - p)^0.$$





A feladat szerint:

$$\begin{aligned} & \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 + \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1 + \binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^0 = \\ & = 2 \cdot \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1-p)^2. \end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva p^8 -nal, és kiszámolva a binomiális együtthatókat:

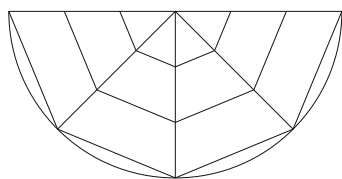
$$45 \cdot (1-p)^2 + 10p \cdot (1-p) + p^2 = 90 \cdot (1-p)^2.$$

Ebből: $54p^2 - 100p + 45 = 0$, melynek gyökei $p_1 \approx 1,081$ és $p_2 \approx 0,771$.

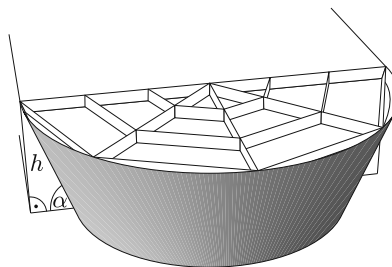
Mivel a valószínűség legfeljebb 1, így Levente kb. 0,771 valószínűséggel nyer meg egy játszmát.

II. rész

5. Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az 5.1. ábrán látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara 1,5 méter.



5.1. ábra



5.2. ábra

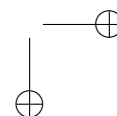
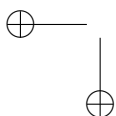
a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészen kerekítve adjuk meg. (8 pont)

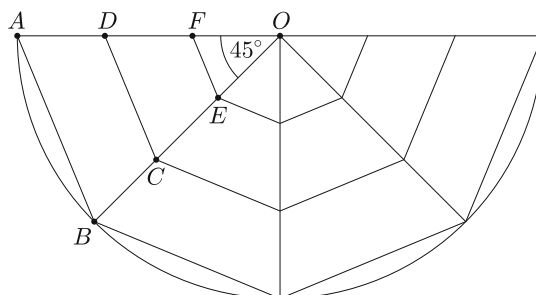
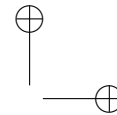
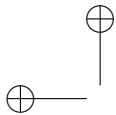
Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítést tervezett az ábra szerint, ahol h a bővítés magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítés méretei: $h = 100$ cm, $\alpha = 70^\circ$, a felső kör sugara pedig 1,5 m (5.2. ábra).

c) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (8 pont)

Megoldás. a) Az 5.3. ábrán látható félkörív hossza $1,5 \cdot \pi \approx 4,712$ (m).

Mivel a körcikkek egybevágók, ezért az $\angle AOB = 45^\circ$.





5.3. ábra

Az AB szakasz hosszát koszinusztétellel számolva:

$$AB^2 = 1,5^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \cos 45^\circ,$$

ahonnan $AB \approx 1,148$ (m). Az OAB és OFE , valamint az ODC és OFE háromszögek hasonlósága miatt a hasonlóság arányának felhasználásával

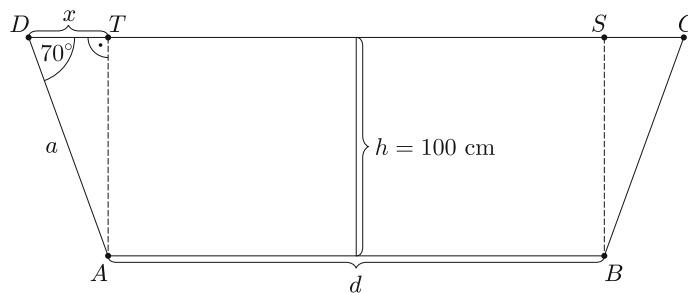
$$CD = \frac{2 \cdot AB}{3} \approx 0,765 \text{ (m)} \quad \text{és} \quad EF = \frac{AB}{3} \approx 0,383 \text{ (m)}.$$

Mindegyik keresztlécből 4 db van, a sugárból pedig öt, így a keresett hosszúság:

$$4,712 + 5 \cdot 1,5 + 4 \cdot (1,148 + 0,765 + 0,383) = 21,396 \text{ (m)}.$$

Tehát 22 méter falécre van szükség.

b) Az 5.4. ábra jelöléseit használva az ATD derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{100}{x}$, ahonnan $x \approx 36,40$ (cm), és $\sin 70^\circ = \frac{100}{a}$, melyből $a \approx 106,42$ (cm).



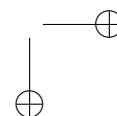
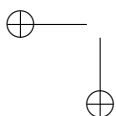
5.4. ábra

Az előbbiek miatt $d = 300 - 2x \approx 227,20$ (cm), így $r = \frac{d}{2} \approx 113,60$ (cm).

A félbevágott csonkakúp alakú palást felszíne:

$$A = \frac{(r + R) \cdot a \cdot \pi}{2} \approx 44\,064,5 \text{ (cm}^2\text{)},$$

így a szükséges anyagmennyiség: $4,6 \text{ m}^2$.

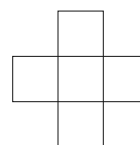




6. Egy 8×8 -as sakktabla mezőire 1-től 64-ig beírtuk a természetes számokat a 6.1. ábra szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely 5 darab, a sakktabla mezőivel egybevágó négyzetből áll (6.2. ábra). Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktablára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

6.1. ábra



6.2. ábra

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható 3-mal? (6 pont)

Egy másik alkalommal a sakktabla mezőire 64 pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a 68, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga 67,5, a terjedelmük pedig 93.

b) Mely számok szerepelnek a táblán? (10 pont)

Megoldás. a) *I. megoldás.* A „kereszt” összesen $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen helyezhető rá a sakktablára (összes eset száma). Ha a bal felső sarokba rakjuk a keresztet, akkor a 2; 9; 10; 11 és 18 számokat fedi le, melyek összege 50, aminek a hármas maradéka 2.

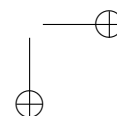
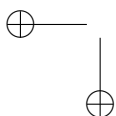
Bárhová is rakjuk le a keresztet (a szabálynak megfelelően), ha eggyel jobbra csúsztatjuk az összeg mindig 5-tel, a hármas maradék pedig 2-vel nő. Ha a keresztet eggyel lefelé csúsztatjuk, akkor az összeg mindig 40-nel, a hármas maradék pedig 1-gyel nő. Az előbbieket miatt a maradékok alapján összesen 12 olyan elhelyezés van, amikor a lefedett számok összege osztható 3-mal (kedvező esetek száma).

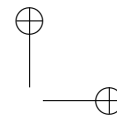
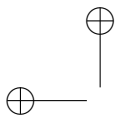
Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

II. megoldás. A „kereszt” alakzatot csak a belső négyzetekre tudjuk ráhelyezni. Ezt $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen tudjuk megtenni (összes eset száma).

Ha a lefedett számok közül a középsőt x -szel jelöljük, akkor a tőle balra lévőt $x - 1$, jobbra lévőt $x + 1$, felette lévőt $x - 8$, alatta lévőt $x + 8$ jelöli. Ezek összege $5x$. Az összeg pontosan akkor osztható 3-mal, ha x osztható 3-mal. A 6×6 -os belső négyzetben 12 db 3-mal osztható szám van (kedvező esetek száma).

Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.





b) Mivel 69; 70; 71; ...; 99 összesen 31 darab szám, és a módusz valamint a medián is 68, a 64 számot sorbarendezve a két középső $x_{32} = x_{33} = 68$. A terjedelem miatt $x_1 = 6$. A 64 szám átlaga 67,5, ezért a táblára írt számok összege 4320.

A második 32 szám összege $\frac{68+99}{2} \cdot 32 = 2672$. Így

$$s = 6 + x_2 + x_3 + \dots + x_{31} + 68 = 4320 - 2672 = 1648,$$

vagyis $x_2 + x_3 + \dots + x_{31} = 1574$.

A legnagyobb összeg, ami az $x_2; x_3; \dots; x_{31}$ helyén álló számokkal elérhető lenne: $38 + 39 + \dots + 67 = 1575$. Ez csak 1-gyel több a valóságos összegnél, tehát valamelyik számot 1-gyel csökkenteni kell. Ez a szám csak a 38 lehet, különben két módusza lenne az táblára írt számoknak.

A keresett számok tehát: 6; 37; 39; 40; ...; 67; 68; 68; 69; 70; ...; 98; 99.

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90^\circ$ -kal elforgatjuk.

a) Számítással igazoljuk, hogy a forgatással kapott szakasz egy pontban metszi a megadott kört. (4 pont)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F .

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (6 pont)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (6 pont)

Megoldás. a) *I. megoldás.* Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$. Mivel $36 + 64 = 100 > 20$, ezért A' a kör külső pontja. Mivel $9 + 1 = 10 < 20$, ezért B' a kör belső pontja.

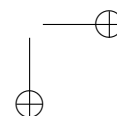
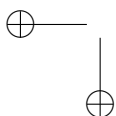
Tehát az $A'B'$ szakasz egy pontban metszi a megadott kört.

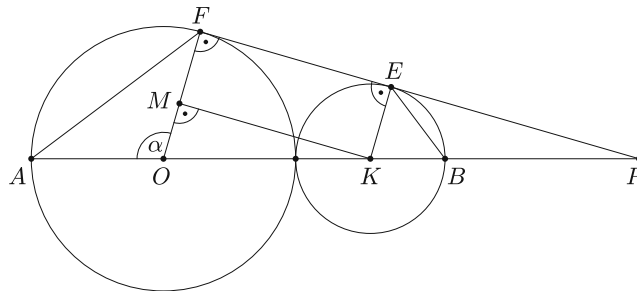
II. megoldás. Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$, ezért az elforgatott pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = 3x + 5$. Az előbbi egyenes metszéspontjai a megadott körrel $P(0; 5)$ és $Q(-2; -1)$.

A metszéspont akkor van az elforgatott szakaszon, ha a pontok koordinátáira teljesül, hogy $-1 < x < 2$ és $2 < y < 11$, ami csak a P pontra igaz, így az $A'B'$ szakasz valóban egy pontban metszi a megadott kört.

b) Az $ABEF$ négyszög akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögeinek összege 180° . Az ábra jelöléseit használva legyen az $\sphericalangle AOF = \alpha$, ekkor $\sphericalangle OAF = \sphericalangle OFA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Hasonló megfontolással megmutatható, hogy $\sphericalangle KBE = \sphericalangle BEK = \frac{\alpha}{2}$, így az $ABEF$ négyszög A , B , E és F csúcsánál lévő belső szögek rendre $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ és $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. A szemközti szögek összege tehát 180° , így a négyszög valóban húrnégyszög.





c) A K pontból párhuzamost húzva az EF közös érintővel a megrajzolt szakasz és OF metszéspontja legyen M . Ekkor az OMK derékszögű háromszögben

$$MK^2 = EF^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2,$$

ahonnan $EF = 2\sqrt{Rr}$.

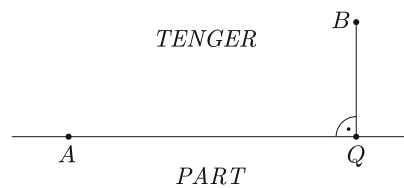
8. Egy szabadulósobának három bejárata van. Egy 6 fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (4 pont)

A szabadulósoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.

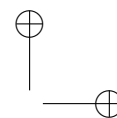
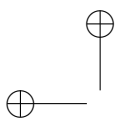
b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (3 pont)

Egy „túlélő” műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönk, evező stb.) nem használhatnak. Az ábra szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, valamint $\angle AQB = 90^\circ$. (A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintsük egyenesnek.) Az egyik versenyző 8 km/óra sebességgel képes futni a homokban és 2 km/óra sebességgel úszni a tengerben.



c) Hány km futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A -ból B -be? (9 pont)

Megoldás. a) A 6 fős társaság tagjai közül a három pár $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} (= 90)$ -féleképpen választható ki úgy, hogy azok sorrendje is figyelembe van véve. Mivel egy adott 3 pár ebben éppen $3! (= 6)$ -szor szerepel, így összesen $90 : 6 = 15$ -féleképpen választható ki a 3 pár. Ezek bármelyike a 3 ajtón $3^3 = 27$ -féleképpen mehet be, tehát a keresett sorrendek száma $15 \cdot 27 = 405$.



b) Az első lakat kulcsa legfeljebb 9 próbálkozással, a másodiké legfeljebb 8, a harmadiké legfeljebb 7, és így tovább, a kilencedik lakaté 1 próbálkozás után megtalálható. A tizediknél már nem kell próbálkozni, mert a megmaradt kulcs ahhoz tartozik. Tehát legfeljebb

$$9 + 8 + 7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 45$$

próbálkozással megoldható a feladat.

c) *I. megoldás.* Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (8.1. ábra). Ekkor az $UQ = x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $BU = \sqrt{x^2 + 1}$. Az út megtételéhez szükséges idő:

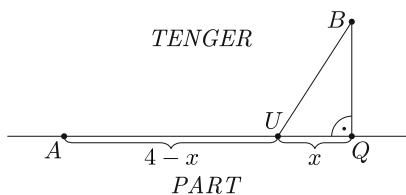
$$t(x) = \frac{4-x}{8} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}, \quad \text{ahol } 0 \leq x \leq 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x) = 0$.

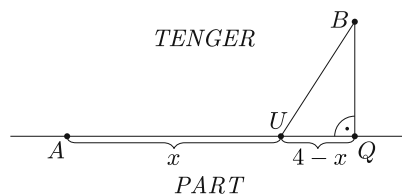
$$t'(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x, \quad \text{ebből } \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{8},$$

ahonnan $60x^2 - 4 = 0$, melynek gyökei $x_1 \approx 0,258$ és $x_2 \approx -0,258$ (m). ($x_2 \approx -0,258$ nem lehetséges, $x_1 \approx 0,258$ megfelel.) Az x_1 helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t -nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.



8.1. ábra



8.2. ábra

II. megoldás. Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (8.2. ábra). Ekkor az $UQ = 4-x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BU = \sqrt{x^2 - 8x + 17}.$$

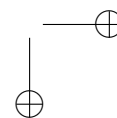
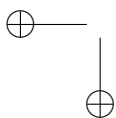
Az út megtételéhez szükséges idő:

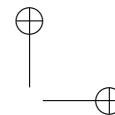
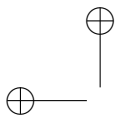
$$t(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}{2}, \quad \text{ahol } 0 \leq x \leq 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x) = 0$.

$$t'(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 17)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 8), \quad \text{ebből}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 4x - 16}{8\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 0,$$





ahonnan $15x^2 - 120x + 239 = 0$, melynek gyökei $x_1 \approx 4,258$ és $x_2 \approx 3,742$ (m). ($x_1 \approx 4,258$ nem lehetséges, $x_2 \approx 3,742$ megfelel.) Az $x_2 \approx 3,742$ helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t -nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.

9. Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerekek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.

a) Hány éves most az anyuka? (7 pont)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (3 pont)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszámára 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezdéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (6 pont)

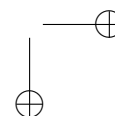
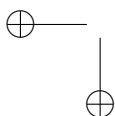
Megoldás. a) Jelölje az apa életkorát most x , a középső gyereket y . Ekkor a szöveg alapján az anya $x - 6$, a középső gyerek pedig az $y + 6 = 2y$ egyenletből 6 éves.

