9. *Van hatféle számkártyánk, mindegyikből* 1-1 *darab:* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.*

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ *annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz* 12*-vel.*

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6*-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy* 12*-vel osztható.*

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (*16 pont*)

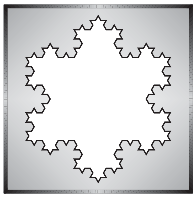
Megoldás. *b)* $\frac{1}{8}$; *c)* 388 888,5.

❄

Részletesebb megoldás a **Matematika érettségi emelt szinten** című könyvben található, amely megrendelhető a KöMaL honlapján. A könyv 24 gyakorló feladatsort tartalmaz a megoldásokkal együtt.

Összeállította:
Számadó László
Budapest

C gyakorlatok megoldása



C. 1528. *Milyen pozitív egész számot jelölhet* n*, ha tudjuk, hogy az* n^3 *szám utolsó három számjegyét letörölve az* n *számot kapjuk vissza?*

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Vizsgáljuk meg, mit kapunk $n=100$, illetve $n=9$ esetén.

Ha $n=100$, akkor $n^3=1\,000\,000$, vagyis az utolsó 3 számjegyet letörölve 1000-et kapunk. Ebből az következik, hogy n egy-, vagy kétszámjegyű, mert ha három-, vagy többjegyű lenne, akkor n^3 négy vagy több számjeggyel többet tartalmazna, mint az n szám.

Ha $n=9$, akkor $n^3=729$, ebből pedig nem lehet három számjegyet letörölni úgy, hogy maradjon egy n szám.

Tehát n kétszámjegyű kell, hogy legyen. Ekkor n^3 számjegyeinek száma öt, hiszen így lesz az utolsó három számjegy letörlésével kapott szám kétszámjegyű. Jelölje az n tízes helyiértékén álló számjegyet a, az egyes helyiértékén állót pedig b. Ekkor arra kell törekednünk, hogy n^3 tízezres helyiértékén a, ezres helyiértékén pedig b álljon.

Mivel $1000n = \overline{ab000}$ és $1100n = \overline{ab000} + \overline{ab00}$, ez csak úgy érhető el, ha $1000 \leqslant \leqslant n^2 < 1100$, hiszen más esetben vagy nem a lesz a tízezres helyiértéken, vagy nem b lesz az ezres helyiértéken. Csak két pozitív egész számnak esik a négyzete 1000 és 1100 közé. Ez a két szám a 32 és a 33: $32^2 = 1024$ és $33^2 = 1089$.

$32^3 = 32768$, az utolsó három számjegyet letörölve 32-t kapunk. Tehát $n = 32$ megoldás.

$33^2 = 35937$, az utolsó három számjegyet letörölve 35-öt kapunk, így ez nem megoldás.

Tehát az n csak a 32-t jelölheti.

Majerusz Ádám (Miskolci Herman Ottó Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A legtöbben a honlapon olvasható megoldás gondolatmenetét követték: A kitörölt háromjegyű számot $\overline{abc}$-vel jelölve $1000n = n^3 - \overline{abc}$, amiből $n(n^2 - 1000) = = \overline{abc} > 0$, vagyis $n > \sqrt{1000}$, és innen már levezethető a megoldás.

239 dolgozat érkezett. 5 pontos 80, 4 pontos 49, 3 pontos 22, 2 pontos 25, kevesebb további 63 tanuló dolgozata.

C. 1557. *A kétjegyű pozitív egész számok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy a két számnak van közös számjegye?*

I. megoldás. Összesen $\binom{90}{2} = \frac{90\cdot 89}{2} = 9 \cdot 5 \cdot 89 = 4005$-féleképpen választhatunk ki 2 számot a 90 darab kétjegyű szám közül.

A jó lehetőségeket számoljuk össze aszerint, hogy a közös számjegy mi.

Ha a közös számjegy 0, akkor a lehetséges számok, amik közül választottunk, a $10, 20, \ldots, 90$. Ez $\binom{9}{2} = 36$ eset.

Ha a közös számjegy 1, akkor a lehetséges számok, amik közül választhatunk, a $10, 11, 12, \ldots, 19; 21, 31, \ldots, 91$. Vagyis $10 + 8 = 18$ számból választunk 2-t, amit $\binom{18}{2} = \frac{18\cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$-féleképp tehetünk meg.

Ha a közös számjegy 2, akkor a lehetséges számok $20, 21, 22, \ldots, 29; 12, 32, \ldots, 92$. Ez szintén 18 szám, tehát itt is $\binom{18}{2} = 153$-féleképp választhatunk.

Ugyanennyi eset van, ha a közös számjegy $3, 4, \ldots, 9$.

Duplán számoltuk azokat az eseteket, mikor a két kiválasztott szám egymás fordítottja: $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$, ahol a két számjegy különböző. Ilyen eset $\binom{9}{2} = 36$ van, hiszen a kilenc számjegyből kettőt választunk ki.

