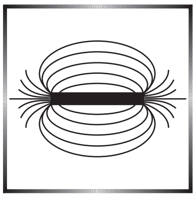
végzi, az olyan rendszerezett tudást, hozzáállást, gondolkodásmódot, szemléletet, magabiztosságot, kitartást, egy tudományos munka megírásának a képességét és módszerességet szerez, melyekhez másképp nagyon nehezen juthatna hozzá.

Ahhoz, hogy a mérést magát megszeressük, és hogy élvezni tudjuk a feladatmegoldást, gyakran csak akkor jutunk el, ha már többet is elvégeztünk – jókat, rosszabbakat, szenvedősebbeket, könnyebbeket, unalmasakat, látványosakat –, ugyanis ekkor tudjuk értékelni, hogy mit is jelent, amikor egy tudományos tartalommal bíró munkát végzünk, amit aztán egy magas színvonalú írással, összefoglalóval „büszkén” meg tudunk osztani másokkal.

Kondákor Márk
Nagyatád

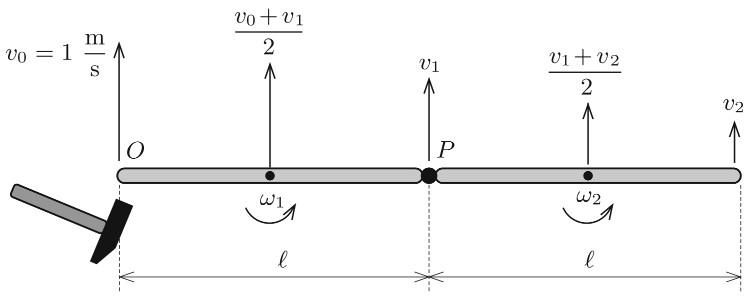


Fizika feladatok megoldása

P. 5153. *Két egyforma, homogén rúd egy-egy végpontja csuklósan kapcsolódik egymáshoz. A rudak vízszintes, súrlódásmentes asztallapon egy egyenes mentén nyugszanak. Az egyik rúd szabad végére a rúdra merőleges irányban hirtelen ráütünk, mire az a pont* 1 m/s *sebességgel kezd el mozogni. Milyen irányban és mekkora sebességgel indul el a másik rúd szabad végpontja?*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A hirtelen erőlökést követő pillanatban még nincsenek oldalirányú sebességek, hiszen a rudak hossza adott, és az egész rendszer oldalirányú lendülete nulla. Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket, és az ott bejelölt irányokat tekintsük pozitívnak.



A rendszernek az O pontra vonatkoztatott perdülete az ütés utáni pillanatban *nulla*, hiszen a kezdeti perdület nulla volt, és az erőlökés iránya (hatásvonala) átmegy az O ponton, tehát az erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomaték nulla.

A teljes perdület a tömegközéppont körüli forgásból adódó *sajátperdület* és a tömegközéppont mozgásából adódó *pályaperdület* összege. Mivel az ℓ hosszúságú, m tömegű homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{12}m\ell^2$, a rendszer teljes perdülete:

$$0 = m\frac{v_0+v_1}{2}\,\frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_1-v_0}{\ell} + m\frac{v_1+v_2}{2}\,\frac{3\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_2-v_1}{\ell},$$

vagyis

$$0 = v_0 + 6v_1 + 5v_2. \tag{1}$$

A Δt ideig tartó, F nagyságú erő $F\Delta t$ erőlökésnek felel meg. (Egy hirtelen ütésnél F nagyon nagy, Δt pedig nagyon kicsi.) Newton törvénye értelmében a rendszer impulzusának (lendületének) megváltozása az erőlökés nagyságával egyezik meg:

$$F\Delta t = m\frac{v_0+v_1}{2} + m\frac{v_1+v_2}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlet kettőnél több ismeretlent tartalmaz (v_1-et, v_2-t és $F\Delta t$-t), belőlük a keresett v_2-t még nem tudjuk meghatározni. A hiányzó harmadik összefüggést a *munkatétel* adhatja. A rúd megütött végére F nagyságú erő hat, és az elmozdulása (a nulláról v_0-ra növelt sebesség átlagos értékével számolva) $(v_0/2)\Delta t$. A végzett munka tehát

$$W = \frac{v_0}{2}F\Delta t,$$

vagyis (2) felhasználásával:

$$W = \frac{mv_0}{4}(v_0 + 2v_1 + v_2). \tag{3}$$

Ez a munka megegyezik a meglökött rendszer teljes mozgási energiájával. Egy-egy rúddarab mozgási energiája két tag (a tömegközéppontba képzelt tömegpont mozgási energiájának és a tömegközéppont körüli forgás energiájának) összegeként kapható meg. A teljes mozgási energia az egyes rúddarabok mozgási energiájának összege:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0+v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_1-v_0}{\ell}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_2-v_1}{\ell}\right)^2.$$