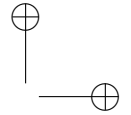
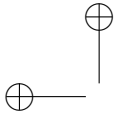
A legkisebb gyerek születésének évében a két nagyobb gyerek és a két szülő életkorának összege $22,5 \cdot 4 = 90$ év. A legkisebb gyerek születése óta az öttagú család életkorának összege 10 évvel nőtt, tehát a legkisebb gyerek most 2 éves.

Ha az anya most $x - 6$ éves, akkor a legidősebb gyerek $x - 6 - 22 = x - 28$ éves. Mivel az életkorok összege 100 év, ezért $2 + 6 + (x - 28) + x + (x - 6) = 100$, ahonnan $x = 42$, így az anyuka 36 éves.

b) 1-től 100-ig a 3 és az 5 páratlan közös többszörőseit keressük. Mivel $[3; 5] = 15$, így a 15., 45. és 75. mező ilyen, azaz a keresett mezők száma 3.

c) A játékos csak úgy léphet a 10-es mezőre, ha az első két dobás összege 10, vagy az első két dobás összege 6 és az utána következő két dobás összege 4.





Az első két dobás összege úgy lehet 10, ha a játékos a (4; 6), (6; 4), vagy (5; 5) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

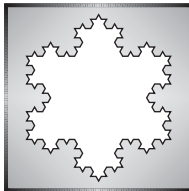
Az első két dobás összege úgy lehet 6, ha a játékos az (1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2) vagy (3; 3) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{5}{36}$.

Az első két dobást követő dobás összege úgy lehet 4, ha a játékos az (1; 3), (3; 1) vagy (2; 2) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

(A két egymás utáni dobás egymástól független esemény), így ennek a valószínűsége $\frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36}$. A keresett valószínűség:

$$\frac{3}{36} + \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{41}{432} \approx 0,095.$$

Varga Péter
Budapest



C gyakorlat megoldása

C. 1552. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$ és $0 < b < 1$, akkor

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1.$$

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás. Vegyük a és b harmonikus közepét:

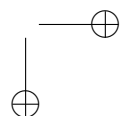
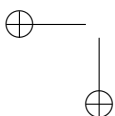
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Látható, hogy a feladatban a logaritmusok argumentumaként szereplő értékeket kapjuk.

Legyen c egy valós szám, melyre teljesül, hogy $0 < c < 1$. Ekkor az $f(x) = \log_c(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, de helyettesítési értéke a $]0, 1[$ tartományon végig pozitív marad, hiszen $x = 1$ -re $f(x) = f(1) = \log_c(1) = 0$. Mivel a függvény szigorúan monoton csökken, ezért ha $x_1 \leq x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$, és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = x_2$.

A nevezetes közepekre való összefüggés szerint két pozitív szám mértani közepe nem kisebb azok harmonikus közepénél. Ez a -ra és b -re a következőt jelenti: $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$. Mivel a és b 1-nél kisebb pozitív számok, ez (a fentiek alapján) azt jelenti, hogy

$$\log_a(\sqrt{ab}) \leq \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \quad \text{és} \quad \log_b(\sqrt{ab}) \leq \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$





Mivel (a fentiek alapján) tudjuk, hogy mind a négy logaritmusos kifejezés értéke pozitív, felírhatjuk, hogy

$$\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \leq \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Így tehát elég belátnunk, hogy $\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \geq 1$, hiszen ekkor a feladatban szereplő egyenlőtlenség is teljesül.

Tegyünk fel, hogy $\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \geq 1$. Ekvivalens átalakításokat használva:

$$\frac{1}{2} \log_a(ab) \cdot \frac{1}{2} \log_b(ab) \geq 1,$$

$$\log_a(ab) \log_b(ab) \geq 4,$$

$$(\log_a a + \log_a b)(\log_b a + \log_b b) \geq 4,$$

$$(1 + \log_a b)(\log_b a + 1) \geq 4,$$

$$\log_b a + 1 + \log_a b \log_b a + \log_a b \geq 4,$$

$$\log_a b + \log_b a + \log_a b \log_b a \geq 3.$$

Az ismert összefüggés szerint $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$. Ezt felhasználva az egyenlőtlenség tovább alakítható:

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 1 \geq 3,$$

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2,$$

$$(\log_a b)^2 - 2 \log_a b + 1 \geq 0,$$

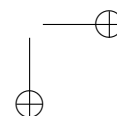
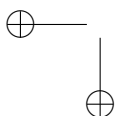
$$(\log_a b - 1)^2 \geq 0.$$

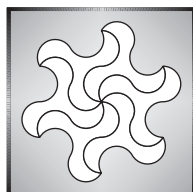
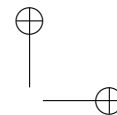
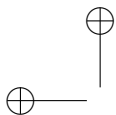
Egy valós szám négyzete mindig nemnegatív, így ez az egyenlőtlenség mindig teljesül. Egyenlőség $\log_a b = 1$ esetén áll fenn. Ekkor $a = b$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a feladatban szereplő egyenlőtlenség is minden esetben teljesül, és egyenlőség $a = b$ esetén áll fenn.

Mészáros Márton (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)

19 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 7 versenyző: Ajtai Boglárka, Hordós Adél Zita, Kis Károly, Mészáros Márton, Molnár István, Nyitrai Boglárka, Szigeti Donát. 4 pontos 3, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 0 pontos 2 dolgozat.





Matematika feladatok megoldása

B. 4992. Az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pirosra vagy kékre színezzük. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk három különböző számot, amelyek számtani sorozatot alkotnak, és mindhárom szám színét a másik színre változtatjuk. Mely n -ekre lehet az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges színezéséből kiindulva elérni, hogy mindegyik szám piros legyen?

(4 pont)

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy az $n \geq 8$ esetekben bármelyik kiinduló színezés esetén elérhető, hogy a számok pirosak legyenek, viszont $n \leq 7$ esetén mindig megadható olyan alaphelyzet is, amikor ez nem érhető el.

Először azt mutatjuk meg, hogy nyolc szomszédos szám esetén mindig megadható olyan néhány lépésből álló színezési sorozat, amely végül a nyolc szám közül egynek a színét megváltoztatja, a többit pedig változatlanul hagyja.

Az alábbi táblázatban a felső sorban elhelyezett számok jelentsék a nyolc szám közül annak a sorszámát, amelynek a színét kizárólagosan meg akarjuk változtatni, míg az alatta elhelyezkedő sorozatok azt, hogy ez a változtatás (csak ennek a nyolc számnak a felhasználásával) milyen lépésekkel érhető el.

1	2	3	4	5	6	7	8
4, 5, 6	5, 6, 7	4, 5, 6	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 3	2, 3, 4
5, 6, 7	6, 7, 8	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 3, 4	3, 4, 5
1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8	4, 5, 6	5, 6, 7	3, 4, 5	1, 4, 7	2, 5, 8
		2, 5, 8	5, 6, 7	6, 7, 8	2, 5, 8		
		1, 2, 3	1, 4, 7	2, 5, 8	6, 7, 8		

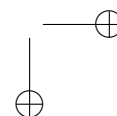
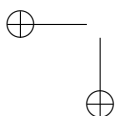
Tehát ha $n \geq 8$, akkor bármelyik kék számra tekinthetünk egy szomszédos nyolcast és azzal ezt a számot a fenti sorozatok valamelyikével pirosra színezzük.

Meg kell még mutatni, hogy $n \leq 7$ -re mindig van olyan kiinduló helyzet, amelyből nem színezzhető a megengedett lépésekkel mindegyik szám pirosra.

Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, és nem csak piros színű számaink vannak, akkor nem tudjuk a színezésüket megváltoztatni.

Legyen ezek után $3 \leq n \leq 7$ és induljunk ki abból a helyzetből, amikor a 2 kék, a többi szám pedig piros színű. Nevezzük a színezés szempontjából *fontos számoknak* a 2, 3, 5, 6 közül azokat, amelyek nem nagyobbak, mint az aktuális n . A következő táblázatban a *fontos számokat* félkövén szedtük.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---





$n = 7$ -ig a lehetséges háromtagú számtani sorozatok:

$\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{1, 4, 7\}$.

Természetesen, ha $n < 7$, akkor ezek közül azokat el kell hagyni, amelyekben az n -nél nagyobb szám is előfordul.

A bizonyítás szempontjából azonban ez nem jelent problémát, mert sorra ellenőrizhetően mindegyik ilyen sorozatban a „fontos számok” közül pontosan nulla vagy kettő szerepel, azaz ezen lépések egyike sem fogja a színezésben szereplő kék számok paritását megváltoztatni. Induláskor csak egy szám, nevezetesen a 2 volt kék, így nem érhető el, hogy mindegyik szám piros legyen.

Terjék András József (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 51 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 31, 3 pontot 8 tanuló. 2 pontos 5, 1 pontos 1 tanuló dolgozata. 0 pontos 5, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.

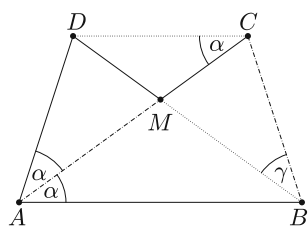
B. 5006. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD , az átlók metszéspontja M . Az AC átló felezi a BAD szöget, $AM = BC$ és $BM = CD$. Határozzuk meg a trapéz szögeit.

(4 pont)

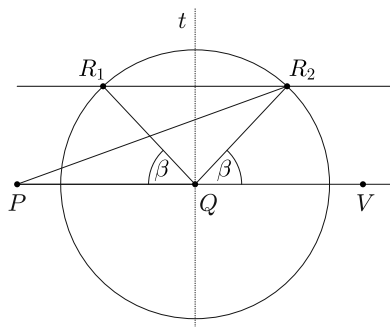
OKTV feladat alapján

Megoldás. A trapéz alapjain fekvő CAB és ACD szögek váltószögek, tehát egyenlők. Emiatt az ACD háromszög egyenlő szárú. A trapéz ismert tulajdonsága, hogy az AMD és BCM háromszögek területe egyenlő. Azt is tudjuk a feladat feltételei, illetve az előbbi szögegyenlőség alapján, hogy $AM = BC$, továbbá $BM = CD = DA$. Vagyis az AMD és BCM háromszögeknek nem csak a területük egyezik meg, hanem két-két oldaluk is (1. ábra).

Belátjuk, hogy ez a két háromszög egybevágó is.

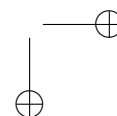
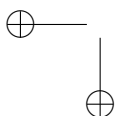


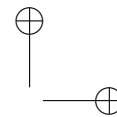
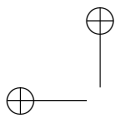
1. ábra



2. ábra

Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelynek két-két oldala és területe megegyezik. Ha adott a terület, akkor ismerjük az adott oldalakhoz tartozó magasságokat is. Ha felvesszük az egyik adott oldalt (PQ) és az ismert hozzátartozó magassággal párhuzamosot húzunk ezzel az oldallal, akkor biztos, hogy a háromszög harmadik csúcsa csak ezen a párhuzamos





egyenesen helyezkedhet el. A harmadik csúcs (R) ezen kívül rajta van az adott szakasz egyik végpontja mint középpont körül rajzolt, a másik adott oldal hosszúságával megegyező sugarú körvonalon. A párhuzamos egyenes és a körvonal egymást legfeljebb két pontban metszi (R_1, R_2) a 2. ábra szerint. (A másik párhuzamos egyenes berajzolása, a végpontok és a körüljárás felcserélése nem vezet ezektől eltérő megoldásra.)

A kör középpontjában a PQ egyenesre állított merőleges egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el az R_1Q és R_2Q szakaszok, ezért $PQR_1\angle = VQR_2\angle$, tehát a PQR_1 és PQR_2 szögek, ha nem egyenlők, akkor 180° -ra egészítik ki egymást.

Most térjünk vissza az AMD és BCM háromszögek vizsgálatához. Előfordulhat-e itt, hogy az első ábrán α -val és γ -val jelölt szögek kiegészítő szögek? A szögek elhelyezkedése alapján $\alpha = ACD\angle < BCD\angle$ és $\gamma = DBC\angle < ABC\angle$, így ekkor

$$180^\circ = \alpha + \gamma < BCD\angle + ABC\angle$$

lenne, ez pedig ellentmondás, mert az $ABCD$ trapéz B -hez és C -hez tartozó szögei 180° -ra egészítik ki egymást. Az α és γ szögek tehát ugyanakkorák.

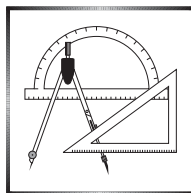
Innen a megoldás már néhány lépésben befejezhető. Beláttuk tehát, hogy $DAM\triangle \cong MBC\triangle$. Az AMD és BMC szögek csúcsszögek, ezek is egyenlők, vagyis $ADM\angle = BMC\angle = AMD\angle = BCM\angle$. Ez a két háromszög tehát egyenlő szárú is. A DMC háromszög is egyenlő szárú, ennek a háromszögnek külső szöge a $DMA\angle$, amely ezek szerint 2α nagyságú. Az AMD egyenlő szárú háromszög szögeire

$$MAD\angle + AMD\angle + MDA\angle = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ.$$

Innen $\alpha = 36^\circ$, végül az $ABCD$ trapéz szögei $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$.

Fleiner Zsigmond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 67 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 46, 3 pontot 11 tanuló. 2 pontos 3, 1 pontos 7 tanuló dolgozata.



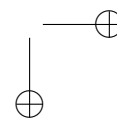
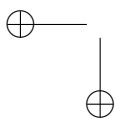
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1609–1615.)

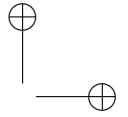
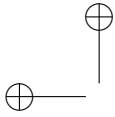
Feladatok 10. évfolyamig

C. 1609. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19,$$

$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$





C. 1610. Egy egységsugarú kör AB átmérője és AC húrja 30° -os szöget zárnak be egymással. Jelölje B tükörképét a C pontra B' . Határozzuk meg a B' pontból a körhöz húzott érintők AB egyenessel való metszéspontjának B -től való távolságát.

Feladatok mindenkinek

C. 1611. Az első 21 pozitív egész szám közül néhányat kiválasztunk úgy, hogy bármely kettő különbségének az abszolút értékét véve ezen értékek között ne legyen két egyforma. Legfeljebb hány különböző érték jöhet létre? Adjunk konkrét példát is erre az esetre.

C. 1612. Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ konvex hétszög egy olyan körbe írható bele, amelynek középpontja a hétszög belsejében van. Bizonyítsuk be, hogy az A_1 , A_3 és A_5 csúcsoknál lévő belső szögek összege kisebb 450° -nál.

C. 1613. Egy kosárlabda-bajnokságon n csapat vett részt. Bármelyik két csapat pontosan egyszer játszott egymással, döntetlen nem volt. A bajnokság végén az i -edik csapatnak x_i győzelme és y_i veresége volt ($i = 1, 2, \dots, n$). Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

(Horvát feladat)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1614. Egy 30 cm sugarú kör alakú tálca szélén elhelyezünk 12 darab 9 cm átmérőjű, felülről kör alakú muffint úgy, hogy a tálca szélét érintik, és a szomszédosak egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól. Mekkora ez a távolság?

