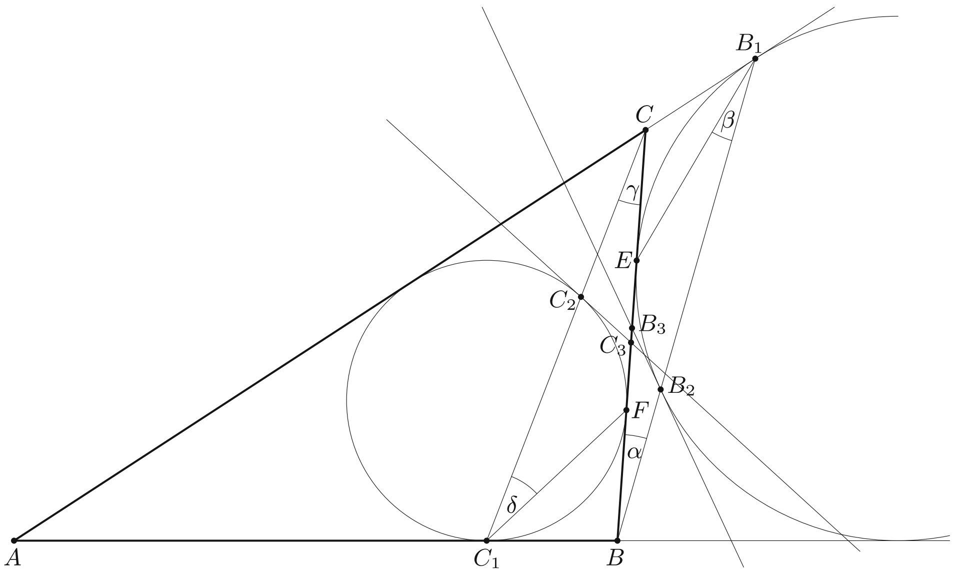
Matematika feladatok megoldása

B. 5013. *Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az AC egyenest a B_1 pontban érinti, a BB_1 szakasz a hozzáírt kört B_2-ben metszi, és a hozzáírt körhöz B_2-ben húzott érintő a BC oldalt B_3-ban metszi. Hasonlóan, a háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1 pontban érinti, a CC_1 szakasz a beírt kört C_2-ben metszi, és a beírt körhöz C_2-ben húzott érintő a BC oldalt a C_3 pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $B_2B_3 = C_2C_3$.*

(*6 pont*)

Megoldás. Az A-val szemközti hozzáírt kör és a beírt kör érintsék a BC oldalt rendre az E és F pontokban. Legyen $B_1BC\sphericalangle = \alpha$, $EB_1B_2\sphericalangle = \beta$. A $B_3EB_2\sphericalangle$ a hozzáírt körön a B_2E ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög, így $B_3EB_2\sphericalangle = EB_1B_2\sphericalangle = \beta$, és hasonlóan $EB_2B_3\sphericalangle = \beta$. Így $BB_3B_2\sphericalangle = 2\beta$, ezért $BB_2B_3\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 2\beta$. Innen $EB_2B_1\sphericalangle = 180^\circ - BB_2B_3\sphericalangle - EB_2B_3\sphericalangle$ miatt $EB_2B_1\sphericalangle = \alpha + \beta$ adódik. Ez a hozzáírt körön a rövidebb EB_1 ívhez tartozó kerületi szög, ami egyenlő az ehhez az ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekkel, tehát $CEB_1\sphericalangle = CB_1E\sphericalangle = \alpha + \beta$, és így $B_1CE\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Könnyű látni azt is, hogy $BB_1C\sphericalangle = EB_1B_2\sphericalangle + EB_1C\sphericalangle = \beta + (\alpha + \beta) = \alpha + 2\beta$.



