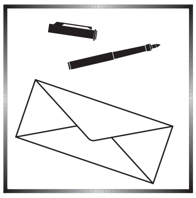
3. Adott az $OA_1A_2A_3$ tetraéder mindegyik OA_i élén egy B_i belső pont, az OA_i él A_i-n túli meghosszabbításán pedig egy C_i pont $(i = 1, 2, 3)$. Tegyük fel, hogy az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt hat lapú testbe, továbbá az $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is egy-egy gömböt lehet írni. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is gömböt lehet írni. (KöMaL A. 547., 2011. november)

Kós Géza



Monoton leképezések fixpontjai I.

A KöMaL egy régi száma pontverseny kívüli problémaként közölte a Knaster–Tarski-féle fixponttételt. Cikkünkben elsőként fölidézzük a problémát, majd bemutatjuk egyik legfontosabb, halmazelmélethez kötődő alkalmazását. Ezáltal egyben bepillantást kívánunk adni a számosságaritmetika lenyűgözően szép, meglepetésekkel teli világába is.

1. Bevezetés

A magyar matematikatanítás méltán híres arról, hogy az aktuális kutatási irányokat igen gyakran a versenyfeladatok szintjén igyekszik megjeleníteni. Jól tükrözik ezt az elvet a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok problémái. Még a múlt is hozhat meglepetést! Különösen, amikor egy olyan, régen kitűzött feladattal találkozunk, melyet az egyetemi katedra mindkét oldalának közönsége ismerősként üdvözölhet. Ragyogó példa erre a **P. 329** jelzésű pontversenyen kívüli probléma, amelyet Szegedy Patrik megoldásával együtt [2] az alábbiakban közlünk.

P. 329. *Egy X halmaz minden A részhalmazához hozzárendelünk egy $F(A)$ részhalmazt úgy, hogy ha $A \subset B$, akkor $F(A) \subseteq F(B)$. Mutassuk meg, hogy van olyan $H_0 \subseteq X$ részhalmaz, amelyre $F(H_0) = H_0$ teljesül.*

Megoldás. Álljon a $\mathcal{H}$ halmazcsalád azokból a $H \subseteq X$ halmazokból, melyekre $F(H) \subseteq H$. Ez a $\mathcal{H}$ család nem üres, mert X eleme, hiszen $F(X) \subseteq X$ biztosan teljesül. Legyen a $\mathcal{H}$-beli halmazok közös része H_0. Mit tudunk az $F(H_0)$ halmazról?

Ha H tetszőleges $\mathcal{H}$-beli halmaz, akkor $H_0 \subseteq H$ miatt fönnáll, hogy $F(H_0) \subseteq$ $\subseteq F(H)$. Ebből pedig $F(H) \subseteq H$ alapján (ez volt a $\mathcal{H}$-beli halmazok definiáló tulajdonsága) $F(H_0) \subseteq H$ következik. Tehát az $F(H_0)$ halmazt minden $\mathcal{H}$-beli halmaz tartalmazza, így metszetük, H_0 is: $F(H_0) \subseteq H_0$. Ugyanakkor $F(H_0) \subseteq H_0$-ból $F\big(F(H_0)\big) \subseteq F(H_0)$ adódik, tehát (definíció szerint) az $F(H_0)$ halmaz $\mathcal{H}$-beli. A H_0

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-2 és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

minden $\mathcal{H}$-beli halmaznak része, így $H_0 \subseteq F(H_0)$. Ezt az előbbi $F(H_0) \subseteq H_0$ eredményünkkel összevetve $F(H_0) = H_0$, ami azt jelenti, hogy a keresett részhalmazt megtaláltuk. $\square$

Adott X halmaz esetén jelölje $\mathscr{P}(X)$ az X összes részhalmazainak halmazát, másképpen mondva: *hatványhalmazát.* Azt mondjuk, hogy az $F: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezés *monoton,* ha megőrzi a tartalmazást, vagyis $A \subseteq B \subseteq X$ esetén $F(A) \subseteq F(B)$ is teljesül. Az F leképezésnek $H \subseteq X$ *fixpont*ja, ha $F(H) = H$. Ezekkel az elnevezésekkel a **P. 329** probléma tömören így is megfogalmazható:

Tétel. *Adott hatványhalmaz bármely monoton leképezésének létezik fixpontja.*

Ez az állítás először a Lengyel Matematikai Társulat Varsói Részlegének ülésén hangzott el 1927-ben, és azóta Knaster–Tarski-féle fixponttételként szokás hivatkozni [1]. Később, az eredetileg Knaster által előadott eredményt Tarski [3] fejlesztette tovább, számos meglepő és hatékony alkalmazást adva a halmazelmélet, logika, absztrakt algebra és valós függvénytan terén. Manapság úgy tekintünk Knaster és Tarski eredményére, mint a monoton leképezések fixpontelméletének első zsengéjére.