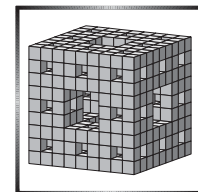
C. 1615. Juliska nagymamája minden hétfőn sütit süt. Mindig véletlenszerűen választ az általa ismert végtelen sok recept közül, amiknek a 60%-a csokis. Juliska elég válogatós: nagymama csokis sütijeinek csak a 90%-át szereti, a többi sütijének viszont csak 30%-át. Egy különleges hétfőn kétféle sütit is süt a nagymama. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy Juliska a két süti közül pontosan egyet szeret.

Beküldési határidő: 2020. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

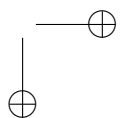
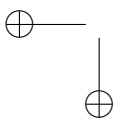
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

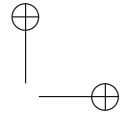
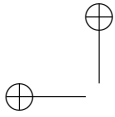
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5102–5109.)



B. 5102. Adott a síkban n különböző pont, nem esik mind egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy van olyan önmagát nem metsző, zárt töröttvonal, amelynek az adott pontok a csúcsai. (Egy töröttvonal csúcsánál lehet 180° -os szög is.)

(3 pont)





B. 5103. Tegyük fel, hogy a, b, c, x, y és z olyan pozitív számok, amelyekre az $a^2 + b^2 = c^2$ és az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlőségek teljesülnek. Igazoljuk, hogy $(a + x)^2 + (b + y)^2 \leq (c + z)^2$, és határozzuk meg, hogy mikor áll fenn az egyenlőség.

(3 pont)

Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5104. Legyenek az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai az oldalakon A_1, B_1 és C_1 , a háromszög köréírt, illetve beírt körének sugara R és r . Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek területének aránya $r : 2R$.

(4 pont)

B. 5105. Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör.

(4 pont)

Javasolta: *Szabó Kornél* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

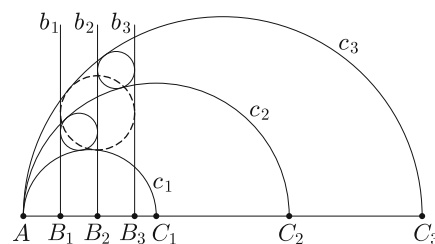
B. 5106. Felírjuk a táblára az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számokat ($n \geq 2$), majd a következő lépést ismételtetjük: kiválasztunk két számot (x és y) a táblán, letöröljük őket, és helyettük felírjuk az $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ és $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ számokat. Igazoljuk, hogy soha nem írhatunk a táblára 1,442-nél kisebb számot.

(5 pont)

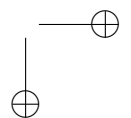
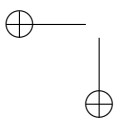
B. 5107. Az $ABCD$ húrnégyszögben az átlók metszéspontja F , az AB és CD oldalegyenesek metszéspontja E , az EF szakasz felezőpontja G , a BF szakasz felezőpontja H , a BC oldal felezőpontja pedig I . Mutassuk meg, hogy $\angle GFD = \angle GIH$.

(6 pont)

B. 5108. Az $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ pontok ebben a sorrendben egy egyenesen vannak. Az egyenes egyik oldalán, az egyenesre merőlegesen rajzoljuk meg a B_i pontból induló b_i félegyeneseket és az AC_i átmérőjű c_i félköröket ($i = 1, 2, 3$). Igazoljuk, hogy ha a b_1, c_1, b_2, c_2 görbék által határolt tartományba és a b_2, c_2, b_3, c_3 által határolt tartományba egy-egy kört lehet írni, akkor a b_1, c_1, b_3, c_3 által határolt tartományba is kört lehet írni.



(5 pont)





B. 5109. Legyen

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Van-e négyzetszám ebben a sorozatban?

(6 pont)

Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Canada)



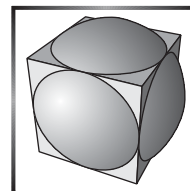
Beküldési határidő: 2020. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



**Az A pontversenyben kitűzött
nehezebb feladatok
(777–779.)**



A. 777. Egy n pontú, síkbarajzolt véges $G(V, E)$ gráfra jelölje $x(e)$ azon élek számát, melyek keresztezik az e élt. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{x(e) + 1} \leq 3n - 6.$$

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 778. Keressük meg az összes olyan d négyzetmentes pozitív egész számot, melyre megoldható az $x^2 + dy^2 = 2^n$ egyenlet a pozitív egész számok körében.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

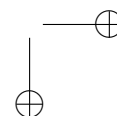
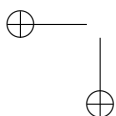
A. 779. Adott két rögzített kör, Ω és a belsejében ω . Az ω középpontja I . Az Ω körön mozog egy P pont. A P -ből ω -hoz húzott érintők második metszéspontja Ω -val Q , illetve R . Az IQR kör második metszéspontjai a PI , PQ és PR egyenesekkel rendre J , S , illetve T . A J tükröképe az ST egyenesre K . Mutassuk meg, hogy a különböző PK egyenesek egy ponton mennek át.

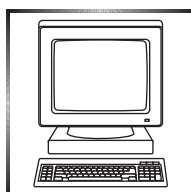
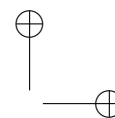
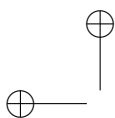


Beküldési határidő: 2020. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518





Informatikából kitűzött feladatok

I. 511. Andi és Bandi a szorzás gyakorlására kitaláltak egy játékot. A játékban először választottak egy pozitív egész számot 1 és 1000 között. Ezután felváltva mondtak pozitív egész számokat, de csak olyat, amit korábban még nem mondtott egyikük sem és nem nagyobb a választott számnál. A játék addig tartott, amíg valaki olyan számot nem mondtott, amivel megszorozva bármelyik korábban elhangzott számot a szorzat a játék elején választott szám lett. Az veszített, aki az utolsó számot mondta.

Sokat játszottak, majd elkezdtek gondolkodni azon, hogy vajon mi lehet a kezdő vagy a másodiknak számot mondó játékos számára a nyerő stratégia. Rájöttek a módszerre, és arra is, hogy a választott számtól függ, hogy kinek kedvez a játék, de ezt nem nézték meg mind az 1000 esetre.

Találjuk ki, hogy mi lehet a nyerő stratégia, majd készítsünk programot, amely megadja, hogy adott választott szám esetén a kezdő vagy a második játékos tud-e nyerni, ha a stratégiát a játék során végig alkalmazza. A program bemenete a választott szám. A kimenetre írjunk 1-est, ha az első, és 2-est, ha a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Bemenet	Kimenet
10	2

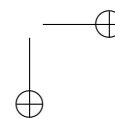
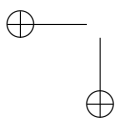
Beküldendő egy tömörített `i511.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 512. A járványok az élővilág kialakulásával egyidősek. Az ilyen típusú populációbiológia rendszerek legtöbb átalakulása több egymás után következő lépésben megy végbe. Ezek a lépések tipikusan sorozatot alkotnak.

A járványterjedés modellezéséhez több-kevesebb paramétert vesznek figyelembe. Az egyik legegyszerűbb modellt, az SEIR-t vizsgáljuk meg táblázatkezelővel. Ebben a modellben a járványterjedés szempontjából négy csoportra osztjuk a populációt:

- S susceptible, azaz fogékonyak, még nem estek át a betegségen;
- E exposed, azaz lappangó, de még nem fertőző egyedek;
- I infectious, azaz fertőzöttek, betegek;
- R recovered, azaz gyógyultak.

Az osztályok közötti átalakulás: $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$.





Az emberek megfertőződnek és maguk is fertőzővé válnak, majd meggyógyulnak, vagy sajnos meghalnak. Az utóbbi tragédiával ez az egyszerű modell nem foglalkozik.

A betűk jelölik, hogy hány egyed tartozik az egyes osztályokba. Vizsgáljuk meg, hogy az osztályok létszáma hogyan változik az időben néhány kezdeti paraméter mellett. Legyen a teljes populáció száma N , így ekkor minden időpontban teljesül, hogy $N = S + E + I + R$.

Egy új kórokozó esetén feltételezhetjük, hogy kezdetben a teljes populáció fogékony rá, azaz $S \approx N$. Legyen

- β a kórokozó átadási valószínűsége egy fertőző és egy fogékony egyed között;
- σ a lappangók fertőzővé válásának sebessége;
- γ a betegek meggyógyulásának sebessége.

Ekkor a fogékony egyedek számának változása $\Delta S = -\beta \cdot \frac{I}{N} \cdot S$, ahol az $\frac{I}{N}$ hányados a fertőzöttek aránya a teljes populációhoz képest. Minél nagyobb ez az érték, annál gyorsabb a járvány terjedése.

A lappangó esetek száma éppen ennyivel növekszik, miközben egy részük beteggé válik:

$$\Delta E = \beta \cdot \frac{I}{N} \cdot S - \sigma \cdot E.$$

A fertőzöttek száma $\sigma \cdot E$ -vel növekszik, és a meggyógyulókkal csökken:

$$\Delta I = \sigma \cdot E - \gamma \cdot I.$$

A gyógyultak számának változása

$$\Delta R = \gamma \cdot I.$$

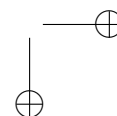
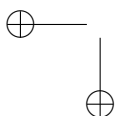
Szimuláljuk a járvány kialakulását időegységenként (naponta). Minden lépésben számítsuk ki a jelenlegi adatok alapján a változásokat, majd a következő napon a megváltozott értékekkel dolgozzunk:

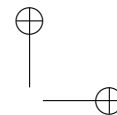
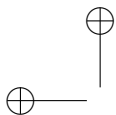
$$\begin{aligned} S(n+1) &\leftarrow S(n) + \Delta S(n), & E(n+1) &\leftarrow E(n) + \Delta E(n), \\ I(n+1) &\leftarrow I(n) + \Delta I(n) & \text{és} & & R(n+1) &\leftarrow R(n) + \Delta R(n). \end{aligned}$$

A szimulációt legalább 150 napra végezzük el az alábbiak szerint:

- Az induló paramétereket a táblázat első néhány sorában lehessen megadni, helyüket feliratokkal jelezzük. Példaként $N = 10\,000\,000$; $\beta = 0,9$; $\sigma = 0,1$; $\gamma = 0,2$.
- Határozzuk meg a táblázat két cellájában, hogy hányadik nap lesz a fertőző betegek száma maximális és mekkora ez az érték.
- Ábrázoljuk az S , E , I , R osztályok létszámát az idő függvényében. A diagram értelmezését feliratokkal segítsük.

Beküldendő egy tömörített `i512.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

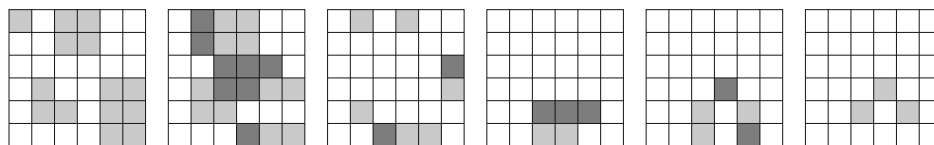




I. 513 (É). A sejtautomata elnevezés *Neumann Jánostól* származik az 1940-es évek elejéről, aki az önmagát reprodukáló gép logikáját, létrehozásának lehetőségeit vizsgálta. A leghíresebb sejtautomata a *John Horton Conway* által kitalált *életjáték*. Conway egy hónappal ezelőtt, 2020 áprilisában halt meg, így ezzel a feladattal rá is emlékezünk.

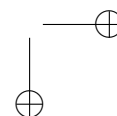
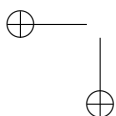
A Conway-féle életjátékban sejtek élnek egy kétdimenziós világban. A sejtek egy képzeletbeli táblázat egy-egy cellájában találhatók. Viselkedésüket az határozza meg, hogy az őket tartalmazó cella 8 szomszédja közül hányban található sejt. Ha egy sejt szomszédos cellái közül kettőnél kevesebb vagy háromnál több tartalmaz sejtet, akkor a sejt elpusztul, egyébként életben marad. Ha egy cella üres, de a szomszédos cellák közül pontosan háromban van sejt, akkor az üres cellában új sejt születik. A leírt változások nem folyamatosan, hanem lépésekben (generációkban) történnek. Kezdetben az élettér bizonyos celláiban vannak sejtek, míg a többi cellában nincsenek.

Például egy 6×6 -os élettér hat egymást követő állapota (a szürke cellákban vannak sejtek, a sötétebbek új sejtek helyét mutatják):



Készítsünk programot *sejtautomata* néven egy 50×50 -es négyzethálós életjátékhoz és oldjuk meg a következő feladatokat. A megoldások során a mintához hasonlóan valósítsuk meg a felhasználóval történő kommunikációt (az ékezetmentes kiírás is elfogadott).

1. Olvassuk be az élettér kezdeti állapotát a `conway.txt` szöveges állományból és tároljuk el az adatokat úgy, hogy a szimulációhoz használni tudjuk őket. A szöveges állomány 50 sorból áll, melyek mindegyikében 50 karakter található. Az állomány i -edik sorának k -edik karaktere az élettér i -edik sorának k -edik oszlopában lévő cella kezdeti tartalmát mutatja: szóköz esetén a cella üres, s betű esetén a cellában sejt van.
2. Adjuk meg, hogy összesen hány sejt található az élettérben. Készítsünk függvényt `szomszed` néven, amelynek bemeneti paramétere i és k , amelyek az élettér i -edik sorát és k -edik oszlopát jelentik. A függvény számítsa ki és adja vissza a megfelelő cella szomszédjaiban található sejtek számát.
3. Kérjük be a felhasználótól egy oszlop és egy sor értékét, és adjuk meg, hogy az adott cellában van-e sejt, illetve azt, hogy a cella szomszédjaiban hány sejt található.
4. Készítsünk eljárást `egylepes` néven, amely elvégez egy szimulációs lépést. Vegyünk fel az eredeti élettér mellé még egy átmeneti tárolót, amely az élettér állapotát mutatja majd a következő generációban. Vizsgáljuk meg az élettér celláit a fenti leírásnak megfelelően, majd ez alapján adjunk értéket a most létrehozott átmeneti tárolónak. Az eljárás végén a kiszámított új élettér értékei kerüljenek a tárolóból az eredeti élettérbe.





5. Számítsuk ki, hogy hány olyan sejt van az élettérben, amely életben marad egy szimulációs lépés megtétele után, majd az eredményt jelenítsük meg.
6. Végezzük el a szimuláció n lépését az `egylepes` alprogram meghívásával, ahol n értékét a felhasználótól kérjük be.
7. Adjuk meg, hogy az eddig elvégzett n lépés után most hány sejt fog születni a következő szimulációs lépésben.
8. Adjunk statisztikát a szimuláció következő 100 lépésében az élettér állapotáról. Írjuk a `statisztika.txt` szöveges állomány egy-egy sorába az élettérben lévő sejtek, a következő szimulációs lépésben elpusztuló és születő sejtek számát egy-egy szóközzel elválasztva. Ha az élettér üres, tehát a sejtek kihálnak, akkor az állományba `0 0 0` tartalmú sorokat ne írjunk, hanem helyette a következő sor jelenjen meg: „A szimuláció 34. lépése után az élettér már nem tartalmaz sejteket.” A szimulációs lépések közé a 6. feladatban végrehajtott n lépés is beleszámít.

Példa a be/kimenetre:

2. feladat:

Az élettérben található sejtek száma: 142

3. feladat:

A vizsgált cella oszlopa: 4

A vizsgált cella sora: 5

A cellában nincs sejt, a szomszédos cellákban a sejtek száma 1.

