b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (*3 pont*)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszáma 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezdéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (*6 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2020/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:*

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y} = \frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) A gyökjel alatti mennyiség mindig pozitív. Az egyenlet bal oldala nem lehet negatív, azaz

$$x^2 - 14 \geqslant 0; \qquad x^2 \geqslant 14.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz legyen

$$a = \sqrt{x^2+1} \quad (\geqslant 0).$$

Ekkor az egyenletünk az

$$x^2 + 1 - 15 = a^2 - 15 = 2a, \qquad a^2 - 2a - 15 = 0$$

alakot veszi fel. Ennek megoldásai $a_1 = 5$, $a_2 = -3$. Ebből csak az a_1 jöhet számításba az előjel miatt, azaz

$$a_1 = 5 = \sqrt{x^2+1}, \qquad 25 = x^2 + 1, \qquad x^2 = 24, \qquad x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Ha $x=0$ lenne, akkor az egyenletek bal oldalán nulla állna, míg jobb oldalán nem, tehát $x\neq 0$. Ugyanezen gondolat alapján kapjuk, hogy $y\neq 0$. A megoldhatóság feltétele, hogy $2x^2+y\neq 0$ és $4x^2+3y\neq 0$ legyen. Vegyük az egyenletek reciprokait – az előzőek alapján megtehetjük – és rendezzük:

$$\frac{2x^2+y}{2x^2y}=2, \qquad \frac{4x^2+3y}{12x^2y}=5,$$

$$\frac{2x^2}{2x^2y}+\frac{y}{2x^2y}=2, \qquad \frac{4x^2}{12x^2y}+\frac{3y}{12x^2y}=5,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{2x^2}=2. \qquad \frac{1}{3y}+\frac{1}{4x^2}=5.$$

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a=\frac{1}{x^2},\quad b=\frac{1}{y}.$$

Az egyenletrendszer az

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a+b=2 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b=5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a+2b=4 \\ 3a+4b=60 \end{cases}$$

alakot nyeri el. Itt a második egyenletből az első kétszeresét levonva kapjuk, hogy $a=52$ és $b=-24$; azaz

$$a=52=\frac{1}{x^2},\qquad x^2=\frac{1}{52},\qquad b=-24=\frac{1}{y},\qquad y=-\frac{1}{24},$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{52}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{13}}.$$

A kapott gyökök $\left(\frac{1}{2\sqrt{13}};-\frac{1}{24}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2\sqrt{13}};-\frac{1}{24}\right)$, az ellenőrzés mindkettőt jónak találja.

2. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$4^x+4\cdot 2^{-x}=5. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\sin^6 x+\cos^6 x=-2+3\cos 2x. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) Vezessünk be új ismeretlent, legyen $2^x=a$ (>0). Így

$$a^2+\frac{4}{a}=5,\qquad a^3-5a+4=0,\qquad a^3-1-5a+5=0,$$

$$(a-1)(a^2+a+1)-5(a-1)=0,\qquad (a-1)(a^2+a-4)=0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$$a-1=0, \qquad a^2+a-4=0,$$

$$a_1=1, \qquad a_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$a_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ (<0),$$

$$2^x=1, \qquad 2^x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$x_1=0, \qquad x_2=\log_2\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

a_3 nem ad megoldást, mivel negatív.

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Használjuk fel, hogy $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ és $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ igaz minden valós számra:

$$\left(1-\cos^2 x\right)^3+\cos^6 x=-2+3(2\cos^2 x-1),$$

$$1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x=-2+6\cos^2 x-3,$$

$$3\cos^4 x-9\cos^2 x+6=0,$$

$$\cos^4 x-3\cos^2 x+2=0.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz $a=\cos^2 x$, ekkor egyenletünk az

$$a^2-3a+2=0$$

alakot veszi fel, aminek a gyökei: $a_1=2$ és $a_2=1$. Ekkor

$$a_1=2=\cos^2 x, \qquad a_2=1=\cos^2 x,$$

$$\cos x=\pm\sqrt{2}, \qquad \cos x=\pm 1,$$

ami nem lehetséges, $\qquad x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

3. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}. \qquad (8\ pont)$$

b) *Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva* 15 *esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt”, azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden* 60-*as sorozat esetén* 15 *lett a kapott érték* (*azaz a várható érték* 15)? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet értelmezési tartományát vizsgálva:

$$\begin{array}{llll} \log_4(x^2-6x+13)\neq 0, & x^2-6x+13>0, & \log_2(x+1)\neq 0, & x+1>0,\\ x^2-6x+12\neq 0, & (x-3)^2+4>0, & x\neq 0, & x>-1,\\ (x-3)^2+3\neq 0. & & & \end{array}$$

Összefoglalva: $-1<x$ és $x\neq 0$.

