



Mérési feladat megoldása

M. 389. Erősítsünk vékony fonalat egy tojáshoz, és helyezzük bele egy hengeres edénybe. Öntsünk a tojásra annyi vizet, hogy ellepje a tojást, majd a fonálnál fogva óvatosan emeljük ki a tojást a vízből.

Mérjük meg, hogyan függ a fonalat feszítő erő a tojás elmozdulásától! Határozzuk meg a kiemelés során végzett munkát! Függ-e ez a munka az edény keresztmetszetétől?

(6 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

I. megoldás. I. A felhasznált eszközök: kb. 50 g tömegű főtt tojás, 28 cm² keresztmetszetű mérőhenger, 75 cm² keresztmetszetű konyhai mérőedény, mérőszalag, erőmérő (1 N-os), cérna (a tojásnak az erőmérőre történő erősítéséhez), szükséges mennyiségű víz.

II. A mérés menete. Miután megfőztük a tojást, egy celluxdarabbal egy cérnát erősítettünk rá, aminek a másik végére egy hurkot kötöttünk (a mérés során ebbe akasztottuk az erőmérőt). A tojást belehelyeztük először a mérőhengerbe, és annyi vizet öntöttünk rá, hogy teljesen ellepte. Megemeltük a tojást addig a pontig, amíg teljes terjedelmével még éppen benne volt a vízben, és leolvastuk az erőmérőt. Ezután a mérőszalagot a henger mellé állítva lassan kiemeltük a tojást a vízből úgy, hogy cm-enként leolvastuk az erőmérő által mutatott F értékeket. A mérés során végig a cérnaszál egy kiszemelt pontjának $\Delta\ell$ elmozdulását követtük (például a tojás tetejének és a cérna találkozási pontjának elmozdulását).

III. A mérési adatok. A mérést háromszor végeztük el, majd ugyancsak háromszor a másik edénnyel is, ugyanezzel a módszerrel. Az adatokat és az azokból számolt átlagos erőket táblázatba foglaltuk:

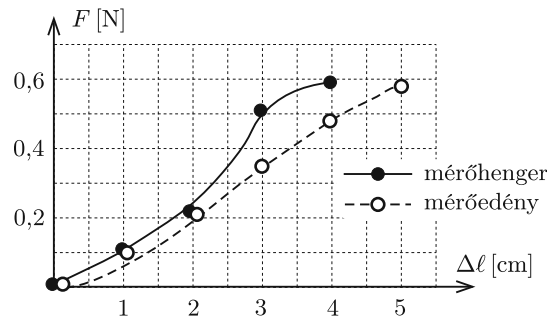
mérőhengerrel

$\Delta\ell$ [cm]	F_1 [N]	F_2 [N]	F_3 [N]	$F_{\text{átlag}}$ [N]
0	0,02	0,02	0,02	0,02
1	0,12	0,10	0,08	0,10
2	0,22	0,20	0,22	0,21
3	0,54	0,50	0,48	0,51
4	0,58	0,58	0,58	0,58

mérőedényvel

$\Delta\ell$ [cm]	F_1 [N]	F_2 [N]	F_3 [N]	$F_{\text{átlag}}$ [N]
0	0,02	0,02	0,02	0,02
1	0,08	0,12	0,10	0,10
2	0,20	0,22	0,2	0,21
3	0,32	0,33	0,34	0,33
4	0,50	0,46	0,46	0,47
5	0,58	0,58	0,58	0,58

IV. *Grafikon.* A mérési adatok alapján milliméterpapíron grafikont készítünk:



V. *A kiemelés során végzett munka kiszámítása.* A kis elmozdulásokra érvényes $\Delta W = F \cdot \Delta\ell$ képlet alapján kimondhatjuk, hogy az erő-elmozdulás grafikonon a görbe alatti terület számértéke megegyezik a végzett munka számértékével. Ezt jó közelítéssel viszonylag könnyen megkaphatjuk, ha a cm-enként egy-egy átlagos erővel kiszámoljuk a munkákat, majd ezeket összeadjuk. Az eredmény:

$$W_{\text{mérőhenger}} = 11,2 \text{ mJ}; \quad W_{\text{mérőedény}} = 14,1 \text{ mJ}.$$

Látható, hogy a nagyobb keresztmetszetű mérőedényből nehezebben (több munkával) tudjuk kiemelni a tojást, mint a szűkebb mérőhengerből.

