B. 5090. Egy szabályos érme egyik felén $+1$, másik felén -1 szerepel. Egymás után n-szer feldobjuk az érmét, és egy sorba lejegyezzük az n db eredményt. Ezután bármely két szomszédos szám alá leírjuk a szorzatukat, így egy újabb számsorhoz jutunk, ami már csak $(n-1)$ db számból áll. Ezt a műveletet többször is végrehajtjuk, egészen addig, amíg egy egyetlen számból álló sorhoz nem jutunk. Mennyi az így kapott számháromszögben lévő $\frac{n(n+1)}{2}$ darab szám összegének a várható értéke?

(*3 pont*)

B. 5091. Az $A_1A_2\ldots A_{12}$ szabályos 12-szögben legyen P az A_1A_8 és A_6A_{11} átlók metszéspontja, továbbá R az A_7A_8 és A_9A_{11} egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy a PR egyenes harmadolja az A_1A_4 átlót.

(*5 pont*) *Bíró Bálint* (Eger) ötletéből

B. 5092. Kiszámoltuk a $\{0,1,\ldots,n-1\}$ halmaz összes részhalmazában az elemek összegét. Mi lehet n értéke, ha a kapott 2^n darab összegnek pontosan az n-edrésze osztható n-nel?

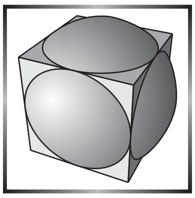
(*6 pont*)

B. 5093. Két egybevágó szabályos ötszög közös része egy tízszög, amelynek oldalai rendre $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Igazoljuk, hogy

$$a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_7 + a_7a_9 + a_9a_1 = a_2a_4 + a_4a_6 + a_6a_8 + a_8a_{10} + a_{10}a_2.$$

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (772–774.)

A. 772. Van N ember, és mindegyik gondol egy véletlen egész számra 1 és 19 között (az 1-et és a 19-et is beleértve, nem feltétlenül egyforma eloszlással). A gondolt véletlen számok egymástól függetlenek, és minden emberre igaz, hogy mind a 19 számra legfeljebb 99% valószínűséggel gondol. Ezután összeadják a gondolt N darab számot, és veszik a kapott összeg 19-es maradékát. Bizonyítandó, hogy az így kapott eredmény eloszlása exponenciális sebességgel tart az egyenletes eloszláshoz, azaz létezik olyan $0<c<1$ valós szám, melyre teljesül, hogy az N darab véletlen szám összege mindegyik 19-es maradékot $1/19-c^N$ és $1/19+c^N$ közötti valószínűséggel veszi fel.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 773. Legyen $n \geqslant 3$ egy pozitív egész szám, σ pedig a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmaz identitástól különböző olyan permutációja, melyre $\sigma(0) = 0$. A C_σ *titkosítás* minden m pozitív egészt elkódol olyan módon, hogy az m szám n-es számrendszerben felírt alakjában minden egyes a számjegyet $\sigma(a)$-ra cserél. Legyen d egy n-nel nem osztható pozitív egész. Azt mondjuk, hogy a C_σ titkosítás *kompatibilis* d-vel, ha C_σ d minden többszörösét d többszörösévé kódolja el. A d számot *titokzatosnak* nevezzük, ha van hozzá olyan C_σ titkosítás, mely kompatibilis d-vel.

Legyen k egy pozitív egész szám, és legyen $p = 2^k + 1$.

a) Keressük meg a 2 legnagyobb hatványát, amely titokzatos a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

b) Keressük meg a p legnagyobb hatványát, amely titokzatos a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

c) Tegyük fel, továbbá hogy a fenti p szám prímszám. Keressük meg a legnagyobb titokzatos számot a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

A. 774. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O, és D egy tetszőleges pont a körülírt körön. Legyen X, Y és Z a D pont merőleges vetülete rendre az OA, OB és OC egyenesen. Bizonyítandó, hogy az XYZ háromszög beírt körének középpontja rajta van az ABC háromszög D ponthoz tartozó Simson-egyenesén.

Javasolta: *Fonyó Lajos* (Keszthely)

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 505. Egy tájfutó versenyen nem lehet mindenki egyszerre a terepen, ezért különböző időben indítják a versenyzőket. A célba befutó sportoló csak az addig beérkezett versenyzők eredményeit tudhatja meg.

Egy lezajlott verseny után ismerjük az N számú $(3 < N \leqslant 200)$ versenyző `START` indulási és `CEL` beérkezési idejét $(0 < \texttt{START}, \texttt{CEL} \leqslant 10\,000)$. Készítsünk programot, amely meghatározza, hogy hány versenyző gondolhatta magáról a beérkezés pillanatában, hogy a legjobb háromban végezhet, tehát van esélye a dobogón állni.

A *standard bemenet* első sora a versenyzők N számát és az ezt követő N sor soronként két számot tartalmaz: a versenyzők indulási és érkezési idejét másodpercben, a beérkezés ideje szerint növekvő sorrendben.