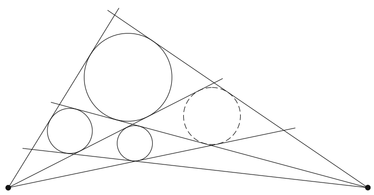
létre. Ha a békaszemek sugara $r_1 = r_2$ és $r_3$, akkor $\frac{H_{13}O_1}{H_{13}O_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{H_{23}O_2}{H_{23}O_3}$ miatt a $H_{13}H_{23}$ egyenes párhuzamos a $O_1O_2$ egyenessel. De akkor $k_1$ és $k_2$ hasonlósági átmérője párhuzamos $O_1O_2$-vel és $H_{13}H_{23}$-mal, tehát az $OH_{13}H_{23}$ síkban van.

Végül, ha mindhárom körvonal sugara ugyanakkora, akkor mindhárom hasonlósági átmérő párhuzamos az $O_1O_2O_3$ síkkal, így ilyenkor is egy síkban, vagyis egy főkörön vannak.

### Feladatok



*11. ábra*

**1.** Két pontból rajzoljunk három-három félegyenest úgy, hogy bármely két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást. Ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha ezek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is az (*11. ábra*).

**2.** Bizonyítsuk be a Ceva-tételt közvetlenül, térbe kilépéssel.

**3.** Írjuk fel és bizonyítsuk be a Ceva- és a Menelaosz-tétel gömbi megfelelőit.

**4.** Az $ABCD$ négyszög $AB$ oldalán adott egy $P$ pont. Legyen $\omega$ a $CPD$ háromszög beírt köre, a középpontja $I$. Tegyük fel, hogy $\omega$ érinti az $APD$ és $BPC$ háromszögekbe írt köröket a $K$, illetve az $L$ pontban. Legyen az $AC$ és $BD$ egyenesek metszéspontja $E$, és legyen az $AK$ és $BL$ egyenesek metszéspontja $F$. Bizonyítsuk be, hogy $E$, $I$ és $F$ egy egyenesre esik. (IMO Shortlist, 2007/G8)

**Kós Géza**

## Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

### I. rész

**1.** Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

*a*) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0$, (*7 pont*)

*b*) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1$. (*6 pont*)

**2.** A nem is olyan távoli jövőben a fizika fakultációsok online szimulációban vizsgálhatják töltött részecskék viselkedését mágneses mezőben, ahol a részecskék helyzetét derékszögű koordináta-rendszer segítségével írják le. Két fizika fakultációs diák, Hácé és Kácé fontos kísérletet tervez: egy háromszög csúcsaiba $\big(A(-2;1)$; $B(10;6)$; $C(4;9)\big)$ Kácé három detektort helyez. Hácé ekkor egy töltött részecskét juttat a háromszög súlypontjába. A töltött részecske tömege peti-ben (peti: tömegegység a szimulációban) a háromszög területének és a $BAC\sphericalangle$ cosinusának szorzata. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit és a részecske tömegének pontos értékét. (*12 pont*)

**3.** Pébé tanár úr, a $C$ osztály osztályfőnöke lelkesen érkezett a reggeli órára.

– Képzeljétek, megálmodtam a matematika emelt szintű érettségi átlagunkat!

– És mennyi volt, tanár úr?

– Azt sajnos elfelejtettem, de emlékszem, hogy a $D$-sek átlaga szabályos közelítéssel 84,3, az $E$-seké 85,1, a három osztály átlaga pedig 87,9 volt. Tudjuk, hogy a $D$-ből 11-en, az $E$-ből 14-en, tőlünk pedig 24-en írnak emelt szintű érettségit. Ebből már ki lehet számolni az osztályátlagot.

*a*) Mennyi a $C$-sek osztályátlaga egy tizedesjegyre kerekítve, ha minden diák érettségi eredménye csak egész százalék lehet? (*8 pont*)

A Szalagavató nyitótáncában a $C$-sek 20%-a, a $D$-sek 25%-a vesz részt. Az egyik szünetben 4 fő $C$ osztályos és 2 fő $D$ osztályos tanuló vásárolt pizzát a büfében.

*b*) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan ketten táncolnak a nyitótáncban? (*6 pont*)

**4.** Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-8$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-2x$ függvények.

*a*) Adjuk meg a $g\circ f$ függvény $x=2$ abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét. (*7 pont*)

*b*) Adjuk meg a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f}{g}$ határértéket. (*5 pont*)

## II. rész

**5.** Két birkózó egyesület közös bajnokságra készül. A felkészülés során előírás a napi 8 óra alvás. A korábbi felkészülések során kiderült, hogy a felkészülés hatékonyságát jelentősen befolyásolja a regenerálódásra fordított idő. A szakemberek megállapították, hogy a hatékonyságot az $E(t)=t^3\cdot(3{,}2-t)$ függvénnyel lehet leírni, ahol $t$ a regenerálódásra fordított idő.

*a*) Mennyi időt fordítsanak a regenerálódásra, hogy a felkészülés a lehető leghatékonyabb legyen? (*8 pont*)

A bajnokságot kieséses rendszerben folytatják le, a párokat minden egyes mérkőzés előtt véletlenszerűen sorsolják. Az első pár sorsolásakor $\frac{7}{40}$ a valószínűsége annak, hogy mindkét versenyző az $A$ egyesület tagja. Két mérkőzés után, ahol egy résztvevőt az $A$, három résztvevőt pedig a $B$ egyesületből sorsoltak ki, ugyanakkora valószínűséggel sorsolják mindkét versenyzőt az $A$ egyesületből, mint a $B$ egyesületből.