5. feladat:

Az élettérben 25 olyan sejt van, amely a következő időpontban is életben marad.

6. feladat:

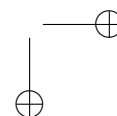
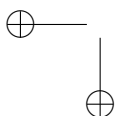
Hány lépést végezzünk el a szimulációból: 10

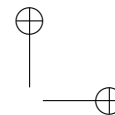
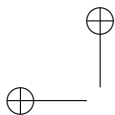
7. feladat:

Az élettérben 12 sejt fog születni a következő szimulációs lépésben.

I/S. 45. Jenő az Alföld tengersík vidékéről felköltözött a Budai-hegyekbe. Hogy minél inkább otthon érezze magát, szeretné a kertjét átrendezni, hogy kevésbé legyen hegyes-völgyes. A kert N parcellából áll, az i -edik parcella tengerszint feletti magassága A_i méter. Jenőnek egy órába telik egy parcella tetejéről egy réteg 1 méter magasságú földet áthordani egy másik parcella tetejére (ekkor az egyik parcella magassága 1 méterrel csökken, a másiké 1 méterrel nő). Jenő akkor fogja magát otthonosan érezni, ha a kertben bármely két parcella magasságának eltérése nem nagyobb, mint K méter. Írjunk programot, amely megmondja, hogy minimum hány órát kell dolgoznia Jenőnek, hogy elégedett legyen a kertjével és otthonosan érezze magát új lakóhelyén.

Bemenet: az első sor tartalmazza a parcellák N számát és K értékét. A második sor N darab számot: az i -edik szám az i -edik parcella A_i tengerszint feletti magassága méterben.





Kimenet: egyetlen szám, amely megadja, hogy minimum hány órát kell dolgozania Jenőnek, hogy bármely két parcella magasságának eltérése legfeljebb K legyen.

Példa:

Bemenet	Kimenet
4 3 551 555 551 560	4

Korlátok: $1 \leq N, K, A_i \leq 10^5$, egész számok. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N, K, A_i \leq 1000$.

Beküldendő egy `is45.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 144. Az asztalon N kockát találunk, az n -edik kocka élének hossza a_n egész szám, térfogata V_n (a kockákat 0-tól indexeljük). A kockákkal Q műveletet hajtunk végre egymás után. Az i -edik műveletben megváltoztatjuk az összes kocka élének hosszát az $[l_i, r_i]$ tartományban b_i -vel. Minden művelet után adjuk meg a kockák térfogatainak összegét modulo $10^9 + 7$.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N és Q számot. A következő sor N pozitív számot tartalmaz: a kockák élének hosszát sorrendben, ezek legfeljebb 10^9 nagyságúak. A következő Q sor mindegyike tartalmaz egy l_i , r_i és b_i egész számot ($0 \leq l_i \leq r_i < N$, $|b_i| \leq 10^9$). A változtatások során a kockák éle mindig pozitív marad.

Kimenet: adjuk meg minden változtatás után a $\left(\sum_{n=0}^{N-1} V_n\right)$ modulo $10^9 + 7$ értéket.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	Kimenet
5 2 1 1 1 1 2 0 1 1 / 4 4 -1	26 19

Korlátok: $1 \leq N, Q \leq 10^5$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N, Q \leq 100$.

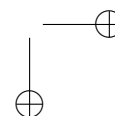
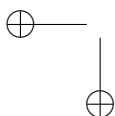
Beküldendő egy `s144.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

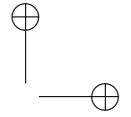
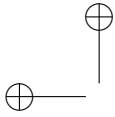


A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:

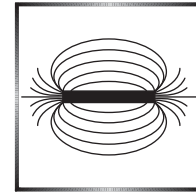
<https://www.komal.hu/munkafuzet>

Beküldési határidő: 2020. június 10.





Vezető henger mozgása homogén mágneses térben

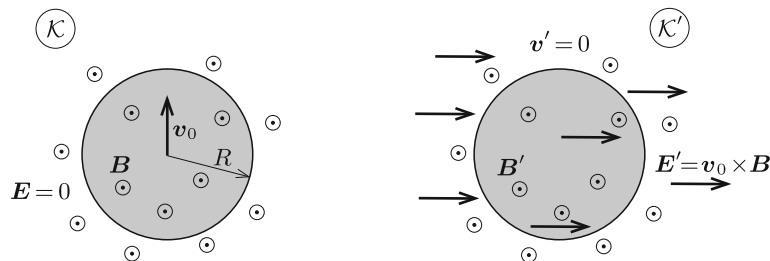


Fizika feladatok megoldása során nagy szerephez jutnak bizonyos „trükkök”, „mesterfogások”. Ezen írás célja, hogy egy érdekes és tanulságos példán keresztül két hasznos eljárást is bemutasson, amelyek segítségével – bizonyos esetekben – fémek elektromos térben való „viselkedése” leírható.

A probléma

Feladatunk, hogy leírjuk, milyen töltéselrendeződés alakul ki egy hosszú, vékony falú fémhenger felületén, ha a fémhengert homogén mágneses térbe helyezzük, majd az indukcióvonalakra merőleges irányban *kis sebességgel* (a fénysebességnél sokkal lassabban) mozgatjuk. Legyen a henger sugara R , sebességének nagysága v_0 , a mágneses indukció nagysága pedig B .

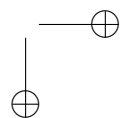
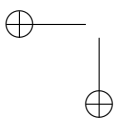
A vezető hengerben szabad töltéshordozók vannak, melyek elmozdulhatnak, így a semleges testben megváltozhat a töltéseloszlás. Ha a feladatot az „álló” \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben próbáljuk megoldani, akkor az reménytelenül bonyolulttá válik. Próbálkozzunk meg olyan \mathcal{K}' rendszerben dolgozni, ami a hengerrel együtt v_0 sebességgel mozog a mágneses térre és a henger tengelyére merőleges irányban (1. ábra). (Vegyük észre, hogy a \mathcal{K}' rendszer is inerciarendszer, hiszen a sebessége \mathcal{K} -hoz képest időben állandó.) A \mathcal{K}' rendszerben a henger áll, tehát a benne lévő szabad töltéshordozókra (az elektronokra) biztosan *nem hat* a mágneses térből származó Lorentz-erő. A mozgó rendszerbe való áttéréssel látszólag kiküszöböltük a henger mozgásából fakadó nehézséget, azonban – mint látni fogjuk – ennek az áttérésnek „ára” van.



1. ábra. Homogén mágneses térben mozgó fémhenger

Az egyszerűség kedvéért a henger helyett vizsgáljunk csak egyetlen ponttöltést, amely homogén mágneses és elektromos mezőben mozog! Legyen a pontszerű test sebességvektora \mathbf{v} , a töltése Q , a mágneses indukció vektora \mathbf{B} , az elektromos térerősségvektor pedig \mathbf{E} . A ponttöltésre ható erő az álló rendszerben:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + QE.$$





Üljünk most egy v_0 sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe, és írjuk fel a részecskére ható erőt ebben a (vesszősen jelölt) rendszerben is:

$$\mathbf{F}' = Q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B}' + QE'.$$

Hasonlítsuk össze a két rendszerben felírt erőt! Mivel mindkét vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, nyilván teljesül, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ (hiszen a töltött részecske gyorsulása ugyanakkora mindkét inerciarendszerben), vagyis fennáll:

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}') + \mathbf{E} + (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}') - \mathbf{E}' \equiv 0.$$

A részecske (tetszőleges irányú) \mathbf{v} sebességével arányos tag eltűnéséből

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B},$$

a sebességétől független tagokból pedig

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$$

adódik.*

A számunkra fontos esetben, amikor az álló rendszerben nincs elektromos tér, vagyis $\mathbf{E} \equiv 0$, a mozgó rendszerben tapasztalható homogén elektromos mező térerősségvektora:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}.$$

Visszatérve az eredeti problémához a feladatunk nem más, mint meghatározni, milyen töltéselrendeződés alakul ki egy homogén fémhenger felületén, ha a tengelyére merőleges, homogén elektromos térbe helyezzük, melynek nagysága

$$(1) \quad E_0 = v_0 B.$$

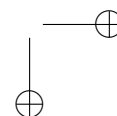
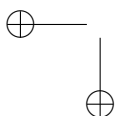
A következőkben két különböző módszerrel is megoldjuk ezt a feladatot. Az egyik matematikailag könnyebb, ám egy szokatlan gondolatot („mesterfogást”) igényel. A másik eljárás a tükörtöltés módszerét alkalmazza; ez talán hamarabb eszünkbe juthat, azonban a számolás hosszadalmasabb.

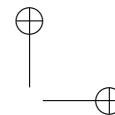
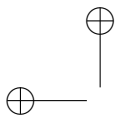
A szuperpozíció módszere

Az első megoldás során egy olyan trükkal élünk, amely ugyan elég speciális, azonban hasznos lehet hasonló jellegű elektrosztatikai feladatok megoldásánál. A fémek belsejében egyensúlyi állapotban nem lehet elektromos tér, így olyan töltéselrendezést keresünk, amelyet az eredeti, *külső* térre szuperponálva a henger belsejében zérus elektromos teret eredményez.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen az elektromos tere egy egyenletes térfogati töltéssűrűséggel rendelkező, hosszú hengernek a henger belsejében. Ehhez a Gauss-féle

*Ezek a transzformációs képletek csak $v \ll c$ esetén érvényes, közelítőleg helyes összefüggések. A fénysebességgel összemérhető sebességű mozgásoknál (ami egy makroszkopikus testnél megvalósíthatatlan) a \mathbf{B} térerősség is megváltozik.





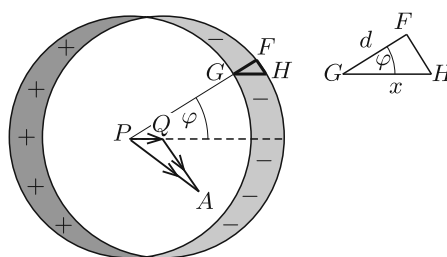
fluxustörvényt fogjuk felírni a henger egy h hosszúságú darabjára. Az elrendezés forgásszimmetrikus, a térerősség erővonalai sugárirányúak, a térerősségvektor nagyságát meghatározó összefüggés pedig

$$\frac{\rho h r^2 \pi}{\epsilon_0} = 2r\pi h E(r).$$

A fenti összefüggésben ρ a henger térfogati töltéssűrűségét, r pedig a henger tengelyétől mért távolságot jelöli. Mivel most csak az $r < R$ esetet vizsgáljuk, ennek megfelelően írjuk fel a Gauss-törvényt. Rendezve az egyenletet az elektromos térerősség nagyságára ezt kapjuk:

$$E(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0}.$$

Vizsgáljunk most két hengert, az egyik (a P középpontú) henger pozitív, a másik (a Q középpontú) pedig negatív térfogati töltéssűrűséggel rendelkezik (2. ábra). Tekintsünk egy tetszőleges A pontot a mindkét henger által lefedett részen! A \vec{PQ} , \vec{PA} és \vec{QA} vektorok segítségével, illetve az elektromos térerősségvektor nagyságára kapott összefüggés felhasználásával az A pontban az elektromos térerősség a következő alakban írható fel:



2. ábra. Ellentétesen töltött hengerek

$$(2) \quad \mathbf{E}_A = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{PA} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{QA} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{PQ}.$$

Látjuk, hogy a két henger átfedő részén az elektromos térerősség vektora *nem* függ az A pont helyzetétől, tehát valóban *homogén* elektromos mező alakul ki. Mi a helyzet azon részekkel, ahol nincs a hengerek között átfedés? A PQ , valamint PG szakaszok által bezárt szöveget jelöljük φ -vel. Ha a PQ távolság x , akkor a GF szakasz hossza

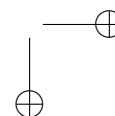
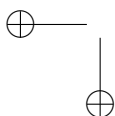
$$(3) \quad d = x \cos \varphi.$$

(Kihasználtuk, hogy a GH szakasz hossza éppen x , és a két henger tengelye kellően közel van egymáshoz, emiatt az FH körív egy rövid, egyenes szakasszal közelíthető.)

Tekintsünk egy keskeny, ΔA területű sávot a henger felületén! A töltés ebben a részben a következő alakban írható fel:

$$(4) \quad \eta \Delta A = d \rho \Delta A,$$

ahol ρ az egységnyi térfogatban lévő töltés nagysága, η pedig az egységnyi felület töltése (felületi töltéssűrűség). Mivel a külső tér nagysága (1) szerint $v_0 B$, így





$E_A = v_0 B$, hiszen ekkor lesz zérus elektromos tér a fémen belül. A (2)–(3)–(4) egyenletek alapján a felületi töltéssűrűség már könnyen kiszámítható:

$$(5) \quad \eta = 2\varepsilon_0 v_0 B \cos \varphi.$$

A két, ellentétesen töltött henger segítségével létrehozott elektromos tér a külső elektromos térrel együtt éppen olyan eredő teret ad, amely a fémhengeren belül eltűnik. A kapott eredmény szerint a felületi töltéssűrűség függ a henger felületén megválasztott pont helyétől. A második megoldás során azt is látni fogjuk, hogy a szögfüggés milyen fizikai tartalommal bír.

Tükörtöltések 2 dimenzióban

A második megoldás során a tükörtöltés módszerét fogjuk alkalmazni. Ez a módszer kiválóan alkalmazható „magasfokú” szimmetriával rendelkező töltésselrendeződések estén, bizonyos esetekben azonban a számítások hosszadalmassá válhatnak. Az alábbiakban ismertetésre kerülő módszer alkalmas lehet még elektromosan feltöltött szálak és fémhengerek közötti erőhatás, illetve párhuzamos fémhengerek kapacitásának meghatározására is.

A tükörtöltés módszer alkalmazása speciális geometriai viszonyokat kíván. Jól ismert, hogy egy fémsík (fémsíkok) vagy egy fémgömb közelében elhelyezkedő pontszerű töltés és a fém együttes elektromos tere olyan lesz, *mintha* a valódi töltésen kívül egy alkalmas helyen elhelyezkedő és alkalmas nagyságú másik töltés (tükörtöltés) is jelen lenne. (Ez az erőtér csak a fémfelület egyik oldalán, a valódi töltést tartalmazó térrészben érvényes, a másik oldalon az elektromos térerősség nulla.)

Esetünkben nem ilyen egyszerű a helyzet. A hosszú henger eltolási szimmetriájából kiindulva megsejthetjük, hogy hosszú, egyenletesen feltöltött szigetelő szálak elektromos terét érdemes vizsgálnunk. Tekintsünk két hosszú, párhuzamos, elektromosan töltött szálakat, melyeken a vonalmenti töltéssűrűség (vagyis ez egységnyi hosszban található töltés) $\pm\lambda$. Legyen a két szál egymástól $2d$ távolságban ($d \gg R$), a fémhenger szimmetriatengelye pedig a szálakkal párhuzamosan, azok között „félúton”, a szálaktól d távolságban helyezkedjék el.