VI. *A mérési eredmény értelmezése.* A végzett munkák közötti eltérés a kiszorított víz energiaváltozásával magyarázható. Amikor kiemeljük a tojást, a kiszorított víz térfogata folyamatosan csökken, helyére az edény többi részéből áramlik át a víz, és eközben a vízszint valamennyit lesüllyed. Egy kisebb keresztmetszetű edényben a vízszint csökkenése jelentősebb, mint a nagyobb keresztmetszetű edény esetében. A különbséget a mérési adatok jól mutatják: a mérőhengernél a tojás már 4 cm-es emelés után kikerült a vízből, a mérőedénynél ugyanez csak 5 cm-es emelés után következett be. A végzett munka azért nagyobb a nagyobb alapterületű edénynél, mert ott *hosszabb úton* történik az erő kifejtés, jóllehet az adott elmozduláshoz tartozó erő a nagyobb edénynél *kisebb*, mint a kisebb edény esetében.

VII. Hibaforrások

1. A mérőszalagról és az erőmérőről leolvasott értékek bizonyos mértékben pontatlanok. A mért adatok pontosságáról a mérőeszköz skálájának beosztása, illetve a többször megismételt mérés eredményeinek ingadozása (szórása) ad – számszerűsíthető – felvilágosítást.

2. A konyhai mérőedény nem túl pontos kísérleti eszköz, egyrészt nem tökéletes henger (az oldalai kissé kifelé dőlnek), valamint nem teljesen átlátszó, és a fénytörés is nehezebbé teszi az elmozdulás leolvasását.

3. A mérés során (főleg a szűkebb mérőhenger esetében) a tojás néha „oda-tapadt” az edény oldalához, ami torzíthatott az eredményen.

A felsoroltak közül az utóbbi kettő a mérésben *szisztematikus* hibaként jelentkezik, ennek mértékét igen nehéz lenne számszerűsíteni.

Jeszenői Sára (Kecskemét, Katona J. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Eszközök

- állvány,
- konyhai mérleg,
- vonalzó,
- tojás,
- cérna,
- hengeres edények (műanyag edény, üvegkorsó).

Elrendezés és a mérés menete. A tojásra egy cérnát rögzítettem. A cérna végét egy állványhoz erősítettem úgy, hogy a tojást lehessen emelni, illetve süllyeszteni. A cérnára egy rövid szigetelőszalagot ragasztottam, majd a későbbiekben a szigetelőszalag és a felfüggesztési pont d távolságának változásából számoltam a tojás x elmozdulását.

Az edénybe vizet töltöttem, és rátettem a mérlegre. A mérleget ekkor „táráztam”, majd beleeresztettem a tojást. Ekkor a mérleg a tojás m tömegét mérte, mert a mérleg tányérjára (a tárázott helyzethez viszonyítva) mg erő hatott.

Ha a tojást részben kiemeljük a vízből, és a cérnát K erő feszíti, akkor a mérleg tányérjára csak $mg - K = m'g$ erő hat, a mérleg ezt az m' fiktív tömeget méri. A két mért tömegértékből a fonalat feszítő erő könnyen kiszámítható:

$$K = (m - m')g.$$

Megjegyzés. Ha a mérleget az edény + víz + tojás állapotban tárázzuk, majd a cérnát felfelé húzzuk, akkor a mérleg éppen az $m - m'$ tömegkülönbséget méri, azt adja meg negatív előjellel.

Mért és abból számított adatok

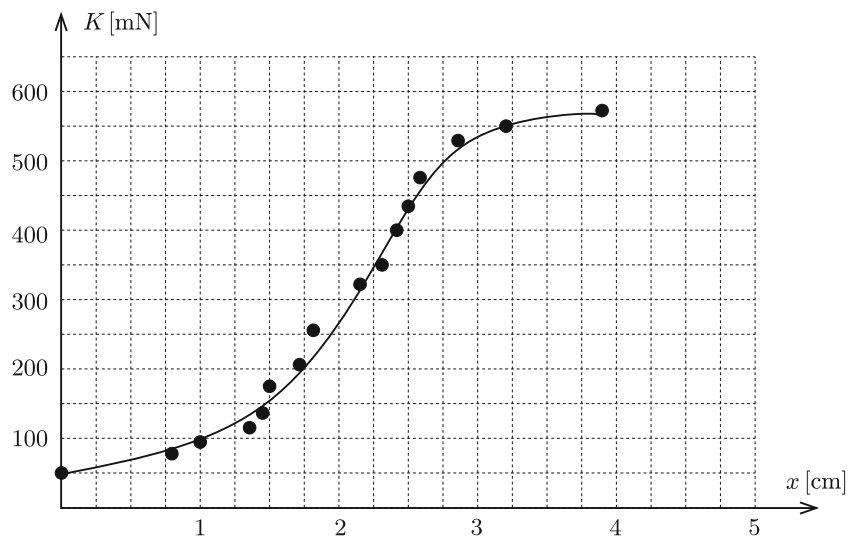
A tojás tömege: $m = 58$ g.

A tojás kiemelése során végzett munkát közelítőleg a grafikon alatti területből számítjuk. A síkidomot felbontjuk trapézokra, és a területüket összeadjuk.