A munkatétel szerint $W = E_{\text{mozgási}}$, ahonnan (3) felhasználása és algebrai átalakítások után ez adódik:

$$4v_1^2 + 2v_1v_2 + 2v_2^2 = 4v_1v_0 + 3v_0v_2 + v_0^2. \tag{4}$$

Fejezzük ki (1)-ből v_1-et:

$$v_1 = -\frac{v_0 + 5v_2}{6},$$

majd helyettesítsük be ezt a kifejezést a (4) egyenletbe. Algebrai átalakítások után a

$$14v_2^2 + 5v_2v_0 - v_0^2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai:

I. eset: $v_2 = -\frac{1}{2}v_0,$ és ekkor $v_1 = \frac{1}{4}v_0,$

illetve

II. eset: $v_2 = \frac{1}{7}v_0,$ és ekkor $v_1 = -\frac{2}{7}v_0.$

Mindkét „megoldás" kielégíti a lendületváltozás és az O pontra vonatkozó perdületváltozás, valamint a munkatétel egyenleteit. Nyilvánvaló, hogy csak az egyik lehet helyes, hiszen az O pontbeli ütés után a rendszer nem viselkedhet kétféleképpen.

Vajon melyik a helyes megolás? Belátjuk, hogy ténylegesen a II. esetnek megfelelő mozgás valósul meg, az első eset csak egy (a matematikai lépések során előbukkant) „hamis gyök".

Nevezzük az erőlökéssel megegyező (az ábrán felfelé mutató, pozitívnak tekintett) irányt „előrefelének", az ezzel ellentétes irányt pedig „hátrafelének". A szögsebesség, a perdület és a forgatónyomaték akkor pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes irányúnak látszanak a rajzon. A kiszámított v_1 és v_2 értékekből leolvashatjuk, hogy – mindkét megoldásban – a jobb oldali rúdnak az O pontra vonatkozó perdülete *negatív.* A bal oldali rúd a P pontban érintkezik a jobb oldali rúddal, és itt hátrafelé mutató (tehát negatív forgatónyomatékú) erőlökést kell kifejtenie a jobb oldali részre; csak ekkor lesz a jobb oldali rúd perdülete (az O pontra vonatkoztatva) az erőlökés után *negatív.*

A sebességek ismeretében kiszámíthatjuk, hogy a jobb oldali rúd szögsebessége az első esetnek megfelelő v_1 és v_2 mellett

$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = -\frac{3v_0}{4\ell} < 0,$$

a második esetben pedig

$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = \frac{3v_0}{7\ell} > 0.$$

Fentebb beláttuk, hogy a P pontban a jobb oldali rúdra hátrafelé mutató erőlökés hat, ez a rúd tömegközéppontjára vonatkozóan pozitív forgatónyomatékot eredményez, tehát a rúd szögsebessége is pozitív lesz a másik rúd másik végét érő hirtelen ütés után. Ez csak a második esetben teljesül, így most már határozottan kijelenthetjük, hogy a szabad végpont ténylegesen

$$v_2 = \frac{1}{7}v_0 = \frac{1}{7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel indul el „előrefelé".

Bokor Endre (Budapest, Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két rúdból álló rendszer összes lendületének és a teljes mozgási energiájának kiszámításakor a Δt ideig ható erőt állandó nagyságúnak tekintettük. Be lehet látni, hogy az eredmény akkor sem változik meg, ha az erő az időnek tetszőleges módon változó $F(t)$ függvénye.

(*G. P.*)

5 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre megoldása. Hiányos (2–3 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

P. 5154. *Egy filmjelenetben egy fiú biciklizik. Ahogy a fiú lassan teker, a kerekek a kerékpár haladási irányának megfelelő irányban látszanak forogni. Miközben a fiú lassan növeli a sebességét, egyszer csak a kerekek az ellenkező irányban látszanak forogni. A sebesség további növelésekor a kerekek látszólagos forgása fokozatosan lassul (de még mindig a „rossz" irányba forognak), míg egy bizonyos v haladási sebesség esetén úgy tűnik, mintha a kerekek forgása megállna. Mekkora v értéke, ha a kerekek kerülete* 2,5 m, *mindegyik keréknek* 36 *küllője van, és a film másodpercenként* 24 *filmkockából áll?*