A Knaster–Tarski-féle fixponttételnek már az eredeti változata is jelentős alkalmazásokkal bír. Az egyik legfontosabb a számosságaritmetika terén Schröder–Bernstein-tételként ismert állítás. Fő célunk ezt, és ennek néhány következményét bemutatni, és egyúttal rövid barangolást tenni a számosságok meglepő és izgalmas birodalmába.

2. A számosságaritmetika alapjai

Azt mondjuk, hogy két halmaz *egyenlő számosságú,* vagy másképpen: *ekvivalens,* ha létezik közöttük egy bijekció, azaz kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha A és B ekvivalens halmazok, akkor ezt az $A \sim B$ módon jelöljük. A halmazok ekvivalenciája egyfajta „számolás” számfogalom nélkül. Birtokában nemcsak a halmazok elemszám szerinti egyenlőségét értelmezhetjük, hanem a végtelen halmaz fogalmát is bevezethetjük. Egy halmaz *végtelen,* ha létezik önmagával ekvivalens valódi részhalmaza. Eszerint a pozitív egészek $\mathbb{N}$ halmaza végtelen, hiszen a $\varphi(n) = n + 1$ módon értelmezett leképezés bijektíven hat $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ között. A pozitív egészek halmazával ekvivalens halmazok a *megszámlálhatóan végtelen* halmazok. Igen egyszerűen nyerjük például, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen. Ehhez elegendő csupán a

$$\varphi(k) := \begin{cases} 2(k-1), & \text{ha } k \in \mathbb{N}, \\ 1 - 2k, & \text{ha } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

módon értelmezett, $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bijektív leképezést tekinteni. Tehát a $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ állítás közvetlenül, definíció szerint igazolható.

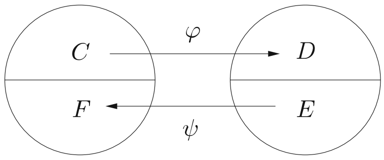
Az ekvivalencia közvetlen ellenőrzése azonban általában nehéz, így egy hatékonyabb módszer kidolgozása szükséges. Ehhez elsőként bevezetjük az injektív leképezés fogalmát. A $\varphi: A \to B$ leképezés *injektív,* ha $\varphi(a) = \varphi(a^*)$ esetén $a = a^*$

következik. Ha létezik ilyen injektív leképezés, akkor az A halmazt *kisebb vagy egyenlő számosságú*nak nevezzük a B halmaznál. Ezt jelölésben az $A \preceq B$ módon fejezzük ki.

Nyilvánvalóan minden bijekció inverzével együtt injektív, tehát ha két halmaz ekvivalens, akkor bármelyik kisebb vagy egyenlő számosságú a másiknál. Jelölésekkel élve, ha $A \sim B$, akkor $A \preceq B$ és $B \preceq A$ teljesül. Ennek az észrevételnek a megfordítása is érvényes, amelyet a Schröder–Bernstein-tétel fogalmaz meg. Az állítás leképezések nyelvén így szól: *Ha egy halmaz injektíven képezhető egy másikba és a másik az egyikbe, akkor létezik köztük bijekció is.* A bizonyítás a Knaster–Tarski-féle fixponttételre támaszkodik. Mielőtt a részletekre térnénk, szükségünk lesz a következőkre. Ha a H részhalmaza egy X alaphalmaznak, és $f: X \to X$ egy függvény, akkor a H halmaz f általi képét a szokásos $f(H) := \{f(x) \mid x \in H\}$ módon értelmezzük. Az értelmezésből következik, hogy $A \subseteq B$ esetén $f(A) \subseteq f(B)$ is fennáll. Másképpen fogalmazva, *az* $F_f(H) := f(H)$ *előírással adott* $F_f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ *leképezés monoton.*

Tétel. *Ha* $A \preceq B$ *és* $B \preceq A$*, akkor* $A \sim B$.