I. eset: $-1<x<0$. Ekkor az egyenlet jobb oldala negatív, hiszen $x<0$ esetén $\log_2(x+1)<0$, és így

$$\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2(x+1)^2}{2}=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{2\log_2(x+1)}{2}=$$
$$=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)=\log_2(x+1)\left(\frac{4}{\log_2^2(x+1)}+1\right)$$

is negatív.

A bal oldal pozitív, hiszen

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4\geqslant 4,$$
$$\log_4(x^2-6x+13)\geqslant\log_4 4=1,$$
$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}>1.$$

Ebben az intervallumban tehát nincs megoldás.

II. eset: $0<x$. Az egyenlet bal oldalának értékkészletét vizsgálva:

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4\geqslant 4,$$
$$\log_4(x^2-6x+13)\geqslant 1,$$
$$\frac{1}{\log_4(x^2-6x+13)}\leqslant 1,$$
$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}\leqslant 4.$$

Az egyenlet jobb oldalát vizsgálva, közben használva egy számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget a pozitív $\log_2(x+1)$ kifejezésre:

$$\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2(x+1)^2}{2}=$$
$$=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{\log_2(x+1)}\cdot\log_2(x+1)}=2\sqrt{4}=4,$$

azaz

$$\frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2{(x+1)}^2}{2} \geqslant 4.$$

Kaptuk, hogy az egyenlet bal oldala 4 vagy kisebb, a jobb oldala 4 vagy nagyobb. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha mind a két oldal 4, ekkor

$$\begin{aligned} x^2-6x+13=(x-3)^2+4=4, &\qquad \frac{4}{\log_2(x+1)}=\log_2(x+1),\\ (x-3)^2=0, &\qquad \log_2^2(x+1)=4,\\ x_1=3, &\qquad \log_2(x+1)=\pm 2,\\ &\qquad x_2=3,\ x_3=-\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Mindkét követelmény csak az $x=3$ esetén teljesül, így ez az egyenlet megoldása.

A kapott gyököt az ellenőrzés jónak találja.

b) Legyen p annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk, ekkor a többi dobásra $1-p$ adódik. Annak a valószínűsége, hogy 60 dobásból 15 esetben kapunk hatost:

$$P(15 \text{ a } 60\text{-ból}) = \binom{60}{15} p^{15}(1-p)^{45}.$$

Tekinthetjük ezt egy binomiális eloszlásnak.

A várható érték np, ami az adott esetben $60\cdot p=15$, $p=\frac{1}{4}$. Ez az elvi $\frac{1}{6}$ értéktől erős eltérést mutat. Mindenképpen igazolja a gyanút, hogy „cinkelt” a kocka.

4. *a*) *Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre* 1*-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege* 7*. Mennyi a számtani sorozat* 1010*-edik eleme?* (*6 pont*)

b) *Adott a következő sorozat:*

$$a_1=1; \qquad a_{n+1}=3\cdot a_n+1\ (n\geqslant 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020*-adik tagját.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a számtani sorozat első elemét a-val és a differenciáját d-vel. Ekkor az első négy eleme rendre $a_1=a$; $a_2=a+d$; $a_2=a+2d$; $a_4=a+3d$. Az első, második és negyedik elemhez 1-et adva egy mértani sorozat egymás utáni három elemét kapjuk, amelyekre igaz, hogy a középső elem négyzete a két szélső szorzata, azaz:

$$\begin{gathered}(a+d+1)^2=(a+1)(a+3d+1),\\ a^2+d^2+1+2a+2d+2ad=a^2+2a+1+3ad+3d,\\ d^2-ad-d=0,\\ d(d-a-1)=0.\end{gathered}$$

Mivel a sorozat nem állandó, ezért $d \neq 0$, így $d = a+1$. A számtani sorozat: $a_1 = a$; $a_2 = a + d = 2a + 1$; $a_3 = 3a + 2$; $a_4 = 4a + 3$. Az elemekhez egyet hozzáadva:

$$a_1 = a + 1; \quad a_2 = 2a + 2; \quad a_3 = 3a + 3; \quad a_4 = 4a + 4.$$

Ezek közül az első, második és negyedik tényleg egy mértani sorozat elemei, melynek a hányadosa $q = 2$.