Írjuk fel ezután a szinusztételt a BB_2B_3 és a BCB_1 háromszögekre:

$$\frac{BB_3}{B_3E}=\frac{BB_3}{B_3B_2}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha-2\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha},$$

$$\frac{BC}{CB_1}=\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha};$$

ezekből $\frac{BB_3}{B_3E}=\frac{BC}{CB_1}$, így $\frac{BE}{B_3E}=\frac{BB_3+B_3E}{B_3E}=\frac{BB_3}{B_3E}+1=\frac{BC}{CB_1}+1$, ezért (a szokásos jelölésekkel)

$$B_2B_3=B_3E=\frac{BE}{\frac{BC}{CB_1}+1}=\frac{s-c}{\frac{a}{s-b}+1}.$$

Hasonlóan, legyen $C_2CC_3\sphericalangle=\gamma$, $CC_1F\sphericalangle=\delta$. Ekkor a rövidebbik C_2F ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekként $C_3C_2F\sphericalangle=C_3FC_2\sphericalangle=\delta$, ezért $C_2C_3C\sphericalangle==2\delta$, így $CC_2C_3\sphericalangle=180^\circ-(\gamma+2\delta)$,

$$C_1C_2F\sphericalangle=180^\circ-CC_2F\sphericalangle=180^\circ-(CC_2C_3\sphericalangle+\delta)=$$

$$=180^\circ-\big(180^\circ-(\gamma+2\delta)+\delta\big)=\gamma+\delta.$$

Innen $C_2FC_1\sphericalangle=180^\circ-(\gamma+2\delta)$, $BC_1F\sphericalangle=BFC_1\sphericalangle=\gamma+\delta$, tehát $BC_1C\sphericalangle==BC_1F\sphericalangle+\delta=\gamma+2\delta$.

Írjuk fel a szinusztételt, ezúttal a CC_2C_3 és a CC_1B háromszögekre:

$$\frac{CC_3}{C_2C_3}=\frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma},\quad \frac{BC}{BC_1}=\frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma},$$

ezért $\frac{CC_3}{C_3F}=\frac{CC_3}{C_2C_3}=\frac{BC}{BC_1}$, $\frac{CF}{C_3F}=\frac{CC_3+C_3F}{C_3F}=\frac{CC_3}{C_3F}+1=\frac{BC}{BC_1}+1$, így

$$C_2C_3=C_3F=\frac{CF}{\frac{BC}{BC_1}+1}.$$

Tehát

$$C_2C_3=\frac{CF}{\frac{BC}{BC_1}+1}=\frac{s-c}{\frac{a}{s-b}+1}=B_2B_3.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

12 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 9 versenyző: Asztalos Ádám, Beke Csongor, Csaplár Viktor, Kovács Tamás, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Tiderenczl Dániel, Várkonyi Zsombor, Weisz Máté. 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 5016. *Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. Úgy jelöljük ki az AD oldal E_1, a BC oldal F_1, az AC átló E_2 és a BD átló F_2 pontját, hogy*

$$AE_1:E_1D=BF_1:F_1C=AE_2:E_2C=BF_2:F_2D=AB:CD.$$

Tudjuk, hogy semelyik két pont nem esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az E_1F_1 és E_2F_2 egyenesek merőlegesek egymásra.

(*4 pont*)

I. megoldás. Legyen $AB=a$ és $CD=c$. A CE_2F_1 és a CAB háromszögek hasonlóak, mivel $ACB\sphericalangle = E_2CF_1\sphericalangle$, valamint

$$\frac{CE_2}{CA}=\frac{CE_2}{CE_2+E_2A}=\frac{1}{\frac{CE_2+E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}$$

és

$$\frac{CF_1}{CB}=\frac{CF_1}{CF_1+F_1B}=\frac{1}{\frac{CF_1+F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}.$$

Így $\frac{E_2F_1}{AB}=\frac{CE_2}{CA}=\frac{c}{c+a}$, tehát $E_2F_1=\frac{c}{c+a}\cdot a=\frac{ac}{c+a}$.