*b*) Hányan indultak a bajnokságon az egyes egyesületekből? (*8 pont*)

**6.** Egy paralelogramma alakú füves terület oldalai 50 m és 34 m, az oldalak végpontjait összekötő átló 56 m hosszú. Az átló egy pontjába egy önműködő locsoló berendezést helyezünk, amely a terület bármely pontjából eléri bármely másik pontját, és ha a távolságot beállítottuk, akkor egy körön belül mindent lelocsol.

*a*) Legalább mekkora területet kell kézzel locsolni, ha a locsoló berendezés a terület határán túl nem locsolhat? (*10 pont*)

A füves területen egy kör alakú virágágyást alakítanak ki. A virágágyást két egyenes gyalogút szeli át, amelyek egy a körön kívüli $P$ pontban metszik egymást. A virágágyást az egyik gyalogút az $A$ és $B$, a másik gyalogút a $C$ és $D$ pontokban metszi. Tudjuk, hogy $PA=3$ m, $AB=5$ m, valamint $PD=PC+10$ m.

*b*) Mekkora a $PD$ távolság? (*6 pont*)

**7.** *a*) Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos páratlan számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzata reciprokának kétszeresével. (*4 pont*)

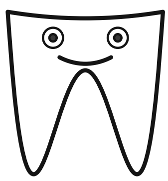
Adott az $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ végtelen sor.

*b*) Bizonyítsuk be, hogy az $n$-edik részletösszeg:

$$S_n=\frac{n}{3n+1}.$$

(*8 pont*)

*c*) Adjuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$ határértéket. (*4 pont*)



**8.** Az *ábrán* egy nemzetközi fogász kongresszus emblémája látható.

Az alakzatot az alábbi függvények grafikonjai határolják:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto\frac{1}{4}x^4-2x^2+2 \quad \text{és} \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto\frac{1}{36}x^2+4.$$

*a*) Határozzuk meg a függvények grafikonjainak metszéspontjait. (*2 pont*)

*b*) Mekkora az embléma területe, ha a koordináta-rendszer 1 egysége a valóságban 1 cm-nek felel meg?

A konferencián egy asztalhoz került hat fogorvos, akik örömmel állapították meg, hogy valamennyien részt vesznek egy programban, amelyben hasznos kezelési eljárásokat osztanak meg egymással. Ennek keretében a hat fogorvos is kapcsolatban áll egymással, mindegyik mindegyikkel. A kapcsolattartás két hálózaton keresztül folyik, de két fogorvos egymás között mindig ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*8 pont*)

*c*) Bizonyítsuk be, hogy az asztalnál helyet foglaló hat fogorvos között van három olyan, aki egymás közt ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*6 pont*)

**9.** Egy függönytartó rúd kúpban végződik. Rögzítő elemként egy $R$ sugarú gömböt kúposan átfúrunk úgy, hogy pontosan illeszkedjen a rúd végére, majd az így kapott testet ráhúzzuk úgy, hogy a kúp tengelye átmenjen a gömb középpontján. A rögzítőelem magassága 7 cm, a felső alapköre $r_1=3$ cm, az alsó alapköre $r_2=4$ cm sugarú.

*a*) Határozzuk meg a rögzítőelem felszínét és térfogatát. (*10 pont*)

Az áruházban a függönytartó rudakat négyféle színben (arany, ezüst, fehér, fekete), a rögzítőelemet háromféle színben (arany, zöld és piros), a függönyöket ötféle színben (arany, ezüst, fehér, zöld, piros) árulják.

*b*) Hányféle kombinációt lehet összeállítani, ha az az előírás, hogy legalább az egyik elem aranyszínű legyen és a rúd két végén lévő rögzítőelem azonos színű? (*6 pont*)

**Balga Attila**
Budapest

## Megoldásvázlatok a 2019/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

### I. rész

**1.** *a*) *Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb* 4? (*7 pont*)

*b*) *Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható* 60*-nal?* (*5 pont*)

**Megoldás.** *a*) A sorrendre való tekintet nélkül 11-féleképpen tudjuk előállítani a 4-et, a 3-at, a 2-t vagy az 1-et négy nemnegatív egész szám összegeként:
$4=4+0+0+0=3+1+0+0=2+2+0+0=2+1+1+0=1+1+1+1$ (5 lehetőség);
$3=3+0+0+0=2+1+0+0=1+1+1+0$ (3 lehetőség);
$2=2+0+0+0=1+1+0+0$ (2 lehetőség);
$1=1+0+0+0$ (1 lehetőség).

Az $X000$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot, mert a 0 nem állhat a legnagyobb helyiértéken.

Az $XY00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, a maradék két helyre 2-féleképpen variálhatjuk a másik két számjegyet, tehát ezekből egyaránt $(3\cdot 2=)$ 6 négyjegyű számot képezhetünk.

Az $XX00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, így ezekből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Az $XYY0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, ezután 3-féleképpen választhatjuk ki az $X$ helyét, így ebből $(3\cdot 3=)$ 9-féle négyjegyű szám képezhető.

Az $XXX0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, így ebből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Végül az $XXXX$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot.

Összesen tehát $(1+6+3+9+1+1+6+3+1+3+1=)$ 35, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

*b*) 60-nal pontosan akkor osztható egy szám, ha 3-mal, 4-gyel, és 5-tel is osztható. 3-mal csak akkor osztható a szám, ha számjegyeinek összege 3-mal osztható, tehát esetünkben a számjegyek összege 3. 5-tel akkor osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik, de 5-re végződő szám nincs a szóba jövő számok között, a számnak tehát