Az első, második és harmadik elem összege 7 a feladat szerint, tehát

$$\frac{a+1}{2} + (a+1) + 2(a+1) = 7, \qquad (a+1) \cdot \frac{7}{2} = 7, \qquad a = 1.$$

Ekkor $d = 2$, a kezdeti számtani sorozat 1; 3; 5; 7. Az elemekhez egyet adva a 2; 4; 6; 8 számokat kapjuk és a 2; 4; 8 tényleg egy mértani sorozat elemei. A 2 előtti elem 1, és az első három összege $1 + 2 + 4 = 7$.

A számtani sorozat 1010-edik eleme: $a_{1010} = 1 + 1009 \cdot 2 = 2019$.

b) I. megoldás. Az elemeket kiszámolva kapjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Azt vehetjük észre, hogy ha a sorozat elemeit megszorozzuk 2-vel:

$$2 \cdot a_1 = 2; \quad 2 \cdot a_2 = 8; \quad 2 \cdot a_3 = 26; \quad 2 \cdot a_4 = 80; \quad 2 \cdot a_5 = 242,$$

akkor mindig egy három hatványnál eggyel kisebb számot kapunk. Tehát az a sejtés, hogy $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Alkalmazva a képzési szabályt:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

azaz igaz volt sejtésünk. Így a keresett elem:

$$a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}.$$

II. megoldás. Alakítsuk át az összefüggést:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1, \qquad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot a_n + \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_n + \frac{1}{2}\right).$$

Ezt felírva n-től 2-ig:

$$a_n + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-1} + \frac{1}{2}\right), \qquad a_{n-1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$a_{n-2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-3} + \frac{1}{2}\right), \qquad \ldots \qquad a_2 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2}\right),$$

majd összeszorozva

$$a_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2}\right) = 3^{n-1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^n, \qquad a_n = \frac{3^n - 1}{2},$$

és innen

$$a_{2020} = \frac{3^{2020}-1}{2}.$$

III. megoldás (vázlat/ötlet). Az elemeket kiszámolva $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Észrevehető, hogy a sorozat elemeinek különbsége

$$a_2 - a_1 = 3; \quad a_3 - a_2 = 9; \quad a_4 - a_3 = 27; \quad a_5 - a_4 = 81,$$

vagyis minden különbség az előző különbség háromszorosa, ami adódik az

$$\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1 \\ a_{n-1} = 3 \cdot a_{n-2} + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n - a_{n-1} = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3(a_{n-1} - a_{n-2})$$

átalakításból is. Innen az elemek:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1+3, \qquad a_3 = 1+3+3^2, \qquad a_4 = 1+3+3^2+3^3, \quad \ldots$$
$$a_n = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1},$$

és adódik a zárt alak.

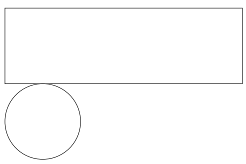
II. rész

5. *a) Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy*

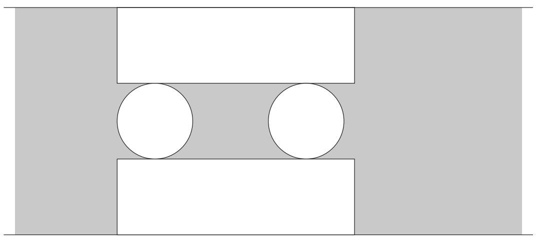
$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} \leqslant 1.$$

Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot? (*9 pont*)

b) Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az 1. ábrán *látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.*



1. ábra



2. ábra

A kivágást egy 30 cm-*es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy* 2 *ilyen mintát fordítunk egymással szembe a* 2. ábra *szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A nevező biztosan pozitív, hiszen $a^2+b^2+2 \geqslant 2 > 0$. Nézzük a dupla egyenlőtlenség bal oldalát. A vizsgálandó kifejezés számlálója és nevezője is pozitív, így maga a tört is.