(*4 pont*)

Megoldás. A kerék forgását a szemünk a megfigyelhető küllők mozgása alapján képes érzékelni, vagyis annak megfelelően tudatosul bennünk a forgás iránya, hogy merre látjuk elfordulni a küllőket. A filmben a küllőket nem minden időpillanatban, hanem csak az egymást követő képkockákon látjuk. Ha a kerék két képkockája közötti $\frac{1}{24}$ s (kb. 0,0417 s) alatt éppen annyit fordul el, hogy a küllők a korábbi képkockához képest az előttük lévő helyére érjenek, akkor nem látunk különbséget a képkockák között, és úgy fog tűnni, mintha a kerék nem is forogna. A kerék sebességét kiszámolhatjuk abból, hogy mennyi utat kell megtennie egységnyi idő alatt ($v = s/t$).

A 36 küllő 36 részre osztja a kerék kerületét, ami azt jelenti, hogy amíg az egyik küllő elfoglalja az előtte lévő helyét, a 2,5 m hosszú kerület $\frac{1}{36}$ részét, azaz 0,0694 m-t kell megtennie a keréknek. Ezt az utat elosztva a megtételéhez szükséges idővel megkapjuk a kerékpár sebességét:

$$v = \frac{0{,}0694\ \mathrm{m}}{0{,}0416\ \mathrm{s}} = 1{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Sághy Áron Tádé (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A megoldás során feltételeztük, hogy a biciklikerék küllői sugár irányúak. Ez a valóságban nem pontosan teljesül, a küllők kicsit „ferdén”, egymást keresztezve helyezkednek el. Ha ez nem így lenne, akkor a küllők nem (vagy csak a tengely és az abroncs egymáshoz viszonyított eltekeredése után) lennének képesek a meghajtott kerék tengelyére ható forgatónyomatékot az abroncsnak „átadni”.

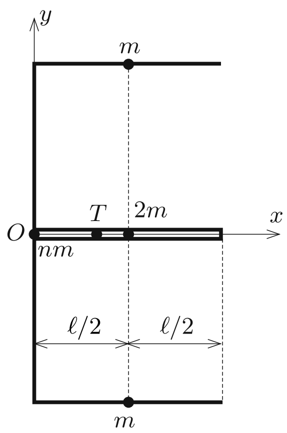
2. A film képkockái $\frac{1}{24}$ másodpercenként követik egymást, a filmet mégsem felvillanások sorozatának, hanem folytonosnak érzékeljük. Ezt az teszi lehetővé, hogy az agyunk ún. tudattalan része kitölti a hiányzó időközöket. Ha két kép között a kerék kevesebbet fordul el, mint a szomszédos küllők közötti szög fele, akkor a valódi („jó irányú”) mozgást érzékeljük. Ha az elfordulás ennél nagyobb, akkor az agyunk tudattalan működése úgy egészíti ki a hiányzó részeket, mintha a következő küllő fordult volna el a „rossz irányba” (vagyis visszafelé). Ennek feltehetően az az oka, hogy ilyen „értelmezésben” kisebb a szögelfordulás, és az agyunk ezt tartja valószínűbbnek.

(G. P.)

78 dolgozat érkezett. Helyes 65 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 1 dolgozat.

P. 5155. *Egy $(n+4)\ell$ hosszúságú, vékony huzalból olyan tengelyesen szimmetrikus* E *betűt hajlítottunk, amelynek vízszintes szárai ℓ hosszúságúak, függőleges szára pedig $n\ell$ hosszúságú. Hol van az alakzat tömegközéppontja?*

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest



Megoldás. Legyen a huzal ℓ hosszúságú darabjának tömege m. Az E betű felső (vízszintes) szárának tömege m, a középső száré $2m$, az alsó száré m, a függőleges szárának tömege pedig nm. A vízszintes szárak tömegközéppontjai a vizszintes szárak felezőpontjában, a függőleges szár tömegközéppontja a függőleges szár felezőpontjában helyezkedik el. Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a függőleges szár tömegközéppontjába.

A pontrendszer T tömegközéppontjába mutató vektort általános esetben az

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

összefüggés adja meg.