Tehát a jó lehetőségek száma:

$$36 + 9 \cdot 153 - 36 = 9 \cdot 153.$$

A kérdezett valószínűség:

$$p = \frac{9 \cdot 153}{9 \cdot 5 \cdot 89} = \frac{153}{445} \approx 0{,}3438.$$

Feczkó Nóra (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

II. megoldás. Készítsünk egy gráfot, amelynek a csúcsai a kétjegyű pozitív egész számok, és két csúcs között akkor fusson él, ha a hozzájuk tartozó két számnak van közös számjegye. Ekkor a keresett valószínűség

$$P = \frac{\text{élek száma}}{\binom{90}{2}}.$$

Most számoljuk meg, hány éle van a gráfunknak. Ehhez 3 típusba osztjuk a csúcsokat:

1. típus: xx alakú csúcsok (azonos számjegyekből álló kétjegyű számok). Ilyen alakú számból 9 db van, és mindegyikből 17 él indul ki: az xy alakú csúcsokba, ahol $y \neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú csúcsokba, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

2. típus: xy típusú csúcsok, ahol x, y különböző és $y \neq 0$ (és természetesen $x \neq 0$, hiszen kétjegyű számról van szó). Ilyen csúcsból $9 \cdot 8 = 72$ db van, mindegyikből 33 él indul ki: az xz típusú csúcsokba, ahol $z \neq y$ tetszőleges számjegy (9 db), a zx típusúakba, ahol $0 \neq z \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az yz típusú csúcsokba, ahol $z \neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és a zy típusúakba, ahol $z \notin \{0, x, y\}$ tetszőleges számjegy (7 db).

3. típus: $x0$ alakú csúcsok (ahol $x \neq 0$, hiszen kétjegyű számokat vizsgálunk). 9 db ilyen szám van, mindegyik 25 másik csúccsal van összekötve: az $y0$ alakú csúcsokkal, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az xy alakúakkal, ahol $0 \neq y$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú számokkal, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

Azaz az élek száma:

$$\frac{9 \cdot 17 + 72 \cdot 33 + 9 \cdot 25}{2} = 1377.$$

Így a keresett valószínűség

$$P = \frac{1377}{4005} = \frac{153}{445}.$$

Azaz $\frac{153}{445}(\approx 0{,}3438)$ annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két számnak van közös számjegye.

III. megoldás. Számoljunk komplementer-módszerrel. Összesen $\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$-féleképpen választhatunk ki két kétjegyű számot. Ezek közül válasszuk ki azokat a párokat, amikben nincs közös számjegy. Négy esetet különböztetünk meg.

I. eset. Mind a 4 jegy különböző, és nincs közöttük 0. Ilyen esetből $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2}$ van, mert minden jegynek különböznie kell a többitől, és a két számot felcserélve is beleszámoltuk.

II. eset. Mind a 4 jegy különböző, és van közöttük 0. Ilyenből $9 \cdot 8 \cdot 7$ pár van, mert a 0 csak az egyesek helyén állhat, így kilenc darab szám, a kerek tízesek, lehet a pár egyik tagja, a másik tag két számjegye pedig a maradék számjegyek közül szabadon választható.

III. eset. A két szám közül az egyik 11-gyel osztható. Ilyenből $9\cdot 8\cdot 8$ van, mert 9 darab 11-gyel osztható kétjegyű szám van, a másik szám két jegye pedig a maradék jegyek közül választható (csak az első számjegy nem lehet 0).

IV. eset. Mindkét szám 11-gyel osztható. 9 darab 11-gyel osztható szám van, ezek közül $\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{2}$-féleképpen választhatunk ki kettő különbözőt.

Az esetek között nincs átfedés, így a keresett valószínűség:

$$\frac{4005-\left(\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2}+9\cdot 8\cdot 7+9\cdot 8\cdot 8+\frac{9\cdot 8}{2}\right)}{4005}=$$

$$=\frac{4005-(1512+504+576+36)}{4005}=\frac{4005-2628}{4005}=\frac{1377}{4005}.$$

Hajós Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

IV. megoldás. 90 darab kétjegyű pozitív egész szám van. Ezek közül kettőt $\binom{90}{2}=\frac{90\cdot 89}{2}=4005$-féleképpen lehet kiválasztani.

A „kidobom a rosszat” elv alapján keressük azokat a párokat, melyeknek nincs közös számjegyük. Ehhez veszünk egy számot, és megnézzük, hány megfelelő párt találunk hozzá.

Három eset van.

1. eset. A kétjegyű szám $\overline{a0}$ alakú. Ekkor a számnak $8\cdot 8=64$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám 9 db van, tehát ebben az esetben $9\cdot 64=576$ számpárt találtunk.

2. eset. A kétjegyű szám $\overline{aa}$ alakú. Ekkor a számnak $8\cdot 9=72$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye, mivel a 0 nem állhat a tízes helyiértéken. Ilyen alakú szám is 9 db van. Tehát ebben az esetben $9\cdot 72=648$ párt találtunk.

3. eset. A kétjegyű szám $\overline{ab}$ alakú. Ekkor a számnak $7\cdot 8=56$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám $90-9-9=72$ db van. Tehát ebben az esetben $72\cdot 56=4032$ párt találtunk.

Összesen $\frac{576+648+4032}{2}=2628$ db pár van, mivel az összeszámolásnál mindegyik párt kétszer számoltuk. $4005-2628=1377$ olyan pár van, amelyben a kétjegyű számoknak van közös számjegye. Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{1377}{4005}\approx$ $\approx 34{,}38\%$.

Németh Máté Előd (Révai Miklós Gimnázium, Győr, 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Sokan nem vették figyelembe, hogy a két számot nyilvánvalóan egyszerre választjuk ki, tehát nem lehetnek egyformák.

2. Sokan pedig úgy tekintették, mintha egy számpárt kétféleképpen is választhatnánk, azaz az összes lehetőségek számát sem, illetve a jó lehetőségek számát sem osztották 2-vel. Ekkor ugyan a végeredmény végül helyes, ám a gondolatmenetben van hiba.

3. Sok-sok apró hiba volt, ezért a sok hiányos dolgozat.

252 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 53, 3 pontos 37, 2 pontos 27, 1 pontos 30, 0 pontos 42 dolgozat. Nem versenyszerű 4 dolgozat.