Legyen a kicsi és $b = n$ nagy szám. Ekkor

$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} = \frac{(a+1)(n+1)}{a^2+n^2+2} < \frac{2\cdot(n+1)}{n^2-1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{2}{n-1},$$

$$\frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} < \frac{2}{b-1}, \qquad 0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} < \frac{2}{b-1},$$

ami azt jelenti, hogy a tört akármilyen kicsi tud lenni, így a bal oldalon nem lehet nulla helyett nagyobb számot írni. Egyenlőség semmilyen a, b érték esetén nem teljesül.

Rendezzük az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &\leqslant 1,\\
(a+1)(b+1) &\leqslant a^2+b^2+2,\\
ab+a+b+1 &\leqslant a^2+b^2+2,\\
ab+a+b &\leqslant a^2+b^2+1,\\
2a+2b+2ab &\leqslant 2a^2+2b^2+2,\\
0 &\leqslant a^2-2a+1+b^2-2b+1+a^2-2ab+b^2,\\
0 &\leqslant (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2.
\end{aligned}$$

Az utolsó sor biztosan igaz, hiszen három szám négyzetének összege nem lehet negatív. Mivel a lépések megfordíthatóak, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha egyidejűleg mind a három négyzetszám nulla, azaz $a = b = 1$.

b) Legyen a kivágandó körlemez sugara r, ekkor a fémdoboz magassága

$$m = \frac{30-2r}{2} = 15 - r$$

lesz. A térfogata $V = r^2 m\pi = r^2(15-r)\pi$, ahol $0 \leqslant r \leqslant 15$.

Tekintsük az $f:\ [0;15] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2(15-x)$ függvényt. Ennek keressük a maximumát. Egy zárt intervallumon folytonos függvénynek van szélsőértéke. Mivel $f(0) = f(15) = 0$, ezért a maximumát az intervallum belső pontjában veszi fel.

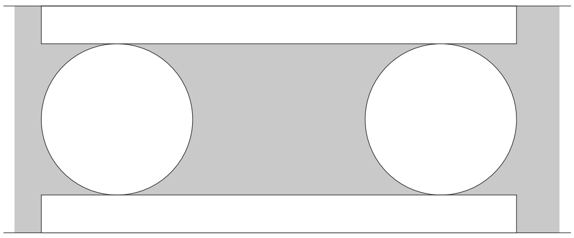
$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2(15-x) = 15x^2 - x^3,\\
f'(x) &= 30x - 3x^2,\\
f''(x) &= 30 - 6x.
\end{aligned}$$

Ott lehet maximuma, ahol $f'(x) = 0$ és $f''(x) < 0$.

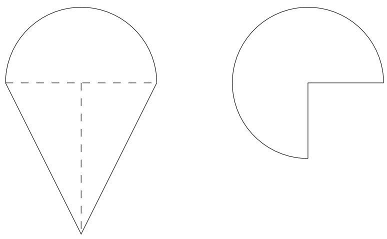
$$f'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10-x) = 0.$$

Csak az $x = 10$ jöhet szóba, ekkor $f''(10) = 30 - 6 \cdot 10 = -30 < 0$; azaz $x = 10$-ben tényleg maximuma van a függvénynek, a maximális értéke $f(10) = 10^2(15 - 10) = 500$. Kaptuk, hogy $V = r^2(15 - r)\pi \leqslant 500\pi$ és a maximuma $r = 10$ esetén lesz, a térfogata ekkor 500π cm^3.

A méretarányos rajz ezek szerint:



6. *a) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érinti az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat.* *(9 pont)*



b) A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az ábrán *látható.*

A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m *magasságúra tervezett emblémát.*

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% *veszteséggel számolhatunk?*

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2*-re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség* 5%? *(7 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmegy az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő: $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Ezen egyenesnek és az $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolának 1 metszéspontja (érintési pont) van. Keressük ezt meg, azaz oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2, \\ y = -x^2 + 4x - 2. \end{cases}$$

$$2ax - a^2 = -x^2 + 4x - 2,$$

$$x^2 + (2a - 4)x - (a^2 - 2) = 0.$$

Mivel az egyenes érintő, ennek a másodfokú egyenletnek csak egy valós szám lehet a megoldása, tehát a diszkriminánsa nulla:

$$0 = D = (2a-4)^2 + 4(a^2-2) = 8a^2 - 16a + 8 = 8(a-1)^2,$$

vagyis $a = 1$ és a keresett érintő $y = 2x - 1$.