Esetünkben

$$T_x = \frac{nm \cdot 0 + m \cdot \frac{\ell}{2} + 2m \cdot \frac{\ell}{2} + m \cdot \frac{\ell}{2}}{(n+4)m} = \frac{2\ell}{n+4},$$

$$T_y = \frac{nm\cdot 0 + m\cdot \ell + 2m\cdot 0 + m\cdot(-\ell)}{(n+4)m} = 0.$$

A tömegközéppont tehát az

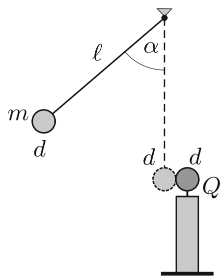
$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{2\ell}{n+4}, 0\right)$$

helyvektorú pontban, vagyis a középső szár mentén, annak bal szélétől $\frac{2}{n+4}\ell$ távolságban található.

Dékány Csaba (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 10, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5160. *Rögzített szigetelőállvány tetejére erősített kicsiny,* $d = 2$ cm *átmérőjű fémgömb töltése* $Q = 8\cdot 10^{-9}$ C. *Vékony,* $\ell = 1$ m *hosszú, az* ábra *szerint felfüggesztett szigetelőszál végére erősített ugyanakkora semleges fémgömb tömege* $m = 1$ g. *A fonalat* $\alpha = 60^\circ$*-ig kitérítjük, majd elengedjük. A két gömb centrálisan, abszolút rugalmasan ütközik. Az ütközés során az elektromos mező energiája nem változik, energiadisszipáció nincsen.*



A kiindulási helyzeténél mennyivel kerül magasabbra a fonálinga kis gömbje, ha a légellenállás is elhanyagolható?

(Lásd még a kapacitásokról szóló cikket lapunk 2019. évi szeptemberi számának 425. oldalán.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Amikor az $R = d/2$ sugarú, Q_1 és Q_2 töltésű fémgömbök a méretüknél sokkal nagyobb távolságra vannak egymástól, akkor a rendszer elektrosztatikus energiája jó közelítéssel

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{1}{2}\,\frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

módon adható meg. (A közelítés annak felel meg, hogy elhanyagoljuk a fémgömbök egymásra kifejtett hatását, az elektromos megosztást.)

Kezdetben a szigetelőszálhoz erősített gömb töltése $Q_1 = 0$, a szigetelőállványhoz rögzített fémgömb töltése pedig $Q_2 = 8\cdot 10^{-9}$ C. Az ütközés után mindkét gömb töltése $Q_{1;2} = 4\cdot 10^{-9}$ C, hiszen az ütközés rövid ideje alatt a töltések kiegyenlítődnek, és a szimmetria miatt fele-fele arányban kerülnek a két fémgömbre. Mivel az ütközés során az elektromos mező energiája nem változik (és mechanikai energiaveszteség sincsen), a kezdeti és a végső elektrosztatikus energia különbsége meg fog egyezni a helyzeti energia megváltozásával:

$$\Delta E_{\mathrm{h}} = mg\Delta h = W_1 - W_2 = \frac{Q^2 - 2\cdot\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ebből már kiszámíthatjuk, hogy a kiindulási helyzeténél mennyivel kerül magasabbra a fonálon lengő gömb, amikor újra megáll:

$$\Delta h = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 Rmg} = \frac{(8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{16\pi\cdot\left(8{,}854\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)\cdot(10^{-2}\ \mathrm{m})\cdot(10^{-3}\ \mathrm{kg})\cdot\left(9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} \approx$$

$$\approx 0{,}0015\ \mathrm{m} = 1{,}5\ \mathrm{mm}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két fémgömb közötti elektrosztatikus kölcsönhatás csak akkor hanyagolható el, amikor a gömbök elegendően távol vannak egymástól. Amikor közelednek egymáshoz, majd összeérnek, az erőteljes elektromos megosztás miatt csak bonyolultan kiszámolható erő lép fel közöttük. Ezen erő munkája miatt a fémgömb sebessége (mozgási energiája) bonyolult módon változik, és módosítja az ütközés sebességét. Szerencsére ezt a számítást nem kell elvégeznünk, ha nem az ütközés sebességét, hanem csak a kiindulási és az ismételt megálláshoz tartozó magasságot akarjuk összehasonlítani. Azt az állítást, hogy az ütközéskor bekövetkező hirtelen töltésátrendeződés nem vezet energiaveszteséghez, a hivatkozott cikk alapján lehet belátni, de a feladatban feltett kérdés enélkül is megválaszolható.

17 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 13 dolgozat.