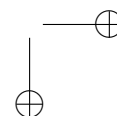
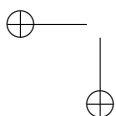
Az elektromos tér nagyságát egy-egy szál esetén a Gauss-törvény alkalmazásával kaphatjuk meg, majd a szuperpozíció elvét alkalmazva kiszámíthatjuk az eredő teret. Egyetlen szál esetén az elektromos térerősségvektor nagysága a száltól r távolságban

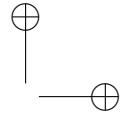
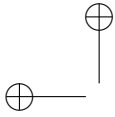
$$E_{\text{szál}}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r},$$

iránya pedig a szállra merőleges (tehát sugárirányú) lesz. Mivel a λ és $-\lambda$ töltéssűrűségű szálak a hengertől *messze* találhatóak, így a henger „helyén” jó közelítéssel *homogén* elektromos tér alakul ki, amelynek nagysága:

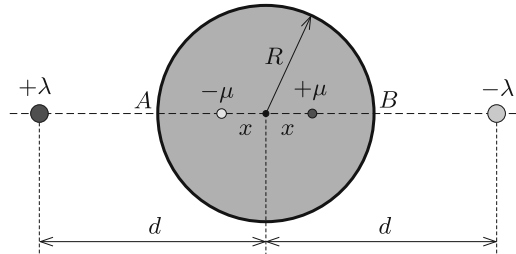
$$(6) \quad E_0 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d}.$$

A tükörtöltések (pontosabban fogalmazva: a tükörszálak) helyét úgy kell megválasztani, hogy a fémhenger felülete ekvipotenciális legyen. (Ilyenkor az elektromos





térerősségvektor a felület bármely pontjában merőleges a felület érintősíkjára, ún. *normális irányú*.) Helyezzünk el – gondolatban – a henger szimmetriatengelyétől x távolságban, a két távoli töltött szál által meghatározott síkban egy μ , az „átellenes” helyen pedig $-\mu$ vonalmenti töltéssűrűséggel ellátott szálat (3. ábra).



3. ábra. Töltéselrendezés a tükörtöltés módszer alkalmazásánál

Megjegyzés. A tükörtöltések nagyságát azért választottuk λ -tól (elvben) függetlennek, mert egy fémgömb esetében a tükörtöltés módszere akkor működik, ha különböző helyekre különböző nagyságú töltéseket helyezünk el. Később látni fogjuk, hogy a fémhenger csak a $\mu = \lambda$ választás lesz eredményes.

A szálak közül válasszuk ki például a λ és $-\mu$ vonalmenti töltéssűrűségű párt, majd vizsgáljuk meg ezek eredő potenciálfüggvényét. Ennek a függvénynek az állandóságát szeretnénk elérni a fémhenger felülete mentén. (A másik két szálat azért hagyjuk figyelmen kívül, mert az elrendezés szimmetrikus. Ha az említett két szál tere ekvipotenciális a hengerfelületen, akkor a másik két szál tere is az lesz, tehát a négy szál eredő potenciálja is állandó nagyságú a felületen.)

A potenciálfüggvény felírásához először tekintsünk egyetlen egy szálat, amelynek vonalmenti töltéssűrűsége λ^* , és vizsgáljuk meg, hogy mekkora munkavégzéssel tudunk egy q nagyságú próbatöltést az önkényesen kiválasztott r_0 távolságú pontból sugárirányban mozgatva a száltól r távolságra lévő pontba juttatni. A mozgathoz szükséges erő a száltól r' távolságban

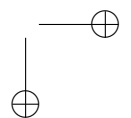
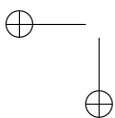
$$F(r') = -qE(r') = -\frac{q\lambda^*}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'}.$$

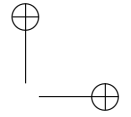
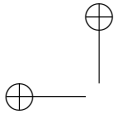
Ez az erő változó nagyságú, ezért a teljes munkavégzést, ami $qU(r)$ -rel egyenlő, a kicsiny elmozdulásokon végzett munkák összegzésével (integrálásával) számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} qU(r) &= \sum \Delta W = \sum F(r') \Delta r' = -\frac{q\lambda^*}{2\pi\epsilon_0} \sum_{r'=r_0}^r \frac{\Delta r'}{r'} \approx -\frac{q\lambda^*}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} = \\ &= -\frac{q\lambda^*}{2\pi\epsilon_0} (\ln r - \ln r_0). \end{aligned}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy egyetlen töltött szál elektromos potenciálfüggvénye:

$$U(r) = -\frac{\lambda^*}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{állandó}.$$





(Az állandó értéke a potenciál nullpontjának, vagyis r_0 -nak megválasztásától függ. Ezt a nullpontot – a ponttöltés háromdimenziós esetétől eltérően – *nem* tehetjük a „végtelen” távoli pontba, de nyilván nem választhatjuk a szál helyét sem kiindulási pontnak.)

Visszatérve az eredeti elrendezéshez azt kapjuk, hogy a $\lambda^* = +\lambda$ vonalmenti töltéssűrűséggel ellátott száltól r_1 , a $\lambda^* = -\mu$ vonalmenti töltéssűrűséggel ellátott száltól pedig r_2 távolságra lévő pontban a potenciál értéke:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \text{állandó}.$$

Mivel a henger felülete ekvipotenciális, teljesülnie kell az

$$(7) \quad \frac{(r_1)^\lambda}{(r_2)^\mu} = \text{állandó}$$

feltételnek. Már az ókor óta ismert az a geometriai tétel, miszerint a sík azon pontjai, amelyek két adott ponttól mért távolságainak aránya állandó, egy körön (az ún. *Apollóniosz-körön*) helyezkednek el. Eszerint a (7) egyenlet csak akkor határoz meg a síkban egy kört (a térben pedig hengerfelületet), ha $\lambda = \mu$, mert ilyen esetben $r_1/r_2 = \text{állandó}$.

Hátravan még az x távolság meghatározása. Tekintsük ismét a korábban kiválasztott két szál potenciálját! Az A és a B pontokban a potenciál egyenlőségét felhasználva írhatjuk, hogy

$$U_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-R}{R-x}\right) = U_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d+R}{R+x}\right).$$

A logaritmusfüggvény monotonitását kihasználva, továbbá az argumentumokat összevetve adódik, hogy

$$\frac{d-R}{R-x} = \frac{d+R}{R+x},$$

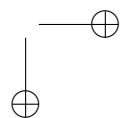
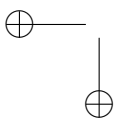
vagyis teljesül, hogy

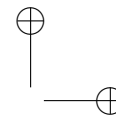
$$(8) \quad x = \frac{R^2}{d}.$$

Mivel d (R -hez viszonyítva) nagyon nagy, (6) szerint λ -nak is nagyon nagy, (8) miatt pedig x -nek nagyon kicsinek kell lennie. Az egymáshoz nagyon közel ($2x$ távolságra) lévő, nagy, de ellentétes töltésű szálat az egymáshoz közeli, ellentétes előjelű ponttöltések mintájára (kétdimenziós) *dipólusnak* nevezhetjük. A szálak vonalmenti töltéssűrűségének és a távolságuknak szorzata

$$p = 2x\lambda = 2\pi\epsilon_0 R^2 E_0 = 2\pi\epsilon_0 R^2 v_0 B.$$

Ez a mennyiség, amit (kétdimenziós) dipólmomentumnak (dipólnyomatéknak, dipólerősségnek) neveznek, még a $d \rightarrow \infty$ határesetben is véges nagyságú marad.

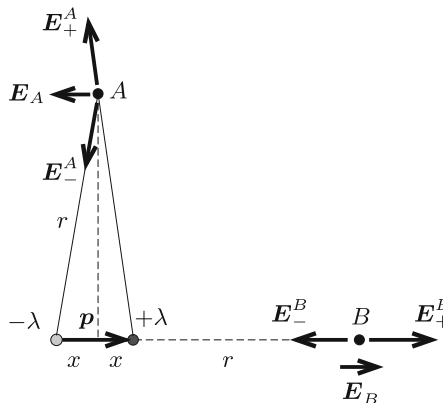




Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a homogén elektromos mezőbe helyezett, az elektromos térerősségvektorra merőleges tengelyű fémhengernek az elektromos megosztás hatására kialakuló tere a hengeren kívül olyan, mintha a fémhenger tengelye mentén egy megfelelő erősségű dipólus is jelen lenne. Az eredő elektromos tér a dipólus erőterének és a külső (homogén) erőternek vektori összege. Ha ezt az eredő teret meghatározzuk, abból már könnyen leolvashatjuk a fémhenger felületére kerülő töltések mennyiségét és eloszlását.

Tekintsünk egy p erősségű dipólt, amit egy negatív és egy pozitív töltésű szál alkot. A dipólerősséget olyan \mathbf{p} vektorral adhatjuk meg, amely a negatív töltésű száltól a pozitív felé mutat, nagysága pedig p . Határozzuk meg az elektromos térerősségvektor nagyságát és irányát a dipólustól r távolságban, a \mathbf{p} vektorra merőleges, illetve azzal párhuzamos irányban (4. ábra)! Ezeket az irányokat *Gauss-féle főhelyzeteknek* nevezik.

Számítsuk ki a két szál eredő térerősségét az A és B pontokban! (Kihasználjuk, hogy $2x \ll r$.) Mivel egyetlen szál térerőssége



4. ábra. Dipólusszál tere a Gauss-féle főhelyzetekben

$$E(r) = \pm \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0},$$

az eredő tér nagysága a Gauss-féle főhelyzetekben:

$$E_B = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0} - \frac{\lambda}{2(r+2x)\pi\epsilon_0} \approx \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},$$

illetve

$$E_A \approx \frac{2\lambda}{2r\pi\epsilon_0} \frac{x}{r} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Látjuk, hogy a térerősségek nagysága a főhelyzetekben ugyanakkora, de az irányuk *ellentétes* (lásd a 4. ábrát).

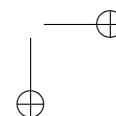
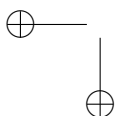
Ha nem a Gauss-féle főhelyzetekre vagyunk kíváncsiak, hanem tetszőleges pontban keressük az elektromos térerősséget, akkor az 5. ábrának megfelelően érdemes felbontani a dipólusmomentum-vektort a dipólus tengelyével φ szöget bezáró iránnyal párhuzamos

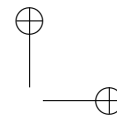
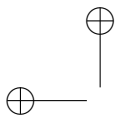
$$p_{\parallel} = p \cos \varphi$$

nagyságú, és erre az irányra merőleges

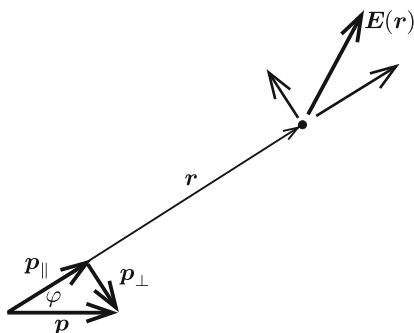
$$p_{\perp} = p \sin \varphi$$

nagyságú vektorkomponensek összegére.





Ha a „komponensdipólusokra” felírjuk a Gauss-féle főhelyzeteknek megfelelő egyenleteket, akkor már könnyen kiszámíthatjuk az elektromos térerősség nagyságát a kérdéses pontban, az irányát pedig a vektorösszeadás alapján kaphatjuk meg. A dipólustól a vizsgált pontba mutató vektorral párhuzamos (ún. normális irányú) térerősséghez csak p_{\parallel} , az erre merőleges (ún. tangenciális) komponenshez pedig csak p_{\perp} ad járulékot.



5. ábra. Dipólusszal elektromos tere tetszőleges pontban

Az eredeti problémához visszatérve tehát a henger egy adott pontjában meg kell határozni a dipólus által keltett elektromos térerősség nagyságát és irányát, majd ehhez hozzávenni a külső elektromos teret. A henger esetén az \vec{R} helyvektorú pontban, mely a dipólus tengelyével φ szöveget zár be, a dipólus tere által létrehozott tangenciális és normális irányú térerősség-komponensek:

$$E_t^{\text{dipól}} = v_0 B \sin \varphi, \quad E_n^{\text{dipól}} = v_0 B \cos \varphi.$$

Ehhez vegyük hozzá a külső elektromos tér tangenciális és normális komponensét, melyek

$$E_t^{\text{külső}} = -v_0 B \sin \varphi, \quad E_n^{\text{külső}} = v_0 B \cos \varphi.$$

A külső tér tangenciális komponense ellentétes irányú a dipólus terének tangenciális komponensével. Eszerint az eredő térerősségnek valóban csak normális komponense van, melynek nagysága:

$$E_n^{\text{eredő}} = 2v_0 B \cos \varphi.$$

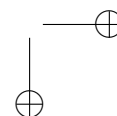
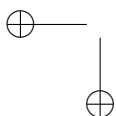
A fém belsejében az elektromos térerősség nulla, tehát az eredő tér normál komponensének „ugrása” is $2v_0 B \cos \varphi$.

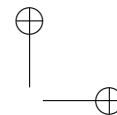
A felületi töltéssűrűség a térerősség normál komponensének ugrása és ε_0 szorzata. (Ezt úgy láthatjuk be, hogy – gondolatban – körül vesszük a felület egy kicsiny részét egy lapos, zárt „dobozzal”, majd alkalmazzuk erre a dobozra a Gauss-törvényt.)

Ezek szerint a felületi töltéssűrűség a B indukciójú mágneses térben v sebességgel mozgó fémcsőnél (vagy tömör fémhengernél)

$$\eta(\varphi) = 2\varepsilon_0 v_0 B \cos \varphi,$$

összhangban az első módszerrel kapott (5) eredménnyel.





Megjegyzés. A mozgó fém felületén kialakuló elektromos töltéssűrűség nagysága nem függ attól, hogy egy vékony falú csövet, vagy pedig egy tömör fémrudat mozgatunk a mágneses térben. Hibás tehát az a naiv sejtés, miszerint a tömör rúdban sokkal több szabadon mozgó töltés lévén, azokból a megosztás során sokkal többet lehet a felületre „húzni”, mint a vékony falú cső esetében. A felületre kiülő töltések mennyiségét nem a rendelkezésre álló elektronok száma, hanem a kiegyensúlyozandó külső tér nagysága határozza meg.

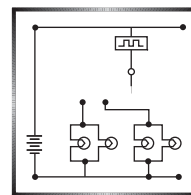
A bemutatott probléma szép példája annak, amikor egy fizika feladatnak több, lényegileg különböző megoldása van, és mindegyikből sokat tanulhatunk. A bemutatott ötletek nem újdonságok, hanem kevésbé ismert „trükkök”, ezen írás egyik célja, hogy összefoglalja azokat.

Fontos megjegyezni, hogy habár a henger mozog, a hozzá rögzített rendszer inerciarendszer, így az elektrosztatika törvényeit a megszokott alakban írhatjuk fel. Nem ez a helyzet, ha a henger gyorsul. Érdekes, a cikkben tárgyaltakhoz hasonló gondolatokat igénylő példákat találunk a KöMaL korábban kitűzött feladatai között (lásd pl. a 3191., 3322., 3600., 4032., 4604., 4926. feladatot), illetve a *333+ Furfangos Feladat Fizikából* című feladatgyűjteményben. A cikkben leírtakhoz kapcsolódó, ajánlott irodalom még: Feynman – Leighton – Sands: Mai fizika, V–VI.

Berke Martin (Budapest)

a BME II. éves fizika BSc szakos hallgatója

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 688. Régen a moziban a diavetítő mesefilmekhez hasonló filmszalagot használtak, csak az otthon vetítetteknél sokkal hosszabbakat. Egy percnyi film 27 méter hosszú szalagra fért rá. A filmszalagot tekercsekben tárolták, a tárolóorsó sugara 5,5 cm, erre 12,5 cm vastagon lehetett a filmet feltekercselni. Vetítés közben a film elhaladt a vetítőlencse előtt, majd egy másik, hasonló segédorsóra tekeredett fel.

a) Mekkora fordulatszámmal forgott a tekercs a film lejátszásakor a vetítés elején és a végén?