II. megoldás. Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmegy az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2.$$

Határozzuk meg most egy b pontban az $y = -x^2 + 4x - 2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = -2x + 4$, $m = -2b + 4$. Ez átmegy a $(b; -b^2 + 4b - 2)$ ponton, így az érintő:

$$y = (-2b+4)(x-b) - b^2 + 4b - 2 = (-2b+4)x + b^2 - 2.$$

Ha közös az érintő, akkor ugyanaz az egyenes egyenlete, azaz

$$y = 2ax - a^2, \qquad y = (-2b+4)x + b^2 - 2.$$

$$\begin{cases} 2a = -2b + 4, \\ -a^2 = b^2 - 2. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert:

$$2a = -2b + 4, \qquad a = -b + 2, \qquad -(-b+2)^2 = b^2 - 2,$$

$$-b^2 + 4b - 4 = b^2 - 2, \qquad 0 = 2b^2 - 4b + 2, \qquad 0 = b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2,$$

$$b = 1, \qquad a = 1.$$

Innen a közös érintő: $y = 2x - 1$.

b) A félgömb sugara legyen r, ekkor a kúp magassága $2r$. Az egész embléma magassága így $3r$, ami a feladat szerint 1,5 m: $3r = 1{,}5$, $r = 0{,}5$. Nézzük a térfogatot. A kivágott félgömb térfogata:

$$V_{\text{félgömb}} = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

A kivágott kúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

Az embléma térfogata:

$$V_{\text{embléma}} = V_{\text{félgömb}} + V_{\text{kúp}} = \frac{r^3\pi}{2} + \frac{r^3\pi}{2} = r^3\pi.$$

Ez a beton térfogatának a 85%-a:

$$0{,}85 \cdot V_{\text{beton}} = r^3\pi, \qquad V_{\text{beton}} = r^3\pi \cdot \frac{20}{17} \approx 0{,}462\ \text{m}^3.$$

Az embléma tömege (2400 kg/m^3-es beton sűrűséget használva) $0{,}462 \cdot 2400 =$ $= 1108{,}8$ kg.

Nézzük a felszínt. A kivágott félgömb felszíne:

$$A_{\text{félgömb}} = \frac{4r^2\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2\pi.$$

Az alkotó $r\sqrt{5}$, így a kivágott kúp felszíne:

$$A_{\text{kúp}} = \frac{2r\pi \cdot \sqrt{5}r}{2} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{3r^2\pi \cdot \sqrt{5}}{4} + 2r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2.$$

Az embléma felszíne:

$$A_{\text{embléma}} = A_{\text{félgömb}} + A_{\text{kúp}} = 2r^2\pi + \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2.$$

Háromszor kell festeni és a festék 95%-a hasznosul:

$$0{,}95 \cdot A_{\text{festék}} = 3 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2,$$

$$A_{\text{festék}} = 60 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{76} \cdot r^2 \approx 10{,}7\ \text{m}^2.$$

7. *a*) 18 *tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek.* (*9 pont*)

b) *Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az* 1; 2; 3 *és* 4 *számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy* 1*-es után csak* 4*-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A feladatot általánosan oldjuk meg: ha 18 tudós 3 nyelvet használ, akkor biztosan van olyan nyelv, amit 3 tudós egymás között használ.

A használt nyelvek legyenek A, B és C. Tekintsük az egyik tudóst, ő 17 másikkal levelez. A skatulyaelv miatt lesz olyan nyelv (legyen ez az A nyelv), amin legalább 6 másik tudóssal levelez. Ha a 6 levelező partner között van kettő, akik egymással az A nyelven leveleznek, akkor készen vagyunk, hiszen találtunk három tudóst, aki az A nyelven leveleznek egymás között.

Ha ez nem teljesül, akkor ez a 6 tudós egymás között csak a B és C nyelvet használja. Tekintsünk most ebből a hat tudósból egyet, aki a másik öttel levelez.