P. 5161. *Homogén, **B** indukcióvektorú, erős mágneses térbe R sugarú, igen hosszú, töltetlen fémhengert helyezünk. A henger tengelyét az indukcióvektorral párhuzamosan rögzítjük, majd akörül ω szögsebességgel forgatni kezdjük. Mekkora felületi töltéssűrűség alakul ki a henger palástján?*

(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert,* Budapest

Megoldás. Először adjuk meg a jelenség kvalitatív leírását, a hengerpalást feltöltődésének magyarázatát!

A fémben a $q=-e<0$ töltésű elektronok szabadon el tudnak mozdulni a fém kristályrácsához képest. Az elektronok nagyon hamar a fém pozitív töltésű kristályrácsával együtt fognak mozogni, de a rájuk ható mágneses erő hatására sugárirányban (kifelé vagy befelé) elmozdulhatnak, és ténylegesen el is mozdulnak. Ha a forgás iránya (mondjuk) olyan, hogy a $\boldsymbol{B}$ vektor a balkéz-szabálynak megfelelő irányba mutat, akkor a mágneses Lorentz-erő sugárirányban *kifelé* húzza az elektronokat. Emiatt a henger felületén negatív töltések halmozódnak fel, miközben a henger belső része pozitívvá válik. A töltésszétválás miatt kialakul egy olyan $\boldsymbol{E}(r)$ elektromos tér, amelyik sugárirányban kifelé mutat, tehát a henger tengelye felé húzza az elektronokat.

A sugárirányú töltésvándorlás mindaddig tart, amíg az eletromos erő nagysága el nem éri a mágneses erő nagyságát, sőt, egy kicsit túl is lépi azt, hiszem az eredő elektromágneses erőnek a körmozgást végző elektronok centripetális gyorsulást is biztosítania kell. Célunk a felületi töltéssűrűség (vagyis a hengerpalást egységnyi felületű darabjára „kiülő” töltés) nagyságának meghatározása.

A mágneses erő nagysága a henger palástjának közvetlen közelében (de még a fém belsejében): $F = |e|\omega RB$, az elektromos erő nagysága pedig $|e|E(R)$. Az m tömegű elektronok mozgásegyenlete:

$$|e|E(R) - |e|\omega RB = mR\omega^2,$$

ahonnan az elektromos térerősség a hengerpalást közvetlen közelében:

$$E(R) = \omega RB + \frac{m}{|e|}R\omega^2.$$

(A jobb oldal második tagja minden reális esetben *sok nagyságrenddel* kisebb az első tagnál, emiatt a továbbiakban az m-mel arányos kifejezést elhanyagoljuk.)

A fémhenger egésze elektromosan semleges, tehát a hengerpaláston kívül az elektromos térerősség *nulla*. A henger palástjának egy kicsiny, A felületű darabkájába a henger belsejéből $\Psi = AE(R)$ elektromos fluxus (ilyen számú elektromos erővonal) lép be, a külső oldalon pedig semennyi fluxus nem lép ki. A felület tehát az elektromos tér „nyelője", vagyis negatív töltéseket tartalmaz. A Gauss-törvény szerint ez a töltés:

$$Q = -\varepsilon_0\,\Psi = -\varepsilon_0 AE(R) = -\varepsilon_0\omega RB\,A,$$

vagyis a keresett felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = -\varepsilon_0\omega RB.$$

Mindez akkor igaz, ha a forgásirány a mágneses indukcióhoz viszonyítva „balmenetes", vagyis a balkéz-szabálynak tesz eleget. Ellentétes forgásirány esetén a negatív töltések a henger tengelye felé mozdulnak el, és emiatt a felületi töltéssűrűség $+\varepsilon_0\omega RB$ lesz.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata felhasználásával

12 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Fonyi Máté Sándor és Kozák Áron megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 4, hibás 3 dolgozat.

P. 5164. *Ugyanannyi idő alatt egy fonálinga* 5*, egy másik* 10 *kis amplitúdójú lengést végez. Milyen hosszúak az ingák, ha az egyik inga* 120 cm*-rel hosszabb a másiknál?*

(*3 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Mivel a lengések amplitúdója kicsi, az ingák periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Legyen a rövidebb fonál hossza ℓ_1, a hosszabb ingáé pedig $\ell_2 = \ell_1 + 120$ cm. A hosszabb inga lengésideje lesz a nagyobb, a periódusidők aránya

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{T_0}{10}}{\frac{T_0}{5}} = \frac{1}{2}.$$

(T_0 az 5, illetve 10 lengés időtartama.) Ezek szerint

$$\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+120\ \text{cm}}{g}}}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_1+120\ \text{cm}}}=\frac{1}{2},$$

ahonnan

$$\frac{\ell_1}{\ell_1+120\ \text{cm}}=\frac{1}{4},$$

vagyis

$$4\ell_1=\ell_1+120\ \text{cm}\qquad\Longrightarrow\qquad\ell_1=40\ \text{cm}$$

következik. Az ingák hossza tehát $\ell_1=40$ cm és $\ell_2=160$ cm.