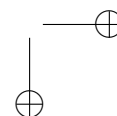
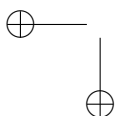
b) A vetítés után a segédorsóról visszatekereselték a filmet az eredeti orsóra. Mekkora fordulatszámmal forgott a segédorsó a tekercselés elején és a végén, ha az eredeti orsót végig 3 fordulat/másodperc fordulatszámmal forgatták?

(4 pont)

Megoldás. a) A fordulatszám a szalag sebességének és a filmtekercs pillanatnyi kerületének hányadosa.

A filmszalag sebessége: $\frac{27 \text{ m}}{1 \text{ perc}} = 0,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A filmtekercs kerülete a vetítés kezdetekor: $2\pi \cdot (5,5 \text{ cm} + 12,5 \text{ cm}) = 1,13 \text{ m}$.





A tekercs fordulatszáma a vetítés elején: $\frac{0,45 \text{ (m/s)}}{1,13 \text{ m}} = 0,40 \frac{1}{\text{s}}$.

A filmtekerics kerülete a vetítés végén: $2\pi \cdot 5,5 \text{ cm} = 0,346 \text{ m}$.

A tekercs fordulatszáma a vetítés végén: $\frac{0,45 \text{ (m/s)}}{0,346 \text{ m}} = 1,30 \frac{1}{\text{s}}$.

b) Visszatekeréskor a szalag pillanatnyi sebessége a tekercs megadott fordulatszámának és a tekercsen lévő film (fokozatosan változó) kerületének szorzata. A segédorsó fordulatszáma a szalag pillanatnyi sebességének és a segédorsón lévő filmtekerics éppen aktuális kerületének hányadosa.

A szalag sebessége a visszatekerés kezdetekor: $2\pi \cdot (5,5 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 1,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A segédorsón lévő film kerülete kezdetben: $2\pi \cdot (18 \text{ cm}) = 1,13 \text{ m}$.

A segédorsó fordulatszáma a visszatekerés kezdetekor: $\frac{1,04 \text{ m/s}}{1,13 \text{ m}} = 0,92 \frac{1}{\text{s}}$.

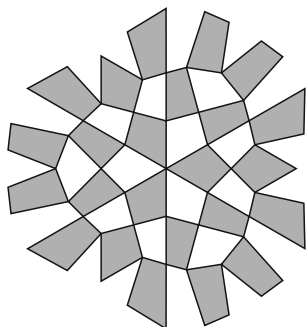
A szalag sebessége a visszatekerés végén: $2\pi \cdot (18 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 3,39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A segédorsón lévő film kerülete a visszatekerés végén: $2\pi \cdot (5,5 \text{ cm}) = 0,346 \text{ m}$.

A segédorsó fordulatszáma a visszatekerés befejeztekor: $\frac{3,39 \text{ m/s}}{0,346 \text{ m}} = 9,8 \frac{1}{\text{s}}$.

Szanyi Attila (Bonyhádi Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 9. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 1 dolgozat.



G. 697. *Belenézünk egy kaleidoszkópba; a látvány egy részét az ábra mutatja. Hol helyezkedhetnek el a kaleidoszkóp tükre?*

(3 pont)

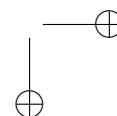
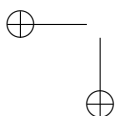
Megoldás. Jelöljük szaggatott vonalakkal a látott kép szimmetriatengelyeit (1. ábra). A kaleidoszkóp tükre az ábra síkjára merőlegesen, a szaggatott vonalakra illeszkedve helyezkedhetnek el, hiszen egy-egy tükörben az ábra geometriai értelemben vett tükörképét látjuk. Több tükör esetén azok többször

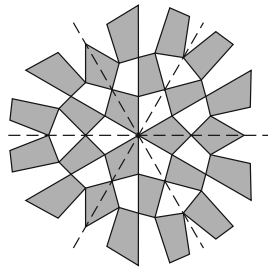
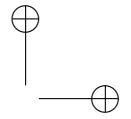
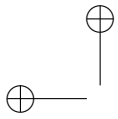
is visszaverhetik a fénysugarakat, így a tükörképek újabb tükörképei is megjelenhetnek.

A további ábrákon a tükrök tükröző oldalát vékony vonallal és fehéren, a nem tükröző oldalukat pedig vastag vonallal jelöljük. A látott kép ténylegesen létező részeit sötétebb, a tükörképeket pedig világosabb árnyalattal jelöljük. A megfigyelő mindig a sötétebb területek fölötti helyről szemléli az alakzatot.

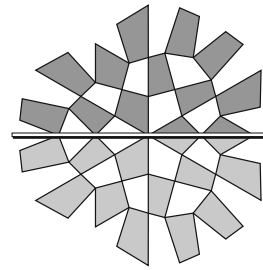
Ha csak *egyetlen* tükör van a látvány ábrázolt részleténél, akkor az a 2. ábrán látható helyzetben (vagy attól 60° egész számú többszörösével elforgatva) helyezkedhet el. A továbbiakban az elforgatott helyzeteket külön nem említjük.

Két tükör egymással bezárt szöge $\pm 60^\circ$ (3. ábra) vagy $\pm 120^\circ$ (4. ábra) lehet. (Ezen tükörállások közül 2-2 helyzet látszólag megegyezik, de a tükröző felületek felcserélődése miatt ténylegesen eltérnek egymástól.)

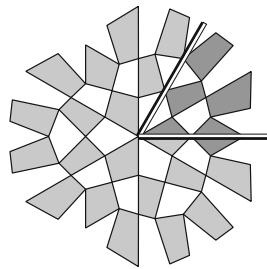




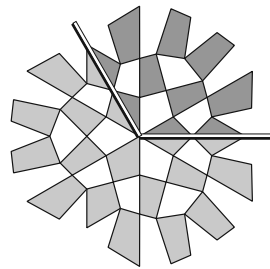
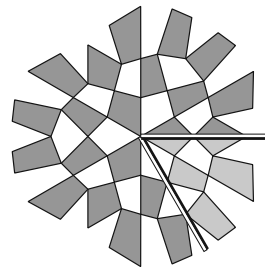
1. ábra



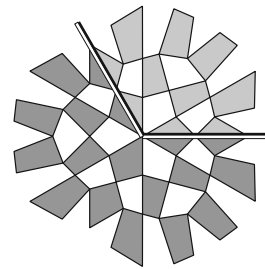
2. ábra



3. ábra



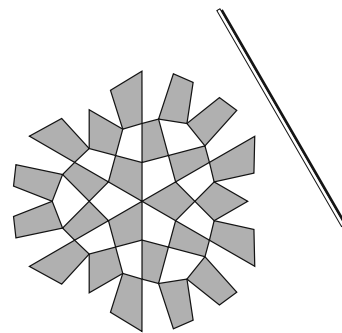
4. ábra



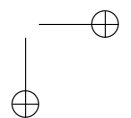
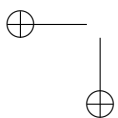
Eddigi megfontolásaink csak akkor érvényesek, ha a tükör áthalad a megadott alakzaton. Mivel az ábra a látványnak csak *egy részét* mutatja, a tükrök az alakzaton kívül úgy is elhelyezkedhetnek, hogy nem metszik azt. Ilyen esetben a tükör (tükrök) helyzete tetszőleges lehet (5. ábra).

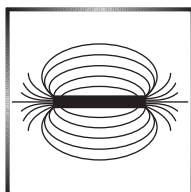
Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 19, hiányos (1 pont) 9, hibás 1 dolgozat.



5. ábra





Fizika feladatok megoldása

P. 5186. Egy szánkó és a rajta ülő gyerek együttes tömege 25 kg. A csúszási súrlódási tényező a hóban 0,05.

a) Szeretnénk vízszintes terepen állandó sebességgel húzni a szánkót. Mekkora vízszintes erő szükséges ehhez?

b) A szánkót vízszintes, havas talajon 2 másodpercen át 50 N erővel felgyorsítjuk álló helyzetből, majd magára hagyjuk. Mekkora utat tesz meg a szánkó az indulás és a megállás között?

(3 pont)

Tarján Imre emlékverseney (Szolnok) feladata alapján

Megoldás. A következő adatokat ismerjük:

a szánkó és a gyerek össztömege: $m = 25$ kg,

a súrlódási együttható: $\mu = 0,05$,

a nehézségi gyorsulás: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

a gyorsítás ideje: $t_1 = 2$ s,

a húzóerő a gyorsítás során: $F_1 = 50$ N.

a) Egyenletes mozgásnál a szánkó húzásához szükséges erő – Newton I. törvénye szerint – megegyezik a súrlódási erővel:

$$F = S = \mu mg \approx 12,3 \text{ N.}$$

b) Amíg gyorsítjuk a szánkót, a dinamika alapegyenlete szerint:

$$ma_1 = F_1 - S = F_1 - \mu mg,$$

vagyis a szánkó gyorsulása:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} - \mu g = 1,51 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ilyen gyorsulással t_1 idő alatt megtett út:

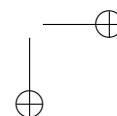
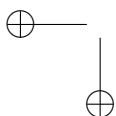
$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 = 3,0 \text{ m,}$$

és a szánkó sebessége a gyorsítási szakasz végén

$$v_1 = a_1 t_1 = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Miután magára hagyjuk a szánkót, vízszintes irányban csak a súrlódási erő fog rá hatni. A mozgásegyenlet ekkor

$$ma_2 = -S = -\mu mg,$$





vagyis a lassulása:

$$|a_2| = \mu g = 0,49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A magára hagyott szánkó

$$t_2 = \frac{v_1}{|a_2|} = 6,1 \text{ s}$$

ideig fog még mozogni, és a megállásáig (az átlagsebességgel számolva) további

$$s_2 = \frac{v_1 t_2}{2} = 9,2 \text{ m}$$

távolságra jut.

A szánkó tehát az indulásától a megállásáig összesen

$$s_1 + s_2 = 12,2 \text{ m}$$

utat tesz meg.

Szabó László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn. és Szathmáry Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

74 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 22, hiányos (1 pont) 11 dolgozat.

P. 5190. *Egy vékony fakú, függőlegesen álló üvegcső alul szabályos félgömb alakú. A cső átmérője 10 cm. Vizet töltünk a csőbe, 20 cm magasan. A cső tengelye mentén, a vízfelület felett 30 cm magasan egy kicsiny fényforrás világít.*

a) *Hova tegyünk egy ernyőt, hogy azon a fényforrás éles képe jelenjen meg?*

b) *Mekkora a kép nagyítása?*

(A víz törésmutatója $n = 4/3$.)

(5 pont)

Közli: *Radnai Gyula*, Budapest

Megoldás. Ha egy n_1 törésmutatójú közeget R sugarú gömbfelület választ el egy másik, n_2 törésmutatójú közegetől, akkor az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarakra a leképezési törvény így teljesül:

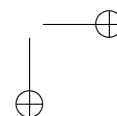
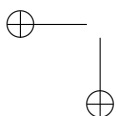
$$(1) \quad \frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

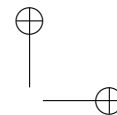
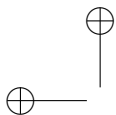
A képletben R akkor pozitív, ha a gömbfelület középpontja a kép oldalán helyezkedik el. A leképezés nagyítása (az optikai tengelyre merőleges irányban):

$$(2) \quad N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t} \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

Megjegyzés. Ezeket az összefüggéseket az 1. ábra és a 2. ábra alapján – a Snellius–Descartes-törvény alkalmazásával – láthatjuk be, ha a kicsiny szögek szinuszát és tangensét magukkal a szögekkel közelítjük. Az ábrákról leolvashatjuk, hogy

$$n_1 \left(\frac{h}{t} + \frac{h}{R} \right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{k} \right),$$

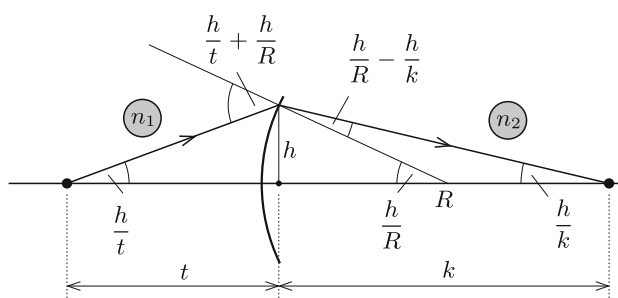




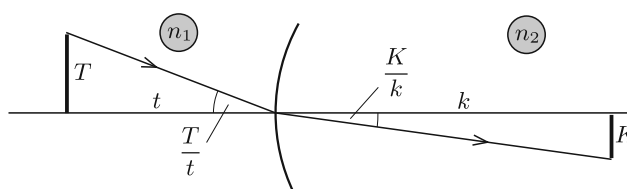
ami (1)-gyel egyenértékű, továbbá

$$\frac{T}{t}n_1 = \frac{K}{k}n_2,$$

ami a nagyítás (2) összefüggésének felel meg.



1. ábra



2. ábra

Kövessük végig a fényforrásból kiinduló fénysugarak útját felületről felületre. A levegőből a vízbe jutó fényre a tárgytávolság $t_1 = 30$ cm, és $n_1 = 1$. A sík felületnél $1/R$ helyébe 0 írható. A vízben $n_2 = n = \frac{4}{3}$, így (1) és (2) szerint

$$k_1 = -40 \text{ cm} \quad \text{és} \quad N_1 = \frac{-40 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \cdot \frac{3}{4} = -1.$$

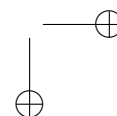
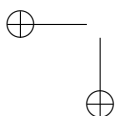
A negatív képtávolság azt jelenti, hogy a kép látszólagos (virtuális), tehát a tárgy oldalán (a vízfelszín *felett*), a vízfelszíntől 40 cm távolságban jön létre. (Ezt a képet a víz alól nézve látnánk.) A nagyítás negatív előjele azt mutatja, hogy a kép *egyenes* állású.

A második leképezést az $n_1 = \frac{4}{3}$ törésmutatójú vízből az $n_2 = 1$ törésmutatójú levegőbe átlépő fénysugarak hozzák létre. Mivel most a tárgytávolság

$$t_2 = 40 \text{ cm} - k_1 = 60 \text{ cm},$$

továbbá $R = -5$ cm (hiszen a félgömb középpontja a tárgy oldalán található), az (1) és (2) összefüggések szerint

$$\frac{4/3}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{k_2} = \frac{1 - 4/3}{-5 \text{ cm}}, \quad \text{ahonnan} \quad k_2 = 22,5 \text{ cm}.$$





A második leképezés nagyítása (2) alkalmazásával:

$$N_2 = \frac{22,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$$

a) Ezek szerint a félgömb aljától 22,5 cm távolságban elhelyezett ernyőn kapjuk a fényforrás éles képét, ha megfelelő fényrekeszsel biztosítjuk, hogy csak az üvegcső tengelyéhez közeli fénysugarak vegyenek részt a leképezésben.

b) A kép nagyítása: $N = |N_1 \cdot N_2| = \frac{1}{2}$.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

6 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Ludányi Levente és Nguyễn Đứơc Anh Quãn megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 2 dolgozat.