A skatulyaelv miatt biztosan van olyan nyelv (legyen ez a B nyelv), amit legalább 3 másikkal használ. Ezen másik három most egymás között ha használja a B nyelvet, akkor találunk három tudóst, aki a B nyelvet használja, ha meg nem, akkor ők egymás között a C nyelvet használják, és ezért vagyunk készen.

Ezt a feladatra alkalmazva adódik az állítás.

b) Építsük fel balról jobbra a számokat.

Jelölje $f_1(n)$ az n hosszúság esetén az 1-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_2(n)$ az n hosszúság esetén az 2-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_3(n)$ az n hosszúság esetén az 3-asre végződő számok számát.

Jelölje $f_4(n)$ az n hosszúság esetén az 4-esre végződő számok számát.

Ekkor

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 1 \quad \text{és} \\
f_1(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\
f_2(2) &= f_3(1), \\
f_3(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\
f_4(2) &= f_1(1) + f_3(1), \quad \text{illetve} \\
f_1(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\
f_2(n+1) &= f_3(n), \\
f_3(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\
f_4(n+1) &= f_1(n) + f_3(n).
\end{aligned}$$

Táblázatba foglalva:

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	Összes
1	1	1	1	1	4
2	3	1	3	2	9
3	6	3	6	6	21
4	15	6	15	12	48

Tehát 48 ilyen számot tud felírni.

Megjegyzés. Ha S_n-nel jelöljük az összeget, akkor arra igaz, hogy

$$S_1 = 4; \quad S_2 = 9; \quad S_n = S_{n-1} + 3 \cdot S_{n-2}; \quad n \geqslant 3.$$

8. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:*

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek" zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes" zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli. *(9 pont)* *b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai* 2 *és* 14, *szárai* 10 *egység hosszú-ak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A legnagyobb közös osztóban a közös prímek, a legkisebb közös többszörösben az összes prím, tehát a legnagyobb közös osztó prímjei is szerepelnek; és a legnagyobb közös osztóban levő prímek kitevője nem lehet nagyobb a legkisebb közös többszörösben szereplő prímek kitevőjénél. Ezért $(x;y)\mid[x;y]$. Az egyenlet bal oldala osztható $(x;y)$-nal, tehát a jobb oldal is: $(x;y)\mid 257$. Mivel 257 prím, ezért két eset van.

I. eset: $(x;y)=257$.

$$2\cdot(x;y)+17\cdot[x;y]=257,\qquad 2\cdot 257+17\cdot[x;y]=257,\qquad 17\cdot[x;y]=-257.$$

Ekkor a legkisebb közös többszörösre negatív szám adódik (de még egésznek sem egész), tehát ez nem lehet.

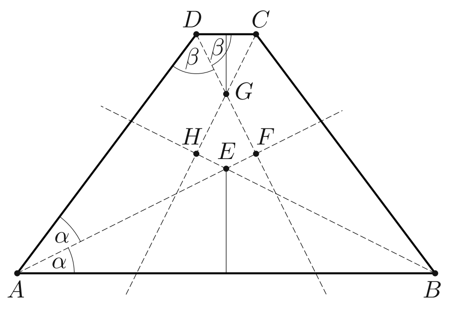
II. eset: $(x;y)=1$.

$$2\cdot(x;y)+17\cdot[x;y]=257,\qquad 2\cdot 1+17\cdot[x;y]=257,$$
$$17\cdot[x;y]=255,\qquad [x;y]=15,$$

azaz olyan számokat keresünk, amelyek relatív prímek és csak 3-as és 5-ös prímeket tartalmazhatnak, mert a legkisebb közös többszörös a 15.

Négy lehetőség van:

x	1	15	3	5
y	15	1	5	3



b) Készítsünk *ábrát.* Jelöljünk meg pár szöget és bocsássunk merőlegest a G és E pontokból a megfelelő alapokra.

A trapéz magassága

$$10^2=m^2+\left(\frac{14-2}{2}\right)^2\quad\Rightarrow\quad m=8.$$

A szögekre pedig

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\quad \alpha+\beta=90^\circ.$$

A szimmetrikus trapéz miatt a keletkezett négyszög szimmetrikus a GE egyenesre és konvex, tehát deltoid. A konvex deltoidoknak van beírt köre (szembeni oldalak összege megegyezik).