A fentiekhez hasonlóan $\frac{CE_2}{CA}=\frac{CF_1}{CB}=\frac{DE_1}{DA}=\frac{DF_2}{DB}$. Ezt és a megfelelő szögek egyenlőségét felhasználva:

(1) $$CE_2F_1\Delta \sim CAB\Delta,$$

(2) $$E_1AE_2\Delta \sim DAC\Delta,$$

(3) $$F_2BF_1\Delta \sim DBC\Delta,$$

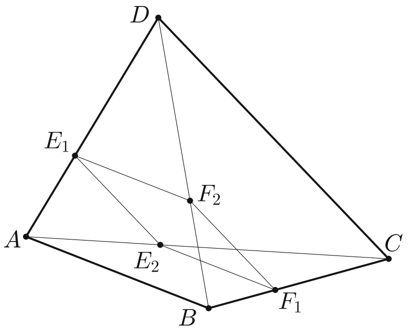
(4) $$DE_1F_2\Delta \sim DAB\Delta.$$

(1) és (4) esetében a hasonlósági arány $\frac{c}{c+a}$, így $E_1F_2=E_2F_1=a\cdot\frac{c}{c+a}=\frac{ac}{c+a}$.

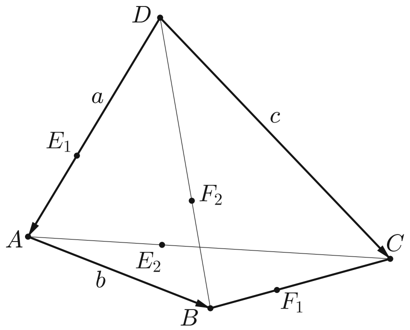
(2) és (3) esetében a hasonlósági arány $\frac{a}{c+a}$, így $E_1E_2=F_1F_2=c\cdot\frac{a}{c+a}=\frac{ac}{c+a}$.

Tehát $E_1E_2F_1F_2$ rombusz, ezért az átlói merőlegesek egymásra (*1. ábra*).

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 8. évf.)



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Célunk belátni, hogy az $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami pontosan akkor teljesül, ha a skaláris szorzatuk 0.

Jelölje a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, illetve $\mathbf{b}$, hosszukat a megfelelő kisbetű; legyen továbbá $\frac{b}{b+c}=\beta$ (*2. ábra*).

Ekkor

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c},\quad \overrightarrow{BD}=-\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \overrightarrow{AC}=-\mathbf{a}+\mathbf{c},$$

ezért

$$\overrightarrow{AE_2}=\beta\overrightarrow{AC}=-\beta\mathbf{a}+\beta\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF_2}=\mathbf{b}+\beta\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}+\beta(-\mathbf{b}-\mathbf{a})=-\beta\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b},$$

így $\overrightarrow{E_2F_2}=\overrightarrow{AF_2}-\overrightarrow{AE_2}=\big(-\beta\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b}\big)-(-\beta\mathbf{a}+\beta\mathbf{c})=(1-\beta)\mathbf{b}-\beta\mathbf{c}$. Hasonlóan

$$\overrightarrow{BF_1}=\beta\overrightarrow{BC}=\beta(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\beta\mathbf{c}-\beta(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\beta\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}+\beta\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{BE_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE_1}=-\mathbf{b}-\beta\mathbf{a},$$

ezért $\overrightarrow{E_1F_1}=\overrightarrow{BF_1}-\overrightarrow{BE_1}=(1-\beta)\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$. Felírva $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{E_1F_1}\cdot\overrightarrow{E_2F_2}=\big((1-\beta)\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}\big)\big((1-\beta)\mathbf{b}-\beta\mathbf{c}\big)=(1-\beta)^2b^2-\beta^2c^2=$$

$$=\left(\frac{b+c-b}{b+c}\right)^2b^2-\left(\frac{b}{b+c}\right)^2c^2=\frac{c^2b^2}{(b+c)^2}-\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}=0.$$

Tehát a két vektor skaláris szorzata 0, vagyis merőlegesek egymásra.

