C. 1603. Az ABC egyenlőszárú háromszög A csúcsából induló magasságvonal a BC szárt T-ben metszi, a magasságpontot jelölje M, a beírt körének középpontját pedig O. Bizonyítsuk be, hogy ha az OT egyenes párhuzamos az AB alappal, akkor $MC = 2AM$.

Feladatok mindenkinek

C. 1604. A mezőgazdasági kiállításon és vásáron egy termelő az általa előállított vetőmaggal jelentkezett. Összesen 1225 csomagot hozott: 1 db 1 grammos, 2 db 2 grammos, 3 db 3 grammos, $\ldots$, k db k grammos csomagot – 1-től k-ig minden pozitív egész szám előfordul. Átlagosan hány gramm vetőmag volt egy csomagban?

C. 1605. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ABM háromszög területe nagyobb a CDM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, CD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint 1.

C. 1606. Egy téglatest két oldallapjának területe 40, illetve 56 területegység. A testátló hossza $\sqrt{138}$ egység. Mekkora lehet a téglatest felszíne, illetve térfogata?

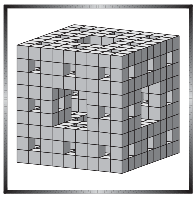
Kiss Sándor (Nyíregyháza)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1607. A 4 és a 9 közé leírunk néhány 4-est, majd mellé még ugyanannyi 8-ast (például 4489). Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szám négyzetszám.

C. 1608. Jelmezbálra szeretnénk elkészíteni kartonból egy vietnámi kalapot. A kalap egy 97,18° nyílásszögű egyenes körkúp, amelynek alkotója 28 cm hosszú. Elkészíthető-e egy ilyen méretű kalap a kereskedelemben kapható 50×70 cm-es kartonpapírból?

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5094–5101.)

B. 5094. Igazoljuk, hogy ha két derékszögű háromszög területe és kerülete megegyezik, akkor egybevágók.

(*3 pont*) *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5095. Legyenek a, b, c nullától különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ és $\frac{ca}{b}$ számok összege egész, akkor külön-külön is egészek.

(*3 pont*) *George Stoica* (Saint John, Kanada)

B. 5096. Az ABC egységnyi oldalú szabályos háromszögben legyen P a beírható körvonal tetszőleges pontja. Jelölje a P pont merőleges vetületét a BC, AC és AB oldalakra rendre D, E, illetve F. Igazoljuk, hogy a DEF háromszög területe P választásától független állandó.

(*4 pont*)

B. 5097. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok szorzata 1. Igazoljuk, hogy

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \geqslant x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3.$$

(*4 pont*) *Dinu Ovidiu-Gabriel* (Bălceşti, Románia)

B. 5098. Kezdő és Második a következő játékot játsszák:

Kezdő gondol egy 2020-nál nem nagyobb pozitív egészre, amit Második úgy szeretne kitalálni, hogy mindig egy konkrét számra kérdez rá.

Kezdő lehetséges válaszai Második kérdéseire: „Kisebb számra gondoltam.”; „Eltaláltad.”; „Nagyobb számra gondoltam.”

Ha a válasz „Kisebb számra gondoltam”, vagy „Eltaláltad”, akkor Második 10 forintot fizet Kezdőnek, míg abban az esetben, ha a válasz „Nagyobb számra gondoltam”, akkor 20 forintot fizet.

Mennyi az a legkisebb összeg, amennyiért Második biztosan ki tudja találni Kezdő számát és hogyan kell ehhez játszania?

(A játék az első „Eltaláltad” válaszig tart, akkor is, ha a legutolsó kérdés előtt Második már tudja mi a gondolt szám.)

(*5 pont*)

B. 5099. Az $ABCD$ rombusz A-nál lévő szöge $60°$. A rombuszba olyan ellipszist írtunk, amelynek tengelyei a rombusz átlói, továbbá az AB és AD oldalakat az A-hoz, a BC és CD oldalakat a C-hez közelebbi negyedelőpontjaikban érinti. Legyen P az ellipszis egy mozgó pontja. Metsszük el a rombusz mindkét középvonalát a P ponton keresztül húzott, a másik középvonallal párhuzamos egyenessel; jelöljük az így kapott metszéspontokat Q-val, illetve R-rel. Mutassuk meg, hogy a QR szakasz hossza nem függ a P pont helyzetétől.

(*5 pont*)

B. 5100. Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melynek összege osztható $(1+2+\ldots+n)$-nel.

(*6 pont*) *Kovács Benedek* és *Várkonyi Zsombor* ötletéből

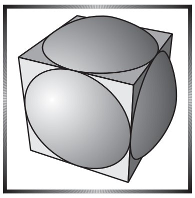
B. 5101. Adott egy $ABCDO$ négyoldalú gúla, és az $ABCD$ alaplap belsejében egy P pont. Egy O-ra nem illeszkedő sík az OA, OB, OC, OD és OP egyeneseket rendre az A', B', C', D', illetve P' pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{t_{PAB} \cdot t_{PCD}}{t_{PBC} \cdot t_{PDA}} = \frac{t_{P'A'B'} \cdot t_{P'C'D'}}{t_{P'B'C'} \cdot t_{P'D'A'}}.$$

(t_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.)

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (775–776.)

A. 775. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ olyan, hogy H bármely pontját H bármely másik pontjára tükrözve ismét H-beli pontot kapunk. Igazoljuk, hogy H sűrű $\mathbb{R}^3$-ban, vagy vannak egymástól egyenlő távolságra lévő párhuzamos síkok, amelyek lefedik H-t.

Javasolta: *Kurusa Árpád* (Szeged) és *Totik Vilmos* (Szeged)

A. 776. Legyen $k > 1$ egy rögzített páratlan szám, és ha n nemnegatív egész, legyen

$$f_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ k \mid n-2i}} \binom{n}{i}.$$

Bizonyítsuk be, hogy f_n kielégíti a következő rekurziót:

$$f_n^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i f_{n-i}.$$

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518