$AFD\sphericalangle=BHC\sphericalangle=90^\circ$, ugyanis a trapéz egy szárán levő szögek összege 180°, így a szögfelezők 90°-os szöget zárnak be. Tehát a négyszögünk 2 szemközti szögének összege 180°, így van köré írt köre is.

Derékszögű háromszögekben számolva:

$$AE = \frac{7}{\cos\alpha}, \qquad AF = 10 \cdot \cos\alpha, \qquad EF = 10 \cdot \cos\alpha - \frac{7}{\cos\alpha},$$

$$DG = \frac{1}{\cos\beta}, \qquad DF = 10 \cdot \cos\beta, \qquad GF = 10 \cdot \cos\beta - \frac{1}{\cos\beta}.$$

$EFG\triangle$ derékszögű és az átfogója a négyszög köré írt kör sugarának a kétszerese, azaz

$$(2R)^2 = EF^2 + GF^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{EF^2 + GF^2}.$$

A beírt körre igaz, hogy

$$t = \frac{k \cdot r}{2}, \qquad 2 \cdot \frac{EF \cdot GF}{2} = r \cdot \frac{(2 \cdot EF + 2 \cdot GF)}{2}, \qquad r = \frac{EF \cdot GF}{EF + GF}.$$

Az adatokat behelyettesítve kapjuk: $r = 0{,}745$; $R = 1{,}25$.

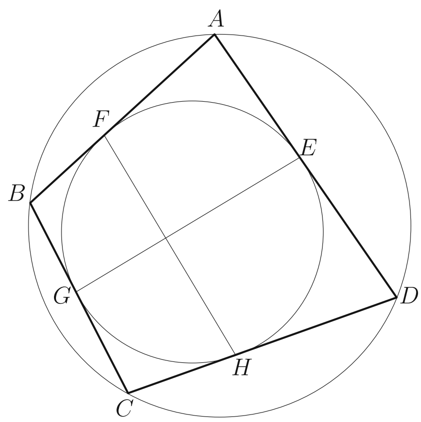
9. *a) Bizonyítsuk be, hogy*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3},$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$. *(8 pont)*

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.

Az ábrán jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG *és* FH *szakaszok merőlegesek egymásra.* *(8 pont)*



Megoldás. *a)* Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. Nézzük meg, hogy teljesül-e a bizonyítandó állítás az $n = 1$ és $n = 2$ esetre:

$$n = 1 \qquad 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2,$$

$$n = 2 \qquad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8.$$

II. Tegyük fel, hogy $n = k$-ig minden értékre teljesül, hogy

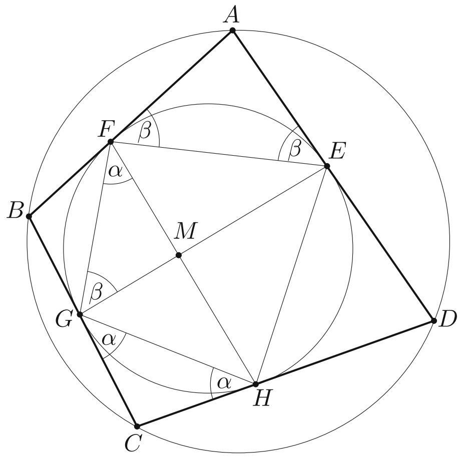
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}.$$

III. Nézzük az $n = k + 1$ esetet, induljunk ki a bal oldalból:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + &2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \\ &= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2) = \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = (k+1)(k+2)\tfrac{k+3}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}, \end{aligned}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.



b) Húzzuk meg a FG, GH, HE és EF szakaszokat. $HFG\sphericalangle = CGH\sphericalangle = CHG\sphericalangle = \alpha$, mivel mind a GH szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $GCH\sphericalangle = 180° - 2\alpha$.

$FEA\sphericalangle = EFA\sphericalangle = FGE\sphericalangle = \beta$, mivel mind az FE szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $EAF\sphericalangle = 180° - 2\beta$.

Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a szemben fekvő szögeinek összege 180°, tehát

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°,$$

$2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Innen $GMF\sphericalangle = 180° - \alpha - \beta = 90°$ és ezt kellett bizonyítani.

Szoldatics József
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5023. *Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90°$ és $AC > BC$. A háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja X. A CX-re X-ben állított merőleges a CA egyenest a P pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AP = BC$.*

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)