P. 5194. *Tekintsünk két azonos méretű, de a köztük lévő 0,2 m távolsághoz képest kicsiny fémgömböt! A két gömbnek különböző töltése van, és 1,2 N erővel vonzzák egymást. A gömböket összeérintjük, majd visszahelyezzük őket az eredeti helyükre. Azt találjuk, hogy most taszítják egymást, de az erő nagysága az előzővel azonos. Mennyi volt a fémgömbök eredeti töltése?*

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

Megoldás. Ismert adatok: $r = 0,2 \text{ m}$, $F = 1,2 \text{ N}$ és $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

Legyen a fémgömbök kezdeti előjeles töltése Q és q . A gömbök összeérintése után a töltésük kiegyenlítődik, nagyságuk $\frac{Q+q}{2}$ lesz. A Coulomb-féle erőtvény szerint fennáll:

$$(1) \quad k \frac{Qq}{r^2} = -F,$$

illetve

$$(2) \quad k \frac{\left(\frac{Q+q}{2}\right)^2}{r^2} = +F.$$

Az (1) egyenletből kifejezve q -t, és azt (2)-be helyettesítve Q -ra a következő egyenletet kapjuk:

$$Q^4 - 6Q^2 \frac{Fr^2}{k} + \frac{F^2 r^4}{k^2} = 0.$$

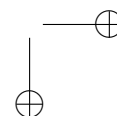
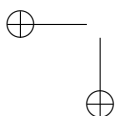
Ebből (a Q^2 -re másodfokú) egyenletből Q -ra négy megoldás adódik:

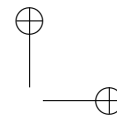
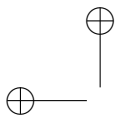
$$Q_1 = 5,575 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

$$Q_2 = -5,575 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

$$Q_3 = 9,566 \cdot 10^{-7} \text{ C},$$

$$Q_4 = -9,566 \cdot 10^{-7} \text{ C},$$





és a másik töltésre:

$$q_1 = -9,566 \cdot 10^{-7} \text{ C},$$

$$q_2 = +9,566 \cdot 10^{-7} \text{ C},$$

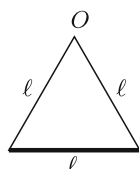
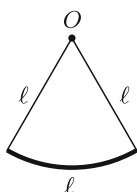
$$q_3 = -5,575 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

$$q_4 = +5,575 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

Látható, hogy (a gömbök felcserélését és a töltések előjelének felcserélését leszámítva) a négy megoldás lényegében megegyezik: az egyik fémgömb kezdeti töltése $5,58 \mu\text{C}$ nagyságú, a másiké pedig (ellenkező előjellel) $0,96 \mu\text{C}$ nagyságú volt.

Dékány Csaba (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 12 dolgozat.



P. 5199. Az ábrán látható ℓ hosszú, körív alakú, vékony (de kellően merev) fémhuzal mindkét végpontját ℓ hosszúságú, igen könnyű fonállal a körív O középpontjához erősítjük. Az így elkészített inga az ábra függőleges síkjában T_1 periódusidejű, kis kitérésű lengéseket végezhet az O pont körül. Ha

a fémhuzalt kiegyenesítjük, az így átalakított test az ábra síkjában T_2 periódusidejű, kis kitérésű lengéseket végezhet. Mekkora a T_2/T_1 arány?

(5 pont)

Közli: *Simon Péter*, Pécs

Megoldás. Mindkét esetben a fizikai inga lengésidejének ismert

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

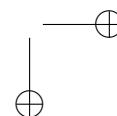
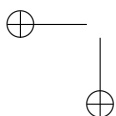
képletét alkalmazhatjuk (amelyben m a huzal tömege, s a tömegközéppont távolsága a felfüggesztési ponttól, Θ pedig az O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték).

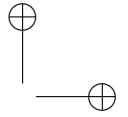
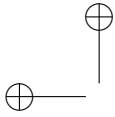
Az első esetben a körívhez tartozó középponti szög

$$\alpha = \frac{\text{ív hossz}}{\text{sugár}} = \frac{\ell}{\ell} = 1 \text{ radián}.$$

Egy ilyen huzaldarab tömegközéppontjának távolsága a tengelyétől (a függvény-táblázatban megtalálható képlet alapján)

$$(1) \quad s_1 = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \ell = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \ell.$$





A körív alakú huzaldarab tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_1 = m\ell^2$ (hiszen minden pontja ℓ távolságra van a forgástengelytől).

A második esetben s_2 egy ℓ oldalhosszú szabályos háromszög magassága, tehát

$$s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell,$$

a kiegyenesített huzal tehetetlenségi nyomatéka pedig (a Steiner-tételt alkalmazva):

$$\Theta_2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 = \frac{5}{6}m\ell^2.$$

Ezek szerint a két periódusidő hányadosa:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_2}{mgs_2}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_1}{mgs_1}}} = \sqrt{\frac{\Theta_2 \cdot s_1}{\Theta_1 \cdot s_2}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{6}m\ell^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \ell}{m\ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell}} = \sqrt{\frac{10 \cdot \sin \frac{1}{2}}{3\sqrt{3}}} = 0,96.$$

Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Az (1) összefüggés *elemi* úton, fizikai megfontolásokat felhasználva is levezethető. Képzeljünk el egy ℓ sugarú kör alakú, ρ vonalmenti tömegsűrűségű, hajlékony kötelet, amely (a súlytalanság állapotában) ω szögsebességgel forog a középpontján átmenő, a síkjára merőleges tengely körül.

Írjuk fel a kötél α nyílásszögű, tehát $\ell\alpha$ hosszúságú és $m = \rho\ell\alpha$ tömegű darabjának mozgásegyenletét! A kötél igen kicsi darabkájának mozgásegyenletéből adódik, hogy a kötelet feszítő érintőirányú erő $F_0 = \rho\omega^2$. Másrészt a körívdarab tömegközéppontjának sugárirányú gyorsulása $a = s_1\omega^2$, így a mozgásegyenlet:

$$F = 2F_0 \sin(\alpha/2) = ma, \quad \text{vagyis} \quad 2\rho\omega^2 \sin(\alpha/2) = \rho\ell\alpha s_1\omega^2,$$

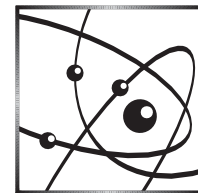
ahonnan a tömegközéppont és a körív középpontjának távolsága:

$$s_1 = \frac{\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)} \ell.$$

(Holics László)

34 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 3 dolgozat.

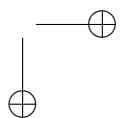
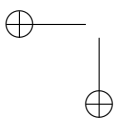
Fizikából kitűzött feladatok



M. 396. Mérjük meg a cellulxszalag vastagságát!

(6 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka





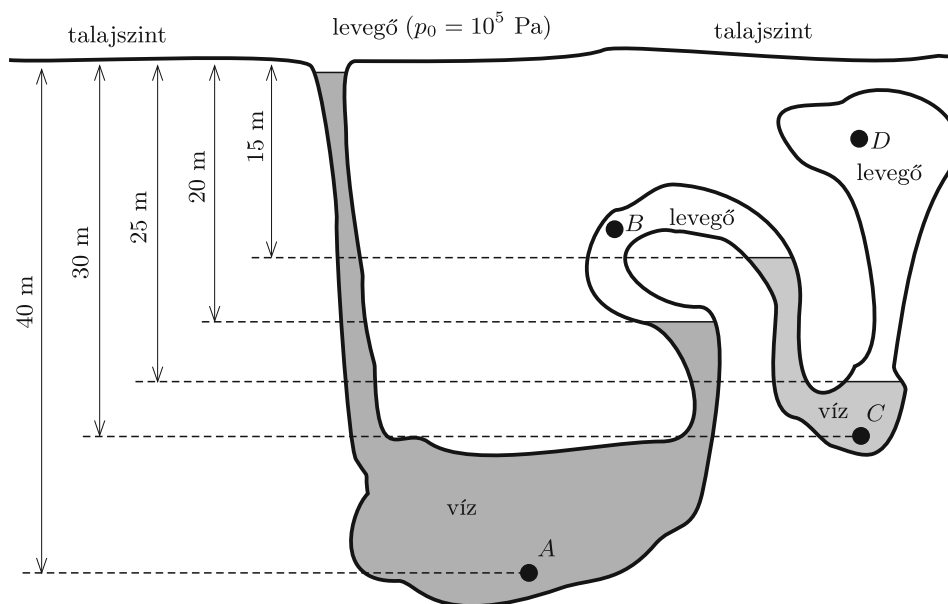
G. 709. Tarzan az íjával célba veszi Maki majmot a fán. Az ellövés pillanatában a nyílvevő éppen a Maki kezében lévő banánra mutat. Ugyanebben a pillanatban a majom ijedtében elejti a banánt. Mit talál el a nyílvevő, ha a légeellenállástól eltekinthetünk?

(3 pont)

G. 710. Anna és Zalán osztálytársak, egy egyenes utcában két különböző házban laknak. Minden reggel ugyanakkor lépnek ki a kapun, és egyenletesen haladva mennek az iskolába. Zalán távolabb lakik az iskolától, de ő a gyorsabb, bizonyos idő alatt utoléri Annát. Egyik alkalommal Anna hamarabb szeretne találkozni Zalánnal, és emiatt egymás felé indulnak el. Ekkor a szokásosnál ötször hamarabb találkoznak. Hányszor gyorsabb Zalán Annánál?

(3 pont)

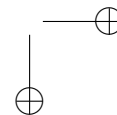
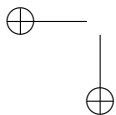
G. 711. Egy zárt, föld alatti üreg egy kürtővel csatlakozik a külvilághoz. Az üreg bizonyos részeiben víz van. Határozzuk meg a nyomást az ábrán feltüntetett A , B , C és D pontokban!



(4 pont)

G. 712. Állítás: Nem túlságosan alacsony hőmérsékleten a fémek moláris hőkapacitása közelítőleg azonos értékű, mégpedig $3R = 24,9 \text{ J}/(\text{mol K})$, ahol R a Regnault-konstans, ismertebb nevén a gázállandó. Vizsgáljuk meg, hány százalékos pontossággal teljesül ez az állítás alumínium, arany, ezüst, réz és vas esetében!

(3 pont)





P. 5230. A rétegelt acél (hibásan damaszkuszi acél) két eltérő széntartalmú réteg összekovácsolásával készül, amit – a leveles tésztához hasonlóan – duplájára nyújtanak, majd félbe hajtanak. Hányszor kellene megismételni ezt a műveletet, hogy egyetlen réteg vastagsága atomi méretű legyen, ha kezdetben az acél vastagsága 3 mm volt?

(3 pont)

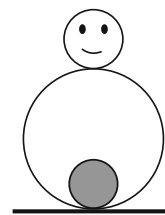
Közli: *Vass Miklós*, Budapest

P. 5231. Egy almát a szára tövével három egyforma hosszú, egyforma teherbírású fonálon tartunk. A fonalak felső végeit vízszintes síkban lassan távolítjuk egymástól úgy, hogy a fonalak páronként mindig ugyanakkora szöget zárnak be egymással. A fonalak akkor szakadnak el, amikor páronként éppen merőlegesek egymásra. Ha két ugyanilyen fonálhoz erősítenénk ugyanezt az almát, majd a fonalak felső végeit ugyanúgy vízszintes síkban távolítanánk egymástól, milyen szöget zárnának be egymással a fonalak, amikor elszakadnának?

(4 pont)

Közli: *Nagy Piroska Mária*, Budapest

P. 5232. Vékony falú, celloidból készült keljfeljancsi alsó gömbjének sugara 3 cm. A játék belsejébe, alul egy 2 cm átmérőjű acélgolyót rögzítettek. A keljfeljancsit lassan kitérítjük úgy, hogy szimmetriatengelye a függőlegessel 30° -os szöget zárjon be. Mekkora lesz a játék szögsebessége abban a pillanatban, amikor a tengelye átlendül a függőleges helyzetben? (A tapadó súrlódás elég nagy, a játék nem csúszik meg a talajon. A gördülő súrlódástól és a közegellenállástól eltekinthetünk.)



(4 pont)

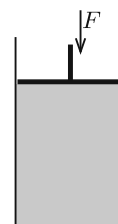
Közli: *Kis Tamás*, Heves

P. 5233. Egy levelibéka egy tőle vízszintesen s távolságra, de h magasságban lévő levélre akar a talajról felugrani. Milyen irányba és mekkora sebességgel kell elrugaszkodnia, hogy a legkevesebb energiára legyen ehhez szüksége?

(5 pont)

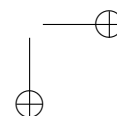
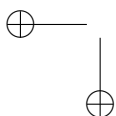
Közli: *Woynarovich Ferenc*, Budapest

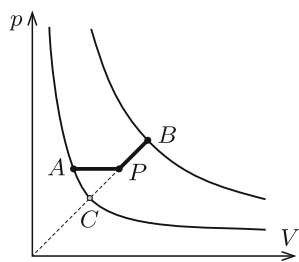
P. 5234. Az *ábra* szerinti, függőleges szimmetriatengelyű, hengeres tartályt felül egy súlytalannak tekinthető dugattyú zár el. A 7 dm^3 térfogatú edényben nincs levegő, csak T hőmérsékletű, telített vízgőzt tartalmaz. Mekkora munkát végzünk, ha a dugattyút lassan addig nyomjuk le, míg az folyadékba nem ütközik? A folyamat során az egész rendszer hőmérséklete állandó. Számítsuk ki és ábrázoljuk a végzett munkát a T hőmérséklet függvényében, ahol $100^\circ\text{C} \leq T \leq 370^\circ\text{C}$. (A telített vízgőz nyomására, sűrűségére és a víz sűrűségére vonatkozó adatokat vegyük a Négyjegyű függvénytáblázatokból!)



(4 pont)

Közli: *Légrádi Imre*, Sopron





P. 5235. $n = 2$ mol anyagmennyiségű, egyatomos ideális gáz az ábrán látható $A \rightarrow P \rightarrow B$ folyamatot végzi. A gáz hőmérséklete a kiinduló állapotban $T_1 = 280$ K, a végállapotban $T_2 = 4T_1$. Az AP szakasz párhuzamos a V tengellyel, a BC szakasz meghosszabbítása átmegy az origón, a P pont pedig a BC szakasz felezőpontja.

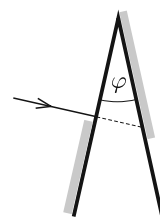
a) Határozzuk meg a gáz hőmérsékletét a P állapotban!

b) Mennyi hőt vesz fel a gáz az $A \rightarrow P \rightarrow B$ folyamatban?

(5 pont)

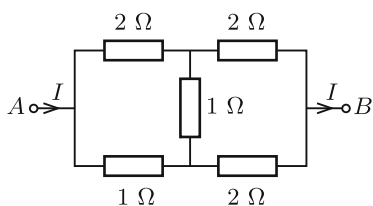
Közli: Kotek László, Pécs

P. 5236. Egy üvegprizma egyik lapjára merőlegesen esik egy fénysugár, amely a prizma másik oldalán, felül még nem tud kilépni, mert az a rész tükröző anyaggal van bevonva. A prizma első oldalát a belépési pont alatt ugyancsak tükröző anyaggal vonták be, ezért a fény ezen a részen sem tud kilépni az üvegből, hanem visszaverődik. Végül a túlsó oldalon kilépő fénysugár a prizma-hoz érkező fénysugár irányához képest 40° -kal térül el. Mekkora a prizma törésszöge, ha az anyagának törésmutatója 1,5?