Takács Dóra (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2 dolgozat.

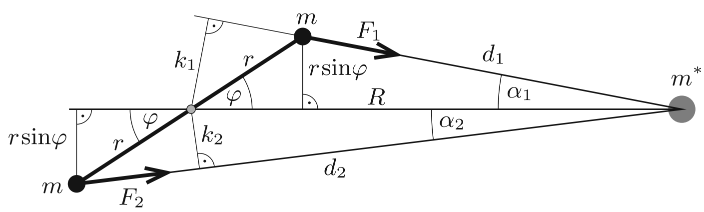
P. 5166. *Egy Eötvös-inga* $2r=40$ cm*-es rúdjának végeire egy-egy* $m=30$ g *tömegű, kicsiny testet erősítünk. A rendkívül könnyű rúd egy hajszálvékony fémszálon függ, vízszintes helyzetben. Közepétől mérve* $R=3$ m *távolságban, vele azonos magasságban egy* $m^*=100$ kg *tömegű ólomgolyót helyeztek el.*

a) Mekkora forgatónyomatékot gyakorol az ólomgolyó az ingára, amikor a golyót és az ingarúd közepét összekötő egyenes φ *szöget zár be a rúd irányával?*

b) Ábrázoljuk a forgatónyomatékot φ *függvényében! Mekkora szögnél lesz maximális a forgatónyomaték?*

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. *a*) Jelölje az ólomgolyóhoz közelebbi testre vonatkozó mennyiségeket 1-es, a távolabbi test jellemzőit pedig 2-es index, a feladat szövegében szereplő φ pedig legyen az *1. ábrán* látható szög ($0\leqslant\varphi\leqslant 90°$).



1. ábra

Az m^* tömegű golyó középpontjának az egyes tömegektől mért távolsága a koszinusztételből számolható ki:

$$d_1=\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\varphi},$$

$$d_2=\sqrt{R^2+r^2+2rR\cos\varphi}.$$

A forgatónyomatékot a gravitációs erő hozza létre, amelynek iránya m^* felé mutat, nagysága:

$$F_{1,2} = \gamma \frac{mm*}{d_{1,2}^2}.$$

Az ólomgolyótól nézve a testek (a rúd középpontjának irányától mérve) akkora α_1 és α_2 szög alatt látszanak, melyekre – a szinusztétel alapján – teljesül:

$$\sin\alpha_{1,2} = \frac{r}{d_{1,2}} \sin\varphi,$$

és a megfelelő erőkarok:

$$k_{1,2} = R\sin\alpha_{1,2} = \frac{Rr}{d_{1,2}} \sin\varphi.$$

A forgatónyomatékok ellentétes irányúak, de nem egyforma nagyságúak, emiatt nem „oltják ki" egymást. Az eredő forgatónyomaték nagysága:

$$M(\varphi) = F_1k_1 - F_2k_2 = \gamma\frac{mm^*}{d_1^2}\cdot\frac{rR}{d_1}\sin\varphi - \gamma\frac{mm*}{d_2^2}\cdot\frac{rR}{d_2}\sin\varphi =$$

$$= \gamma\, mm^* rR\cdot\sin\varphi\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right).$$

Tehát a forgatónyomaték φ szögtől való függése:

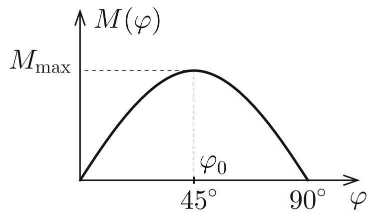
$$M(\varphi) = \gamma\, mm^* rR\cdot\sin\varphi\Big((R^2+r^2-2rR\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} - (R^2+r^2+2rR\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}\Big),$$

ami a megadott tömegek és távolságok behelyettesítése után

$$M(\varphi) = 1{,}20\cdot 10^{-10}\,\sin\varphi\Big((9{,}04-1{,}2\cdot\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} - (9{,}04+1{,}2\cdot\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}\Big)\ \mathrm{Nm}.$$

b) A kapott függvényt ábrázolhatjuk pl. a *GeoGebra* segítségével (*2. ábra*), és leolvashatjuk, hogy a legnagyobb forgatónyomaték $\varphi = 44{,}7° \approx 45°$-nál lép fel, és a nagysága $M_{\max} = 8{,}9\cdot 10^{-13}$ Nm.

