Feladatok mindenkinek

C. 1590. Oldjuk meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(a+1)^4\cdot(b+1)^4\cdot(c+1)^4=(40a+1)\cdot(40b+1)\cdot(40c+1).$$

C. 1591. Egy hajó koordinátái $x=2$, $y=0$. A szemközti tengerpart az $y=\sqrt{2x+1}$ egyenletű görbe mentén húzódik. Mekkora szögben térjen el a hajó az északi iránytól, ha azt szeretnénk, hogy a part legközelebbi pontját egyenes úton elérje? (Tegyük föl, hogy az x tengely kelet irányába mutat.)

C. 1592. Angliában két jóbarát elindult megkeresni egyikük elveszett jegygyűrűjét. Azt ugyan nem találták meg, de a fémkeresővel néhány VIII. Henrik idejéből származó aranypénzre bukkantak, amelyek 100 000 fontot hoztak a két jóbarátnak. A kitűnő állapotban megmaradt 1 fontos érmék évi átlagos értéknövekedése az 500 év alatt 1,42% és 1,43% között volt. Hány érmét találhattak?

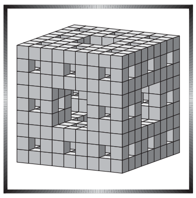
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1593. Egy háromszög két oldala 3 cm, illetve 4 cm hosszú. Mekkora a két oldal által bezárt szög, ha a hozzájuk tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra?

C. 1594. Egy rendezvény nézőterének első sorában 24 szék van. Ezek közül 20 már foglalt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy van 2 üres hely egymás mellett?

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5078–5085.)



B. 5078. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}),\quad \text{ha } n>1.$$

Határozzuk meg a_{2020} értékét.

(*4 pont*)

B. 5079. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_2 \frac{6}{\log_2 3}$$

egyenletet.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5080. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőpontja D, AC szárának C-hez közelebbi harmadolópontja H. A BCH kör a CD egyenest a C és az X pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $CX = \frac{4}{3}r$, ahol r az ABC kör sugara.

(*4 pont*)

B. 5081. Egy háromszögben az a és b odalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

(*3 pont*)

B. 5082. Igazoljuk, hogy tetszőleges háromszögben a magasságok mértani, számtani és négyzetes közepe rendre nem nagyobb a hozzáírt körök sugarainak a mértani, számtani, illetve négyzetes közepénél.

(*5 pont*)

B. 5083. Van-e olyan 100-adfokú valós együtthatós $p(x)$ polinom, melyre a $p\big(p(x)\big)$ polinomnak 10000 különböző valós gyöke van?

(*5 pont*)

B. 5084. Legyen n pozitív egész szám, és legyen $\mathcal{S}$ az n hosszú $0-1-2$ sorozatok halmaza. Határozzuk meg, hogy mely $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{S}$ halmazok rendelkeznek a következő tulajdonsággal: bárhogyan is választunk egy

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{S} \setminus \big\{(0, 0, \dots, 0)\big\}$$

vektort, az A halmaz egy véletlenszerűen választott $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ elemére a $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$ szorzatösszegnek 1/3–1/3 valószínűséggel lesz 0, 1, illetve 2 a hármas maradéka.

(*6 pont*) *Kürschák* feladat alapján

B. 5085. Mutassuk meg, hogy a szabályos hétszöget fel lehet darabolni véges sok, egymáshoz hasonló szimmetrikus trapézra.

(*6 pont*) Javasolta: *Laczkovich Miklós* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