48 dolgozat érkezett. 4 pontos 43, 3 pontos 2, 2 pontos 3 dolgozat.

B. 5027. *Gombóc Artúr az Édes utca 1. szám alatt lakik, a csokibolt pedig az utca másik végén, az n-edik szám alatt található. Artúr minden nap a következő fitneszedzést tartja: elindul a 2-es számú ház elől. Ha a k-adik számú ház előtt áll (ahol $1<k<n$), akkor feldobja lejárt szavatosságú, de szabályos csokiérméjét. Fej esetén átmegy a $(k-1)$-es számú, míg írás esetén a $(k+1)$-es számú ház elé. Ha a csokibolt elé ér, akkor betér, és legurít egy csokigolyót, majd az $(n-1)$-es számú ház elé megy. Ha hazaér, vége az edzésnek. Naponta átlagosan hány csokigolyót gurít le Artúr?*

(*5 pont*)

Megoldás. Naponta átlagosan 1 csokigolyót gurít le. Hívjuk n-edzésnek az n hosszú utcában végzett edzést, és legyen $f(n)$ az átlagosan megevett csokigolyók száma. Teljes indukcióval látjuk be, hogy $f(n)=1$. Az állítás $n=2$-re nyilván igaz. Feltéve, hogy $n=k\geqslant 2$-re igaz, vizsgáljuk az $n=k+1$ esetet. A $(k+1)$-es edzés kezdetén $\frac{1}{2}$ eséllyel csinál egy k-as edzést és visszaér a 2-es házba, és $\frac{1}{2}$ eséllyel visszamegy az 1-es házba 0 csokigolyóval. Ha csinált egy k-as edzést, utána megint $\frac{1}{2}$ eséllyel egy k-as edzést végez, és $\frac{1}{2}$ eséllyel visszamegy az 1-es házba stb. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{2^l}+\frac{1}{2^{l+1}}+\ldots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^l}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1},$$

felírható a következő:

$$f(k+1)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}f(k)+\frac{1}{8}\cdot 2f(k)+\frac{1}{16}\cdot 3f(k)+\ldots=$$
$$=f(k)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+f(k)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots=$$
$$=f(k)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=f(k).$$

Ezzel az állítást beláttuk $n=k+1$ esetére is.

Tehát Artúr átlagosan minden nap 1 csokigolyót gurít le.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 10 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Győrffi Ádám György, Hegedűs Dániel, Nagy Nándor, Osztényi József, Soós Máté, Szabó Kornél, Török Mátyás, Weisz Máté. 4 pontos 12, 3 pontos 7, 2 pontos 1, 1 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (654–658.)

K. 654. Egy összejövetelen 20 ember vett részt. Menet közben az derült ki, hogy mindenki pontosan 13 embert ismer a résztvevők közül (az ismeretség kölcsönös). Hány közös ismerőse van a jelenlevők között a társaság két tetszőlegesen kiválasztott tagjának, ha a közös ismerőseik száma a lehető legkevesebb?

K. 655. Az $\overline{ABCD}$, $\overline{BCBA}$, $\overline{BDAB}$ és $\overline{DDAD}$ négyjegyű számok különböző négyjegyű prímek (a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek). Melyek ezek a számok? Annak ellenőrzésére, hogy egy konkrét négyjegyű szám prímszám-e, használható a `http://matek.com/szamok/primszamok` weboldal.

K. 656. Adott egy 21 cm-szer 29 cm méretű, téglalap alakú papírlap. Hogyan lehet vele kimérni

a) pontosan 3 cm-es távolságot

b) pontosan 1 cm-es távolságot

minden egyéb segédeszköz felhasználása nélkül? (A papírlap hajtogatása megengedett.)

K. 657. Adjuk meg 1–10 000-ig a 99 összes olyan többszörösét, amely számjegyeinek összege nem osztható 18-cal.