A forgatónyomaték iránya olyan, hogy a rudat a $\varphi = 0$ helyzetbe igyekszik beforgatni.



2. ábra

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

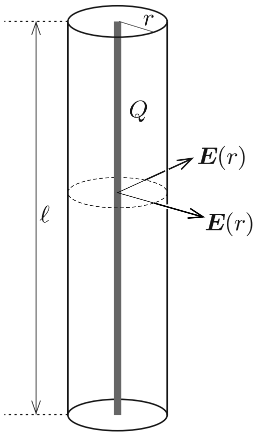
17 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (2–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5170. *Dörzsöléssel feltöltött, egyforma szívószálak vízszintes síkban, egymással párhuzamosan úgy helyezkednek el, hogy a végeiket összekötő egyenesek merőlegesek a szívószálakra. Feltételezhetjük, hogy a töltések eloszlása a szálakon egyenletes, és mindegyik szívószálnak ugyanakkora a töltése. A két szélső szál rögzített, egymástól való távolságuk jóval kisebb, mint egy szívószál hossza. Közöttük még néhány olyan szívószál helyezkedik el, amelyek szabadon elmozdulhatnak. Hogyan helyezkednek el ezek a szabadon mozgó szálak, ha számuk*

a) kettő;

b) három?

(*5 pont*) Közli: *Márki-Zay János,* Hódmezővásárhely



1. ábra

Megoldás. Egy ℓ hosszúságú, Q nagyságú töltéssel egyenletesen feltöltött szívószál elektromos tere a Gauss-törvény alapján határozható meg (*1. ábra*). A szálat szimmetrikusan körülvevő, $2\pi r\ell$ felszínű hengerpaláston $\Phi = E(r)\cdot 2\pi r\ell$ elektromos fluxus „halad át", és ez a hengerben lévő Q töltéssel arányos:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

vagyis

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\ell\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = K\cdot\frac{1}{r}.$$

Mivel a szívószálak hosszúsága is, és a töltésük is ugyanakkora, a K tényező is ugyanakkora az összes szálra.

a) Jelöljük a szívószálak távolságát a *2. ábrán* látható módon. (Kihasználtuk, hogy a szálak töltése is, és a hossza is ugyanakkora, emiatt az egyensúlyi állapot tükörszimmetrikus.)

A belső szálak egyensúlyának feltétele:

$$\sum QE = \frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b} - \frac{KQ}{a+b} = 0,$$

ahonnan

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b},$$

vagyis

$$a^2 + ab - b^2 = 0,$$

és ebből a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

másodfokú egyenlet következik. Ennek pozitív megoldása:

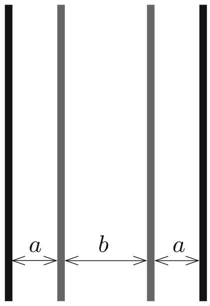
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618.$$

Megjegyzés. Érdekes, hogy ez az arány a híres aranymetszés arányszáma.

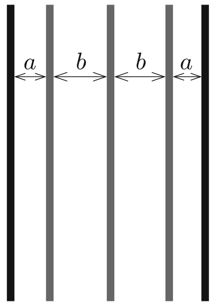
Az elmozdítható szívószálak tehát

$$\frac{a}{2a+b} : \frac{b}{2a+b} : \frac{a}{2a+b} \approx 0{,}28 : 0{,}45 : 0{,}28$$

arányban osztják fel a rögzített szálak közötti távolságot.



2. ábra



3. ábra

b) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a 3 mozgatható szívószál esetében is (*3. ábra*).

Az erőegyensúly feltétele:

$$\sum QE = \frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b} - \frac{KQ}{2b} - \frac{KQ}{a+2b} = 0,$$

amiből a

$$4\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{b}{a}\right) - 3 = 0$$

másodfokú egyenlet kapjuk. Ennek pozitív gyöke:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{21}+3}{4} \approx 1{,}896.$$

A távolságok aránya ebben az esetben

$$\frac{a}{2a+2b} : \frac{b}{2a+2b} : \frac{b}{2a+2b} : \frac{a}{2a+2b} \approx 0{,}17 : 0{,}33 : 0{,}33 : 0{,}17.$$

Viczián Anna (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes Békési Ábel, Takács Árpád és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

P. 5172. *Fényes evőkanalat tartunk* 25 cm*-re a szemünktől úgy, hogy a kanál szára függőleges. A kanál homorú felét nézve a fejünk fordított állású képét látjuk, míg a domború felét nézve a kép egyenes állású. Melyik képen látjuk a fejünk magasságát (függőleges méretét) nagyobbnak, és ez a kép hányszor nagyobb látószögben látszik a másiknál? A kanál függőleges metszetének görbületi sugara* 5 cm.