(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest



P. 5237. Az ábrán látható ellenállásrendszer A pontjában 40 mA erősségű áram folyik be, és a B pontnál folyik ki.

a) Mekkora áram folyik át az egyes ellenállásokon?

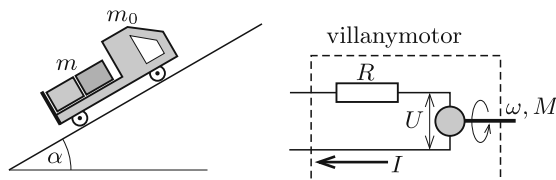
b) Mekkora az egyes ellenállásokra eső elektromos teljesítmény?

c) Mekkora egyetlen ellenállással lehetne helyettesíteni az ellenállásrendszert?

(4 pont)

Közli: Simon Péter, Pécs

P. 5238. Egy m_0 tömegű elektromos játékautó m tömegű teherrel a platóján állandó sebességgel halad felfelé egy α hajlásszögű lejtőn. Az r sugarú kerekeket meghajtó villanymotort állandósult állapotban modellezhetjük egy R ellenállással sorosan kapcsolt olyan áramköri elemmel, amelynek U feszültsége a tengely ω szögsebességével arányos ($U = \gamma\omega$), az I árama pedig a tengelyek által kifejtett M forgatónyomatékkal arányos ($I = M/\gamma$). A kisautó egy olyan teleppel működik, amelynek üresjáratú feszültsége U_0 , belső ellenállása pedig R_b .





Adatok: $m = 300$ g, $\alpha = 30^\circ$, $r = 2$ cm, $\gamma = 1,2$ Vs, $U_0 = 4,5$ V, $R = 0,8$ Ω , $R_b = 1,2$ Ω . (A kerekek és a lejtő közötti tapadási súrlódás elég nagy, így az autó nem csúszik meg.)

a) Mekkora állandósult sebességgel halad a kisautó, ha $m = 600$ g teher van a platóján?

b) Mekkora m teher esetén lesz a legjobb a szállítás hatásfoka? (A hatásfokon a teher emelésére fordított energia és a telep által leadott energia hányadosát értjük.)

(5 pont)

Közli: *Olosz Balázs*, Pécs

P. 5239. Egy vékony, elhanyagolható tömegű, 21 cm hosszú, merev rúd végein egy-egy azonos tömegű, pontszerűnek tekinthető, kicsiny test van. Ezt a rudat a közepénél fogva felfüggesztjük egy olyan vékony, rugalmas szálra, hogy az így kapott torziós inga kis kitérések esetén mérhető lengésideje viszonylag nagy, 600 másodperc legyen. Ezután az ingát belógatjuk két, egyenként 600 kg tömegű, nagy ólomgolyó közé, középre. Az ólomgolyók középpontjai egymástól 70 cm-re vannak. Mennyi lesz az inga lengésideje kis kitérések esetén, ha az ingarúd kezdetben

a) a két golyó középpontját összekötő vízszintes szakaszon van;

b) az előbbi esetre merőleges helyzetű?

Megjegyzés. Hasonló módon határozta meg Eötvös Loránd a gravitációs állandót, két, mintegy 600 kg tömegű ólomhasáb és egy hasonlóan nagy lengésidejű torziós inga segítségével. A feladatban a gravitációs állandó ismert értékének felhasználásával kell a kétféle lengésidejét kiszámítani. (Lásd még a P. 5166. feladat megoldását a KöMaL 2020. évi márciusi számában.)

(6 pont)

Közli: *Radnai Gyula*, Budapest



Beküldési határidő: 2020. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

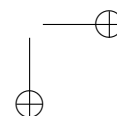
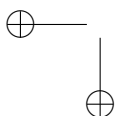
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

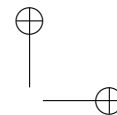
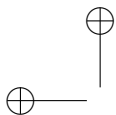


MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 5. May 2020)

Problems in Mathematics

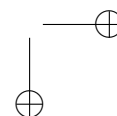
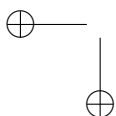
New exercises for practice – competition C (see page 288): **Exercises up to grade 10: C. 1609.** Solve the following simultaneous equations over the set of real numbers: $x + y + \frac{x}{y} = 19$, $\frac{x(x+y)}{y} = 60$. **C. 1610.** In a unit circle, the diameter AB and





the chord AC enclose a 30° angle. Let B' denote the reflection of B about the point C . Determine the distances between B and the points where the tangents drawn from B' to the circle intersect the line AB . **Exercises for everyone: C. 1611.** Some numbers are selected from the set of the first 21 positive integers such that the absolute values of the differences of all pairs of selected numbers should be different. What is the largest possible number of different absolute values obtained? Give an example of a case when this occurs. **C. 1612.** The convex heptagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ has a circumscribed circle centred at an interior point of the heptagon. Prove that the sum of the interior angles at the vertices A_1 , A_3 and A_5 is less than 450° . **C. 1613.** There were n teams participating in a basketball championship. Every team played every other team exactly once, and there was no draw. At the end of the championship, the i th team had x_i games won and y_i games lost ($i = 1, 2, \dots, n$). Prove that $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$. (*Croatian problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1614.** 12 round muffins of diameter 9 cm are arranged along the edge of a round tray of radius 30 cm such that they all touch the edge of the tray, and the neighboring muffins are separated by the same distance from each other. What is this equal distance? **C. 1615.** Julie's grandmother bakes cookies every Monday. She always selects out of her infinite number of recipes at random. 60% of her recipes contain chocolate chips. Julie is quite picky about cookies: she only likes 90% of grandma's chocolate chip cookies, and only 30% of the other kinds of cookies. On a special Monday, grandmother is making two different kinds of cookies. Find the probability that Julie will like exactly one of them.

New exercises – competition B (see page 289): **B. 5102.** There are n distinct points in the plane, which are not all collinear. Show that there exists a closed polygon with these vertices that does not cut through itself. (A polygon is allowed to have angles equal to 180° , too.) (3 points) **B. 5103.** Let a, b, c, x, y and z be positive numbers that satisfy the equalities $a^2 + b^2 = c^2$ and $x^2 + y^2 = z^2$. Prove that $(a+x)^2 + (b+y)^2 \leq (c+z)^2$, and determine the condition for equality. (3 points) (Proposed by *S. Kiss*, Nyíregyháza) **B. 5104.** Let A_1, B_1 and C_1 denote the points of tangency of the incircle of triangle ABC on the sides, and let R and r be the radii of the circumscribed and inscribed circles, respectively. Prove that the ratio of the areas of triangles $A_1B_1C_1$ and ABC is $r : 2R$. (4 points) **B. 5105.** Let n denote a positive integer. Determine the smallest number of colours k that are sufficient for colouring the edges of any directed simple graph of n vertices without producing a circuit of the same colour. (4 points) (Proposed by *K. Szabó*, 11th grade student of Fazekas Mihály Primary and Secondary School and Training Centre, Budapest) **B. 5106.** The numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ are written on a blackboard ($n \geq 2$), and the following procedure is repeated: two numbers are selected (x and y) from the board, erased, and replaced with the numbers $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ and $x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Prove that there will never be a number less than 1.442 written on the board. (5 points) **B. 5107.** The diagonals of a cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect at F , the lines of sides AB and CD intersect at E , the midpoint of line segment EF is G , the midpoint of line segment BF is H , and the midpoint of side BC is I . Show that $\angle GFD = \angle GIH$. (6 points) **B. 5108.** The points $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$, in this order, lie on the same line. On one side of this line, perpendicular rays b_i are drawn from the points B_i , and semicircles c_i are drawn with diameters AC_i ($i = 1, 2, 3$), as shown in the figure. Prove that if the region bounded by b_1, c_1, b_2, c_2 and the region bounded by b_2, c_2, b_3, c_3 both have inscribed circles then the region bounded by b_1, c_1, b_3, c_3 also has an inscribed circle. (5 points) **B. 5109.** Let $x_1 = 2, x_2 = 7, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$).





Is there a perfect square in this sequence? (6 points) (Proposed by *G. Stoica*, Saint John, Canada)

New problems – competition A (see page 291): **A. 777.** A finite graph $G(V, E)$ on n points is drawn in the plane. For an edge e of the graph let $x(e)$ denote the number of edges that cross over edge e . Prove that $\sum_{e \in E} \frac{1}{x(e)+1} \leq 3n - 6$. (Submitted by: *Dömötör Pálvölgyi*, Budapest) **A. 778.** Find all square-free integers d for which there exist positive integers x, y and n satisfying $x^2 + dy^2 = 2^n$. (Submitted by: *Kada Williams*, Cambridge) **A. 779.** Two circles are given in the plane, Ω and inside it ω . The center of ω is I . P is a point moving on Ω . The second intersection of the tangents from P to ω and circle Ω are Q and R . The second intersection of circle IQR and lines PI, PQ and PR are J, S and T , respectively. The reflection of point J across line ST is K . Prove that lines PK are concurrent.

Problems in Physics

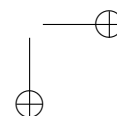
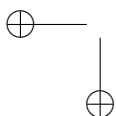
(see page 313)

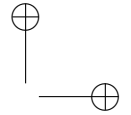
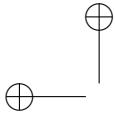
M. 396. Measure the thickness of a piece of adhesive tape.

G. 709. Tarzan targets monkey Maki on a tree. At the moment when the arrow is shot the arrow is aimed at the banana in Maki's hand. At the same moment the frightened monkey drops the banana. What will the arrow hit, if air resistance can be neglected?

G. 710. Anna and Tom are classmates, and they live in a straight street in different houses. Every day they start walking to school at the same time at uniform speeds. Tom lives further from the school, but he is faster, in some time he overtakes Anna. One day Anna would like to meet Tom earlier, so she begins to walk towards Tom. This time they meet five times earlier than they meet usually. By what factor is Tom's speed greater than Anna's speed? **G. 711.** A closed underground chamber is connected to the outside world with a chimney. There is water in some parts of the chamber. Determine the pressure at the points A, B, C and D shown in the figure. **G. 712.** Statement: At not too small temperature values the molar heat capacity of metals is the same, approximately $3R = 24.9 \text{ J}/(\text{mol K})$, where R is the so called Regnault constant or universal gas constant. Investigate with what percentage accuracy this statement is satisfied for aluminium, gold, silver, copper and iron.

P. 5230. Laminated steel (wrongly called Damascus steel) is made by forging two layers of steel with different carbon content, which like puff pastry, is stretched to double its area and then folded in half. How many times would this process have to be repeated in order to make the thickness of a single layer atomic in size if initially the thickness of the steel was 3 mm? **P. 5231.** An apple is held at its stem on three threads of equal length. The threads are alike, they break at the same load. The upper ends of the threads are slowly separated from each other in a horizontal plane so that the angle between any two pairs of threads is the same. The threads are torn when they are (pairwise) just perpendicular to each other. If we were to attach the same apple to two of the same threads and then separate the upper ends of the threads in the same horizontal plane, what angle would the threads make with each other when they tore apart? **P. 5232.** The radius of the bottom sphere of a thin-walled, celluloid roly-poly toy is 3 cm. Inside the toy, a 2 cm diameter steel ball was fixed at the bottom. The roly-poly toy is slowly deflected such that the angle between the vertical and its axis of symmetry is 30° . What





will the angular velocity of the roly-poly toy be at the moment when its axis swings over the vertical position? (Static friction is high enough, the toy does not slip on the ground. Rolling friction and air resistance can be neglected.) **P. 5233.** A leaf frog wants to jump from the ground onto a leaf, which is horizontally at a distance of s and which is at a height of h . In what direction and at what speed does it have to jump in order to do this with the least energy? **P. 5234.** A cylindrical container with a vertical axis of symmetry is closed at the top by a piston which is considered to be weightless, as shown in the *figure*. The container of volume 7 dm^3 contains no air, only saturated water vapour at a temperature of T . How much work is done by pushing down the piston slowly until it reaches the level of the water in the container? During the process, the temperature of the entire system is constant. Calculate and plot the work done as a function of the temperature T , where $100^\circ\text{C} \leq T \leq 370^\circ\text{C}$. (Data on saturated water vapour pressure, density and water density should be taken from tables.) **P. 5235.** A sample of monatomic ideal gas of $n = 2$ moles is taken through the process $A \rightarrow P \rightarrow B$ shown in the *figure*. The temperature of the gas in the initial state is $T_1 = 280 \text{ K}$, and in the final state $T_2 = 4T_1$. Line segment AP is parallel to axis V , the extension of line segment BC passes through the origin, and point P is the midpoint of the line segment BC . *a)* Determine the temperature of the gas at state P . *b)* How much heat is absorbed by the gas during process $A \rightarrow P \rightarrow B$? **P. 5236.** A beam of light falls perpendicularly to one side of a glass prism, and it cannot exit at the top part of the other side of the prism, because that part is coated with some reflective material. Below the point of entry the first side of the prism was also coated with a reflective material, so that light cannot escape from the glass in this part either, but is reflected. Finally, the light beam exits the prism on the other side such that its direction of travel is deviated by 40° with respect to the direction of the light beam entering into the prism. What is the angle of the prism φ if the refractive index of its material is 1.5? **P. 5237.** A current of 40 mA flows in at point A of the resistor system shown in the *figure* and flows out at point B . *a)* What is the current through each of the resistors in the system? *b)* How much power is dissipated by each resistor? *c)* What is the resistance of that single resistor with which we can replace the whole system? **P. 5238.** An electric toy car with a mass of m_0 , and with a load of mass m on it, moves upwards at a constant speed along a slope of elevation angle of α . The electric motor, which drives the wheels of radius r , can be modelled, when it operates in a steady rate, with a resistor of resistance R which is connected in series with a circuit element, whose voltage U is proportional to the angular velocity of the axle ω ($U = \gamma\omega$). The current I that flows through it is proportional to the torque M exerted by the axles ($I = M/\gamma$). The toy car is powered by a battery of e.m.f. U_0 and internal resistance of R_b . *Data:* $m = 300 \text{ g}$, $\alpha = 30^\circ$, $r = 2 \text{ cm}$, $\gamma = 1.2 \text{ Vs}$, $U_0 = 4.5 \text{ V}$, $R = 0.8 \Omega$, $R_b = 1.2 \Omega$. (The coefficient of static friction between the wheels and the slope is high enough, so the car does not slip.) *a)* At what constant speed does the toy car travel if the mass of the load on it is $m = 600 \text{ g}$? *b)* At what load of m will efficiency of the transport of the load be the best? (Efficiency is the ratio of the energy used to lift the load to the energy delivered by the battery.) **P. 5239.** At each end of a thin, 21 cm long rigid rod of negligible mass, there is a small point-like body of the same mass. This rod is suspended in the middle by a thin, flexible fibre so that the obtained torsional pendulum has a relatively long period of 600 seconds, which can be measured at small deflections. The pendulum is then hung between two large lead balls, each weighing 600 kg, in the middle. The centres of the lead balls are 70 cm apart. What will the period of the pendulum for small deviations be if the pendulum rod initially lies *a)* along the horizontal line segment connecting the centres of the two balls; *b)* perpendicularly to the position described in case *a)*?