Bizonyítás. Az $A \preceq B$ és $B \preceq A$ feltételek miatt léteznek $\varphi: A \to B$ és $\psi: B \to A$ injektív függvények. Célunk annak igazolása, hogy ekkor bijekció is létezik a két halmaz között. Ehhez az A és B halmazokat fogjuk alkalmas módon két-két diszjunkt részre bontani φ és ψ segítségével:



Legyen $C \subseteq A$ tetszőleges, és tekintsük a $D := \varphi(C)$ halmazt. Ekkor nyilván φ bijektíven hat C és D között. Legyen most $E := B \setminus D$, valamint $F := \psi(E)$. Világos, hogy ekkor ψ bijektív E és F között. Ha még ráadásul az is kiderülne, hogy C és F diszjunktak és az uniójuk A, akkor az

$$f(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } x \in C, \\ \psi^{-1}(x), & \text{ha } x \in F \end{cases}$$

módon adott $f: A \to B$ függvény jóldefiniált és bijektív. Kérdés tehát, hogy létezik-e ilyen választás C-re. Az E, F, D halmazok értelmezését szem előtt tartva tehát azt várjuk el, hogy

$$C \stackrel{?}{=} A \setminus F = A \setminus \psi(E) = A \setminus \psi(B \setminus D) = A \setminus \psi\big(B \setminus \varphi(C)\big)$$

teljesüljön. Értelmezzük a $T: \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ leképezést ez utóbbi taggal, azaz legyen $C \subseteq A$ esetén

$$T(C) := A \setminus \psi\big(B \setminus \varphi(C)\big).$$

Egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy T monoton leképezés. Ezért a Knaster–Tarski fixponttétel értelmében valóban létezik olyan C, hogy $T(C) = C$. □

Ezt az állítást elsőként Cantor fogalmazta meg bizonyítás nélkül 1887-ben. Még ugyanebben az évben Dedekind elemi bizonyítást talált, amit nem publikált, sőt Cantort sem értesítette eredményéről. Később 1897-ben, az akkor 19 éves hallgató, Bernstein bemutatta bizonyítását Cantor egyetemi szemináriumán. Bernsteintől függetlenül, ugyancsak 1897-ben Schröder is közölte bizonyítását, amiről később kiderült, hogy hibás.

A Schröder–Bernstein-tétel segítségével egyszerűen kapjuk, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen. Elsőként azt érdemes megmutatni, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Azonnal látható, hogy az $n \longmapsto (n, n)$ leképezés injektív, azaz $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Elegendő tehát csupán egy $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektív leképezést megadnunk. Legyen

$$\varphi(n, m) := 2^n \cdot 3^m.$$

Ha most $\varphi(n, m) = \varphi(k, l)$, akkor definíció szerint $2^n \cdot 3^m = 2^k \cdot 3^l$; az egyértelmű prímfaktorizáció tétele miatt ebből $n = k$ és $m = l$ következik. Tehát $(n, m) = (k, l)$, ami pontosan φ injektivitását mutatja. Ennek mintájára az is igazolható, hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Végezetül, a $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ állítás ebből már következik, hiszen minden racionális szám egyértelműen előáll egy, tovább már nem egyszerűsíthető egész és természetes szám hányadosaként.

Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ igazolása történhet a jól ismert „átlós bejárással”, ami közvetlenül bijekciót eredményez a szóban forgó halmazok között. Azonban végképp föl kell adnunk a közvetlen módszert, ha a $]0, 1[$ intervallum számosságát egy hatványhalmaz számosságával akarjuk kifejezni:

Tétel. $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \,]0, 1[$.

Bizonyítás. Elsőként azt igazoljuk, hogy létezik egy $\varphi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \,]0, 1[$ injektív leképezés. Legyen $A \subset \mathbb{N}$ tetszőleges, nemüres halmaz. Értelmezzük az (a_n) sorozatot és ennek birtokában az x valós számot az alábbiak szerint:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \notin A, \\ 1, & \text{ha } n \in A; \end{cases} \qquad \text{illetve} \qquad x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Világos, hogy az A halmaz egyértelműen meghatározza az (a_n) sorozatot, e sorozat pedig az x valós számot. Nyilvánvaló az is, hogy $x \in \,]0, 1[$. Legyen $\varphi(A) := x$, s tegyük fel, hogy $\varphi(B) = x$ szintén fennáll. Az (a_n) definíciója miatt ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \in A$ pontosan akkor teljesül, ha $n \in B$. Így $A = B$, ami pedig a φ injektivitását adja. Ha $A = \emptyset$, akkor legyen $\varphi(A) := 0{,}2$; ezzel a kiterjesztéssel φ továbbra is injektív.