A kisebb edény átmérője: $D_1 \approx 5,0$ cm.

d [cm]	18,3	17,5	17,3	17	16,9	16,8	16,6	16,5
m' [g]	53	51	48	46	43	40	37	32
x [cm]	0	0,8	1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8
K [mN]	49	69	98	118	147	177	206	255

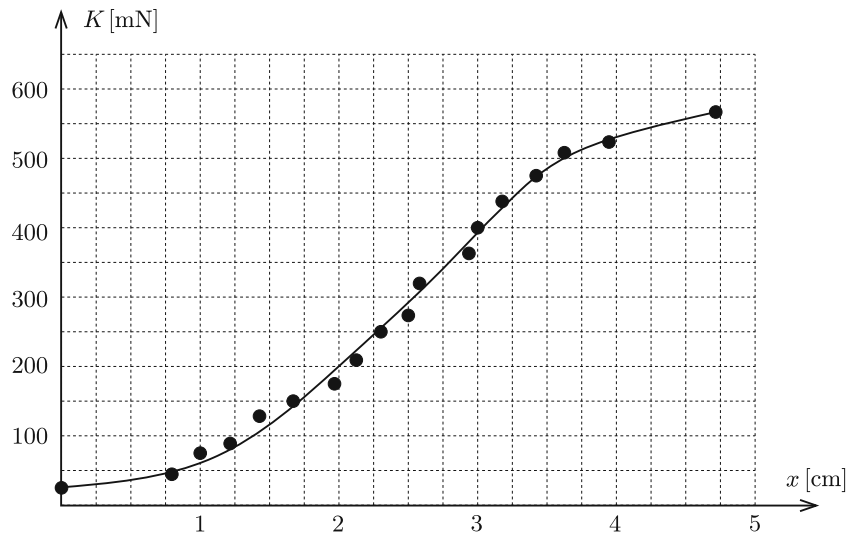
d [cm]	16,1	16	15,9	15,8	15,7	15,5	15,1	14,5
m' [g]	26	22	17	13	9	4	2	0
x [cm]	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	3,2	3,8
K [mN]	314	353	402	441	481	530	549	569



A nagyobb edény átmérője: $D_2 \approx 8,3$ cm.

d [cm]	18,8	18	17,8	17,6	17,3	17,2	16,9	16,7	16,5
m' [g]	55	53	51	49	46	43	40	37	33
x [cm]	0	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,9	2,1	2,3
K [mN]	29	49	69	88	118	147	177	206	245

d [cm]	16,3	16,2	15,9	15,8	15,6	15,4	15,2	14,9	14,1
m' [g]	30	25	21	17	13	10	5	4	0
x [cm]	2,5	2,6	2,9	3	3,2	3,4	3,6	3,9	4,7
K [mN]	275	324	363	402	441	471	510	530	569



A trapézok területe:

$$T_n = (x_{n+1} - x_n) \frac{K_n + K_{n+1}}{2}.$$

A számolást elvégezve a keskenyebb edénynél a $W_1 = 11,1$ mJ, a szélesebb edénynél pedig $W_2 = 13,3$ mJ eredményt kapjuk. Megállapíthatjuk, hogy a munka függ az edény keresztmetszetétől, a nagyobb keresztmetszetű edénynél nagyobb.

Megjegyzés. A folyamathoz egy egyszerű modellt készíthetünk. Ha a szabálytalan alakú és tömegeloszlású tojás helyett valamilyen homogén hasábot vagy hengert vizsgálunk, akkor az erő–elmozdulás függvényt és a végzett munkát részletesen, közelítésmentesen ki lehet számítani. A „modell-tojás” kiemelése ugyancsak alátámasztja azt a megfigyelésünket, hogy a szélesebb edényből könnyebben lehet a víz felszíne fölé emelni egy – a víznél nagyobb sűrűségű – testet. (Ezt a számolást azonban itt nem közöljük, mert csak közvetve kapcsolódik a mérési feladathoz. – A Szerk.)

Hibabecslés

Hibalehetőségek: a hosszmérés hibája, a tömegmérés hibája és a numerikus integrálás hibája. A hosszmérés (abszolút) hibája kb. 1 mm, eszerint a relatív hiba $\frac{1}{150} \approx 0,7\%$. A tömegmérés hibája kb. 0,5 g, a különbség képzésekor ez a kétszeresére is nőhet, a relatív hiba tehát kb. $\frac{1}{30} \approx 3\%$. A munkák meghatározásának relatív hibája kb. a hossz- és a tömegmérés relatív hibájának összege, vagyis 4% nagyságrendű.

Pácsonyi Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Jeszenői Sára és Pácsonyi Péter megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 17, mérésenként nem értékelhető 1 dolgozat.