Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1600. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$4^x + 9^x + 36^x + \sqrt{\frac{1}{2} - 2x^2} = 1$$

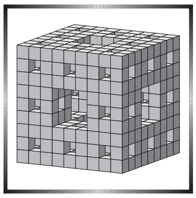
egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1601. Egy szabályos négyoldalú gúla oldallapjának magassága kétszerese az alaplap élének. Az alaplap síkjától számítva a magasság hány százalékánál kell az alaplap síkjával párhuzamosan kettévágni a gúlát ahhoz, hogy a keletkezett csonkagúla palástjának és fedőlapjának területe összesen pont fele legyen az eredeti gúla palástja területének?

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5086–5093.)



B. 5086. Oldjuk meg az $\left(x^3-y^2\right)^2 = \left(x^2-y^3\right)^2$ egyenletet az egész számpárok halmazán.

(*4 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5087. Az $ABCD$ négyzet egy belső P pontjának távolsága az A, B, D csúcsoktól rendre 1, $\sqrt{2}$, illetve 2. Számítsuk ki az APB szög nagyságát.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5088. Adott G számhalmazhoz a $k>1$ pozitív egész *érdekes,* ha a G halmazban van k különböző olyan elem, amelyek átlaga szintén a G halmazba esik.

Legyen a $H=\{1;3;4;9;10;\ldots\}$ halmaz azon számok halmaza, amelyek előállnak néhány különböző 3-hatvány összegeként.

a) Mely $k>1$ számok érdekesek a H halmazhoz?

b) Legyen $c \notin H$ tetszőleges pozitív egész. Igazoljuk, hogy a $H' = H \cup \{c\}$ halmazhoz minden $k>1$ szám érdekes.

(*5 pont*)

B. 5089. Egy tetraéder két kitérő éle egymásra merőleges, hosszuk 12 és 13, egyeneseik távolsága 14 egység. Határozzuk meg a tetraéder térfogatát.

(*3 pont*)

B. 5090. Egy szabályos érme egyik felén $+1$, másik felén -1 szerepel. Egymás után n-szer feldobjuk az érmét, és egy sorba lejegyezzük az n db eredményt. Ezután bármely két szomszédos szám alá leírjuk a szorzatukat, így egy újabb számsorhoz jutunk, ami már csak $(n-1)$ db számból áll. Ezt a műveletet többször is végrehajtjuk, egészen addig, amíg egy egyetlen számból álló sorhoz nem jutunk. Mennyi az így kapott számháromszögben lévő $\frac{n(n+1)}{2}$ darab szám összegének a várható értéke?

(*3 pont*)

B. 5091. Az $A_1A_2\ldots A_{12}$ szabályos 12-szögben legyen P az A_1A_8 és A_6A_{11} átlók metszéspontja, továbbá R az A_7A_8 és A_9A_{11} egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy a PR egyenes harmadolja az A_1A_4 átlót.

(*5 pont*) *Bíró Bálint* (Eger) ötletéből

B. 5092. Kiszámoltuk a $\{0,1,\ldots,n-1\}$ halmaz összes részhalmazában az elemek összegét. Mi lehet n értéke, ha a kapott 2^n darab összegnek pontosan az n-edrésze osztható n-nel?

(*6 pont*)

B. 5093. Két egybevágó szabályos ötszög közös része egy tízszög, amelynek oldalai rendre $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Igazoljuk, hogy

$$a_1a_3+a_3a_5+a_5a_7+a_7a_9+a_9a_1=a_2a_4+a_4a_6+a_6a_8+a_8a_{10}+a_{10}a_2.$$

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (772–774.)

A. 772. Van N ember, és mindegyik gondol egy véletlen egész számra 1 és 19 között (az 1-et és a 19-et is beleértve, nem feltétlenül egyforma eloszlással). A gondolt véletlen számok egymástól függetlenek, és minden emberre igaz, hogy mind a 19 számra legfeljebb 99% valószínűséggel gondol. Ezután összeadják a gondolt N darab számot, és veszik a kapott összeg 19-es maradékát. Bizonyítandó, hogy az így kapott eredmény eloszlása exponenciális sebességgel tart az egyenletes eloszláshoz, azaz létezik olyan $0<c<1$ valós szám, melyre teljesül, hogy az N darab véletlen szám összege mindegyik 19-es maradékot $1/19-c^N$ és $1/19+c^N$ közötti valószínűséggel veszi fel.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)