Most azt igazoljuk, hogy létezik egy $\psi : \,]0, 1[\to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ injektív leképezés. Legyen $x \in \,]0, 1[$, s legyen (x_n) az x tizedesjegyeinek sorozata. Értelmezzük ekkor a $\psi(x)$ halmazt a

$$\psi(x) = \big\{10(n - 1) + x_n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\big\}$$

előírással. Nyilván $\psi(x) \subseteq \mathbb{N}$, tehát $\psi : \,]0,1[\, \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Legyen $y \in \,]0,1[$, jelölje (y_n) az y tizedesjegyeinek sorozatát. Ekkor a $\psi(y)$ halmaz

$$\psi(y) = \big\{10(m-1) + y_m + 1 \mid m \in \mathbb{N}\big\}$$

alakú. Tegyük fel, hogy $\psi(x) = \psi(y)$. Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha elemei ugyanazok, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén található olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$10(n-1) + x_n + 1 = 10(m-1) + y_m + 1.$$

Ha itt $n < m$ teljesül, akkor $n \leqslant m-1$ is fönnáll. Fölhasználva azt is, hogy $x_n \leqslant 9$ és $y_m \geqslant 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 10(n-1) + x_n + 1 &\leqslant 10(m-2) + x_n + 1, \\ &= 10(m-1) + x_n - 9, \\ &\leqslant 10(m-1) < 10(m-1) + y_m + 1, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. Az $m < n$ eset ugyanígy kizárható. Tehát $m = n$, amiből pedig $x_n = y_n$ következik. Ez azt mutatja, hogy x és y tizedestört alakja azonos. Mivel a tizedestört alak egyértelmű, ezért $x = y$. Vagyis ψ injektív.

Az eddigieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \preceq \,]0,1[$ és $]0,1[\,\preceq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ egyszerre teljesülnek. Így a Schröder–Bernstein-tétel fényében $]0,1[\,\sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$ is fönnáll. $\square$

Világos, hogy a $]0,1[$ intervallum, s ennélfogva $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz. Fölmerül a kérdés, hogy ez a közös számosság milyen kapcsolatban áll a megszámlálhatóan végtelennel. Cantor alábbi tétele ennél sokkal általánosabb kérdést válaszol meg: a hatványhalmaz számossága mindig *szigorúan nagyobb* a halmaz számosságánál.

Tétel. $A \prec \mathscr{P}(A)$.

Bizonyítás. Ha $A = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen ekkor $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$ nem üres. Föltehető, hogy A nem üres. Nyilván $\mathscr{P}(A)$ egyelemű részhalmazai és A elemei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak, tehát $A \preceq \mathscr{P}(A)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik egy $\varphi : A \to \mathscr{P}(A)$ bijekció. Legyen ekkor

$$B = \big\{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\big\}.$$

Mivel φ bijektív, ezért van olyan $b \in A$, hogy $\varphi(b) = B$. Ha most $b \in B$, akkor ez azt jelenti, hogy $b \notin \varphi(b)$ teljesül. Azonban $\varphi(b) = B$, ami ellentmondás. Ha $b \notin B$, akkor ebből $b \notin \varphi(b)$, azaz $b \in B$ adódik, ami szintén ellentmondás. $\square$

A $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ halmazzal ekvivalens halmazokat *kontinuum számosságú*nak nevezzük. Megmutatható, hogy bármely intervallum, az irracionális számok halmaza, vagy a valós számok halmaza kontinuum számosságú. Így, a számhalmazok körében a kontinuum a legnagyobb előforduló számosság, hiszen a föntiek szerint a kontinuum a megszámlálható végtelennél „nagyobb" végtelen. Azonban Cantor tételéből ennél jóval több következik. Minden számosságnál létezik nagyobb számosság! Jogosan mondhatjuk tehát: ez azért már mégiscsak több a soknál …

Hivatkozások

[1] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur lesfonctions d'ensembles,* Ann. Soc. Polon. Math., **6** (1927), 133–134.

[2] P. Szegedy, *Solution to problem P. 329,* KöMaL, **61** (1980), no. 2, 75.

[3] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications,* Pacific J. Math., **5** (1955), 285–309.

Bessenyei Mihály és **Pénzes Evelin**
Debrecen

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y} = \frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^x + 4\cdot 2^{-x} = 5. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -2 + 3\cos 2x. \qquad (7\ pont)$$

3. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$1 + \frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)} = \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}. \qquad (8\ pont)$$

b) Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt", azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz várható érték 15)? (*4 pont*)