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. A kanál homorú oldala (függőleges irányban) $f_1 = 2{,}5$ cm fókusztávolságú homorú tükörnek tekinthető, amely a $t = 25$ cm távol lévő fejünkről az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1}$$

törvény szerint

$$k_1 = \frac{tf_1}{t - f_1} = \frac{25}{9}\ \text{cm} \approx 2{,}8\ \text{cm}$$

távolságban alkot valódi képet. Ez a kép a kanál előtt, a szemünktől

$$d_1 = t - k_1 = 22{,}2\ \text{cm}$$

távolságban jön létre.

A kanál domború oldalát nézve egy $f_2 = -2{,}5$ cm fókusztávolságú domború tükör által alkotott látszólagos képet észlelünk. Ez a kép a kanál mögött

$$|k_2| = \left|\frac{tf_2}{t - f_2}\right| = \frac{25}{11}\ \text{cm} \approx 2{,}3\ \text{cm}$$

távolságban, tehát a szemünktől $d_2 = t + |k_2| = 27{,}3$ cm-re jön létre.

Mivel a kanáltól mért képtávolság a homorú oldalnál nagyobb, mint a domborúnál, és a tárgytávolság mindkét esetben ugyanakkora, a homorú oldal esetében nagyobb a „lineáris nagyítás”:

$$N_1 = \frac{k_1}{t} > \frac{k_2}{t} = N_2.$$

A nagyítások aránya:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{11}{9} \approx 1{,}22.$$

A szemünk által érzékelt szögnagyítások aránya még ennél is nagyobb, hiszen a homorú oldal által alkotott (nagyobb méretű) kép közelebb van a szemünkhöz, mint a domború oldal által létrehozott kisebb és távolabbi kép.

Az arcunknak egy kicsiny, mondjuk 1 cm-es darabját a kanál homorú részében $N_1 \cdot 1\ \text{cm} = 0{,}111$ cm nagynak látjuk, és mivel a kép 22,8 cm távol van a szemünktől, a látószögre

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{0{,}111}{22{,}2} = 0{,}005, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha_1 = 0{,}286^\circ$$

adódik.

A domború oldalt nézve a kép nagysága $N_2 \cdot 1$ cm $= 0{,}091$ cm, és mivel a kép 27,3 cm távol van a szemünktől, a látószög

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{0{,}091}{27{,}3} = 0{,}191^\circ.$$

A látószögek aránya:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1{,}5.$$

Ha a fejünknek nem 1 cm-es, hanem nagyobb részét nézzük, vagyis a „tárgy" méretét megnöveljük, a képek mérete is – bizonyos határig – arányosan nagyobb lesz, de a látószögek és azok aránya nem változik. A fejünk egésze azonban 25 cm-ről nézve már túl nagy ahhoz, hogy az alkalmazott „paraxiális" közelítést elég pontosnak tekinthessük, így a látószögekre kapott 3 : 2 arány már elég pontatlanul teljesül.

Ludányi Levente (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.) és
Tanner Norman (Bonyhádi Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.)
dolgozata alapján

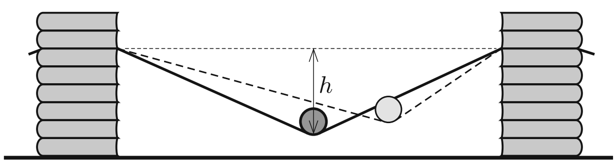
10 dolgozat érkezett. Helyes Ludányi Levente és Tanner Norman megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 394. Készítsünk vékony papírból kb. 80 cm hosszú papírcsíkot, végeit azonos magasságban rögzítsük eltolható állványokon, majd helyezzünk a közepére egy kis méretű, körhenger alakú konzervdobozt, amely valamilyen mértékben lehúzza a papírcsík közepét. Ezután térítsük ki a konzervdobozt mindig ugyanakkora (kb. 20 cm) mértékben, és kezdősebesség nélkül engedjük szabadon gördülni. Mérjük meg a létrejövő (csillapodó) periodikus mozgás periódusidejét a h belógás függvényében

a) teli doboz esetén;

b) teljesen üres doboz esetén.



(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest