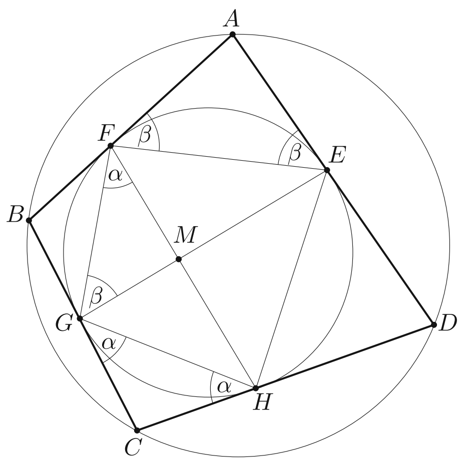
III. Nézzük az $n=k+1$ esetet, induljunk ki a bal oldalból:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2 + &2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\\
&=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2)=\\
&=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=(k+1)(k+2)\tfrac{k+3}{3}=\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},
\end{aligned}$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.



b) Húzzuk meg a FG, GH, HE és EF szakaszokat. $HFG\sphericalangle=CGH\sphericalangle=CHG\sphericalangle=\alpha$, mivel mind a GH szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $GCH\sphericalangle=180^\circ-2\alpha$.

$FEA\sphericalangle=EFA\sphericalangle=FGE\sphericalangle=\beta$, mivel mind az FE szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $EAF\sphericalangle=180^\circ-2\beta$.

Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a szemben fekvő szögeinek összege 180°, tehát

$$180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=180^\circ,$$

$2\alpha+2\beta=180^\circ$, $\alpha+\beta=90^\circ$. Innen $GMF\sphericalangle=180^\circ-\alpha-\beta=90^\circ$ és ezt kellett bizonyítani.

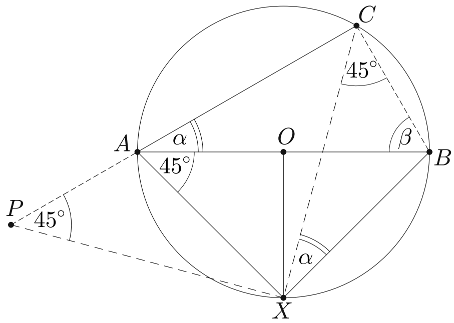
Szoldatics József
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5023. *Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle=90^\circ$ és $AC>BC$. A háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja X. A CX-re X-ben állított merőleges a CA egyenest a P pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AP=BC$.*

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az XAP és XBC háromszögek egybevágók. Ebből azonnal adódik, hogy $BC=AP$. Mivel $BXA\sphericalangle = CXP\sphericalangle = 90^\circ$, ezért mindkettőből kivonva a $CXA\sphericalangle$ szöget, látjuk, hogy $BXC\sphericalangle = AXP\sphericalangle$. Az X pont az AB ív felezőpontja, ezért $XA=XB$. Végül felhasználva, hogy $BCAX$ húrnégyszög:



$$XBC\sphericalangle = 180^\circ - XAC\sphericalangle = XAP\sphericalangle.$$

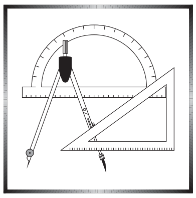
A két háromszögnek egy-egy oldala és a rajta fekvő szögek megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó. Így oldalaik páronként egyforma hosszúságúak, vagyis $BC=AP$.

Vu Phuong Nam (High School for The Gifted, VNU-HCM, Ho Si Minh-város, 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két háromszög egybevágóságának bizonyításához az is felhasználható, hogy az ábrán jelzett szögek $BCX\sphericalangle = XCA\sphericalangle = BAX\sphericalangle = APX\sphericalangle = 45^\circ$.

Összesen 74 dolgozat érkezett. 3 pontos 52, 2 pontos 19 tanuló dolgozata. 1 pontot 3 tanuló kapott.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1602–1608.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1602. Két tizedikes és két tizenegyedikes diák nekiült az áprilisi KöMaL C feladatok megoldásának*. Egy óra elteltével azt vették észre, hogy minden feladatra pontosan egyvalaki tudott megoldást adni közülük, valamint, hogy mindenki megoldott legalább egy feladatot. Hányféle felosztásban dolgozhattak a példákon, ha mindenki csak a saját korosztályának megfelelő feladatokkal foglalkozott? (Különbözőnek tekintünk két felosztást, ha van legalább egy feladat, amit más old meg.)

*Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást.