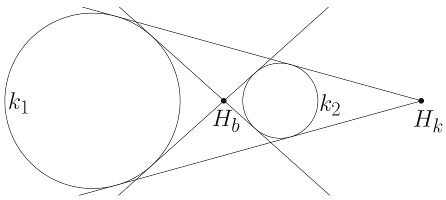
Térbe kilépő bizonyítások IV.

Kúpok és hasonlósági pontok

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ebben a részben körök hasonlósági pontjainak viselkedését fogjuk vizsgálni. Legyen k_1 és k_2 két kör a síkon. Mint jól tudjuk, a két kör *külső hasonlósági pontja* az a H_k pont, ahonnan alkalmas, pozitív arányú középpontos nagyítással a két kör átvihető egymásba. A külső hasonlósági pont csak akkor létezik, ha a körök sugara különböző. A két kör *belső hasonlósági pontja* pedig az a H_b pont, ahonnan a körök negatív arányú középpontos nagyítással vihetők át egymásba. Ha a köröknek léteznek a külső közös, illetve a belső közös érintői, akkor ezek átmennek a hasonlósági pontokon (*1. ábra*).



1. ábra

A hasonlósági pontok szerkesztése kúpokkal

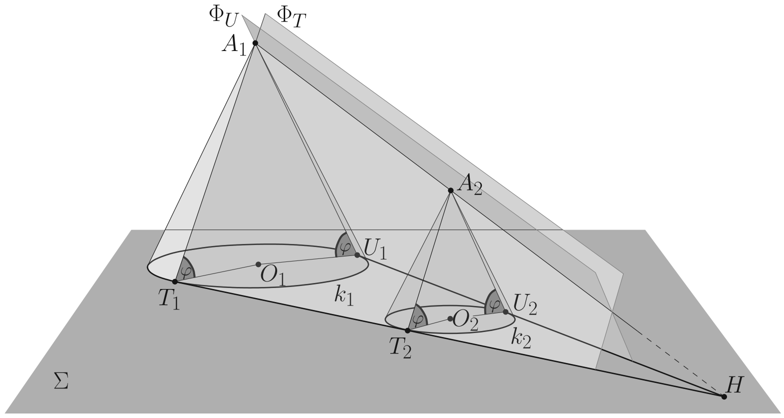
Most foglalkozzunk egy kicsit a külső hasonlósági ponttal. Legyen k_1 és k_2 két különböző sugarú kör, amelyeknek léteznek külső közös érintő egyenesei, a középpontjaik legyenek O_1 és O_2. Az egyik közös érintő érintési pontjai legyenek T_1, illetve T_2, a másik érintő egyenes érintési pontjai U_1, illetve U_2; a két érintő metszéspontja legyen H. A térben illesszünk a körökre egy-egy körkúpot, amelyek alkotói ugyanakkora, φ szöget zárnak be a körök Σ síkjával. A kúpok csúcsai legyenek az A_1 és A_2 pontok (*2. ábra*).

A H pontból nem csak a két kört, hanem a két kúpot is egymásba nagyíthatjuk, ezért az A_1A_2 egyenes átmegy a H ponton. Ezt a tényt most hasonlóság nélkül is igazoljuk. A kúpok A_1T_1, illetve A_2T_2 alkotóit megkaphatjuk úgy, hogy a körök T_1O_1, illetve T_2O_2 sugarát φ szöggel elforgatjuk a T_1T_2H érintő körül. Ezért ezek az alkotók és a H pont egy Φ_T síkban vannak. Hasonlóan látjuk, hogy az A_1U_1 és A_2U_2 alkotók is egy Φ_U síkban vannak a H ponttal. A Φ_T és Φ_U síkoknak A_1, A_2 és H is közös pontja, ezért ez a három pont egy egyenesen van.

Monge tétele (a három hasonlósági pont tétele)

Monge[1] tétele: *Ha adott a síkon három különböző sugarú kör, egymás külsejében, és vesszük páronként a külső közös érintőik metszéspontjait, akkor ez a három pont egy egyenesre esik.*

[1]Gaspard Monge francia matematikus (1746–1818)

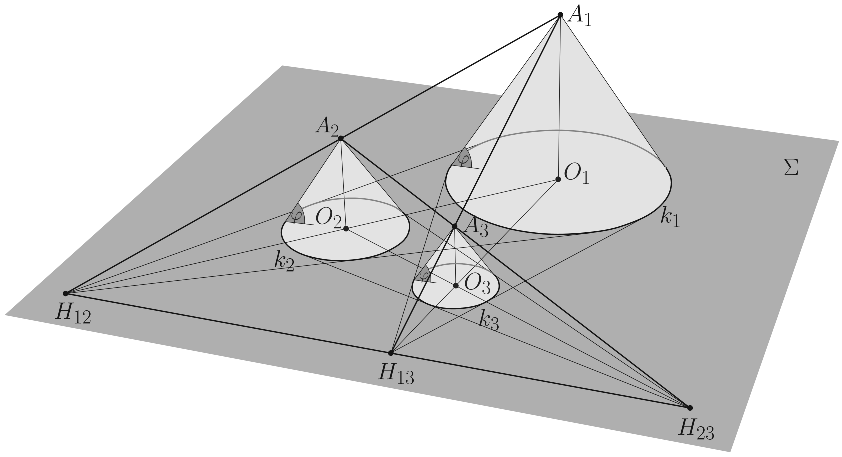


2. ábra

Világos, hogy itt a külső hasonlósági pontokról van szó, ezért mondjuk ki ebben az általánosabb formában:

Monge tétele, általánosabb változat: *A síkon bármely három különböző sugarú kör páronként vett külső hasonlósági pontjai egy egyenesre esnek.*

A tételt az előbb látott kúpokkal bizonyítjuk. Legyen a három kör k_1, k_2 és k_3 a Σ síkban, és minden i, j indexpárra jelölje k_i és k_j külső hasonlósági pontját H_{ij}. Válasszunk egy φ hegyesszöget, és illesszünk egy-egy kúpot a körökre, amelyeknek alkotói φ szöget zárnak be Σ-val. A kúpok csúcsai legyek A_1, A_2, illetve A_3 (*3. ábra*).

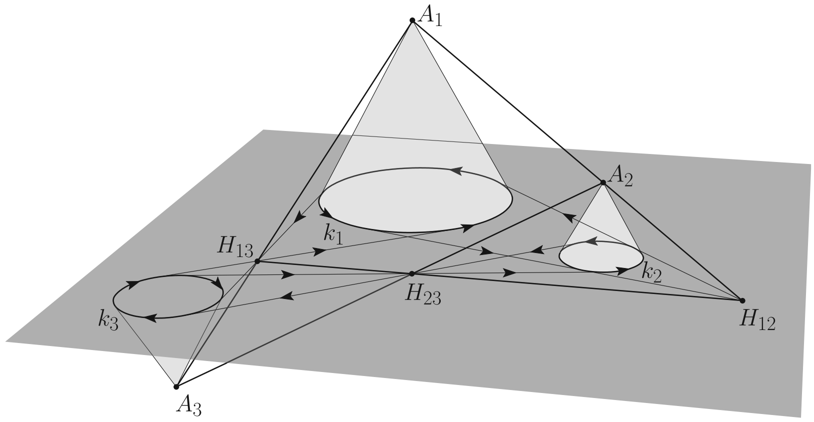


3. ábra

Bármely i, j indexek esetén az A_iA_j egyenes átmegy a H_{ij} ponton. Ezért mindegyik H_{ij} hasonlósági pont az $A_1A_2A_3$ síkban van. Ezzel már két különböző síkot is ismerünk, amely tartalmazza a H_{12}, H_{13} és H_{23} pontot, tehát ezek egy egyenesen, a Σ és az $A_1A_2A_3$ sík metszésvonalán vannak.

Mi legyen a belső hasonlósági pontokkal?

A belső hasonlósági pontokat is nehézség nélkül megszerkeszthetjük kúpokkal, csak most a kúpokat a sík ellentétes oldalára kell építenünk. Ha három körvonalra illesztünk kúpokat, és ezek közül kettő a sík egyik, a harmadik a sík másik oldalán van, akkor a Monge-tételnek egy olyan változatát kapjuk, amikor az egyik körpárnak a külső, a másik két párnak a belső hasonlósági pontját vesszük (*4. ábra*).



4. ábra

A Monge-tételnek ezeket a különböző változatait egységesen kezelhetjük, ha a körvonalaknak és érintő egyeneseknek irányítást adunk, vagyis nyilacskákat rajzolunk rájuk. Egy irányított körvonalnak csak az olyan irányított érintőit vesszük figyelembe, amelyeknél a kitüntetett irány megegyezik. Két irányított körvonal *hasonlósági pontja* azonos irányítású körök esetén az eddigi külső, ellentétes irányítású körök esetén a belső hasonlósági pont. A „pozitív" irányítású körökre a sík egyik oldalán, a „negatív" irányítású körökre a sík másik oldalán illesztünk kúpokat.

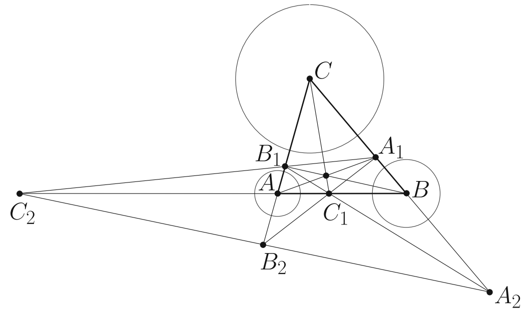
A Ceva- és a Menelaosz-tétel

Tanulságos lerajzolni egy ábrán három körnek mind a hat belső és külső hasonlósági pontját. Az 5. ábrán a három kör középpontja A, B és C, a belső hasonlósági pontok A_1, B_1 és C_1, a külső hasonlósági pontok pedig A_2, B_2 és C_2. A Monge-tétel szerint egy egyenesre esnek az A_2, B_2, C_2 pontok, továbbá az A_2, B_1, C_1 pontok, az A_1, B_2, C_1 pontok, és az A_1, B_1, C_2 pontok is. Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai, A_2, B_2 és C_2 egyenesre esnek, ezért a Desargues-tétel szerint a megfelelő csúcsokat összekötő AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy ponton mennek át.

Ha a körök sugarai r_a, r_b és r_c, akkor a körök között a hasonlóságok előjeles arányai

$$\frac{r_a}{r_b}=-\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{C_2A}{C_2B},\quad \frac{r_b}{r_c}=-\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_2B}{A_2C}\quad\text{és}\quad \frac{r_c}{r_a}=-\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{B_2C}{B_2A};$$

a szorzatuk 1. Ezek az arányok két híres tételben is szerepelnek:



5. ábra

Ceva[2] tétele: *Legyenek az ABC háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesein A_1, B_1, C_1 a csúcsoktól különböző pontok. Az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy ponton vagy párhuzamosak, ha*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Az állításban szereplő arányok előjelesek: az arány pozitív, ha a két szakasz ugyanabba az irányba mutat, és negatív, ha ellentétes irányúak. Az is megengedett, hogy A_1, B_1, C_1 az egyenesek végtelen távoli pontjai legyenek, ilyenkor a megfelelő arány -1.

Menelaosz[3] tétele: *Legyenek az ABC háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesein A_2, B_2, C_2 a csúcsoktól különböző pontok. Az A_2, B_2 és C_2 pontok akkor és csak akkor esnek egy egyenesre, ha*

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=-1.$$

A Ceva-tételhez hasonlóan az arányok most is előjelesek, és A_2, B_2, C_2 az egyenesek végtelen távoli pontjai is lehetnek.

Láthatjuk, hogy a Monge- és a Menelaosz-tétel egyik iránya lényegében ugyanaz, illetve hogy a Ceva- és a Menelaosz-tétel között az összekötő kapocs a Desargues-tétel.

„Hasonlósági pontok" nemeuklideszi geometriákban

A gömbi és a hiperbolikus geometriákban nincs hasonlóság. Vicces módon azonban a körök hasonlósági pontjainak szerkesztése elmondható ilyenkor is.

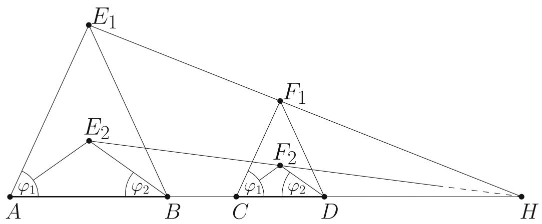
Ha adott két kör a hiperbolikus síkban, vannak külső közös érintőik, és ezek el is metszik egymást, akkor a metszéspontot nevezhetjük a két kör „hasonlósági pontjának". A két körre egy-egy kúpot illesztve, a kúpok csúcsait összekötő egyenes átmegy a hasonlósági ponton. Ha három körünk van, bármelyik kettőnek vannak

[2]Giovanni Ceva (ejtsd: Cseva) olasz matematikus, 1647–1734

[3]Alexandriai Menelaosz görög matematikus csillagász, Kr.u. kb. 70–140

külső közös érintői, és ezek metszik egymást, akkor a Monge-tétel bizonyítását változtatás nélkül elmondhatjuk. Tehát a Monge-tétel (az eredeti, speciális formájában) igaz hiperbolikus geometriában is.

Ha bármely két kör „hasonlósági pontját” szeretnénk definiálni, közös érintők felhasználása nélkül, akkor megtehetjük, hogy a két körre kúpokat illesztünk, és a síkot átdöfjük a kúpok csúcsait összekötő egyenessel. (Ha a csúcsokat összekötő egyenes nem döfi a síkot, akkor nincs hasonlósági pont.) Azt viszont mindenképpen meg kell indokolunk, hogy a szerkesztésünk különböző meredekségű kúpok esetén is mindig ugyanazt a döféspontot produkálja. Ez igazából síkbeli feladat; a kúpok tengelyein keresztül fektethetünk egy síkot, és csak ezzel a síkkal vett metszetet vizsgáljuk (*6. ábra*).



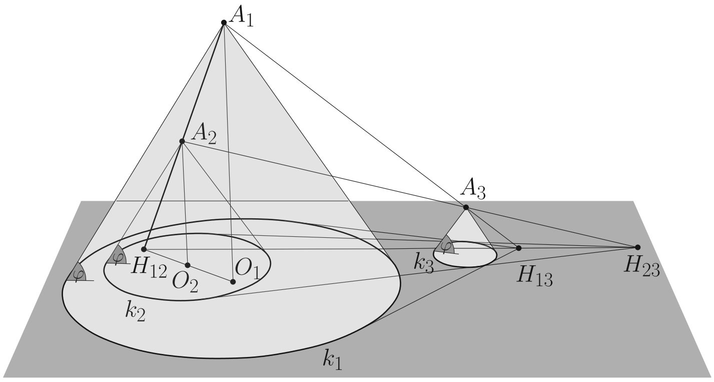
6. ábra

Vegyünk tehát két tetszőleges kört, k_1-et és k_2-t a Σ síkban; ezekhez szeretnénk igazolni, hogy a hasonlósági pont nem függ a Σ és a kúpok alkotói közötti φ szögtől. Vegyünk fel egy harmadik kört, k_3-at, amely kisebb, mint az első kettő, úgy, hogy a három kör középpontja ne essen egy egyenesre, k_3-nak a k_1-gyel és k_2-vel is legyenek külső közös érintői és ezek el is metsszék egymást a H_{13}, illetve a H_{23} pontban.

Most illesszünk tetszőlegesen egy-egy kúpot a k_1 és k_2 körökre, amelyek alkotói ugyanakkora φ szöget zárnak be a Σ síkkal; ezek csúcsai legyenek A_1, illetve A_2. Illesszünk egy harmadik kúpot a k_3 körre ugyanazzal a φ szöggel, ennek csúcsa legyen A_3 (*7. ábra*). (Megjegyzés: hiperbolikus geometriában nem lehet bármilyen körre bármilyen φ szöggel kúpot szerkeszteni, mert az alkotók nem feltétlenül metszik el a kúp tengelyét; de az igaz, hogy ha a k_1 és k_2 körökhöz létrejön a megfelelő kúp, akkor a náluk kisebb k_3-hoz is.)

Már láttuk, hogy az A_1A_3 egyenes átmegy a H_{13} ponton, és az A_2A_3 egyenes átmegy H_{23}-n. Az A_1A_2 egyenes benne van a kúpok tengelyére fektetett $O_1A_1O_2A_2$ síkban és a $H_{13}H_{23}A_3$ síkban is. Ezeknek a metszésvonala a Σ síkkal az O_1O_2, illetve a $H_{13}H_{23}$ egyenes, egyik sem függ a φ szög nagyságától.

Ha az O_1O_2 és $H_{13}H_{23}$ egyenesek metszik egymást egy H_{12} pontban, akkor H_{12} a három síknak közös pontja, tehát rajta van a harmadik metszésvonalon, az A_1A_2 egyenesen is. Ilyenkor tehát a döféspont mindig létrejön és ugyanaz. Ha pedig az O_1O_2 és $H_{13}H_{23}$ egyenesek párhuzamosak (nem metszik egymást), akkor a három síknak nincs közös pontja, és így A_1A_2 metszésvonalnak nem lehet pontja a Σ síkban.



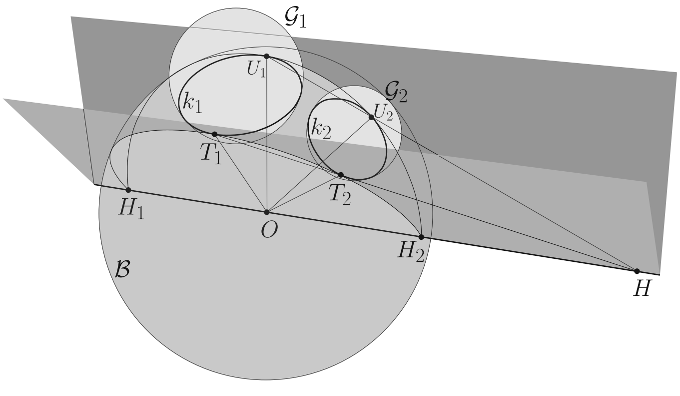
7. ábra

Tehát, a φ nagyságától függetlenül, az A_1A_2 egyenes vagy mindig döfi a Σ síkot, és mindig ugyanabban a H_{12} pontban, vagy pedig semmilyen φ esetén sem döfi, és ilyenkor nem jön létre a „hasonlósági" pont.

Gömbön: hasonlósági átmérő

A gömbfelületen két körvonal közös érintői főkörök, amelyek a gömb két egymással átellenes pontjában metszik egymást. Ezért hasonlósági pontok helyett „hasonlósági átmérőkről" fogunk beszélni.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a körök sugara különböző, és a közös érintők léteznek. Legyen k_1 és k_2 két, főkörnél kisebb körvonal az O középpontú $\mathcal{B}$ gömbfelületen, amelyekhez létezik két főkör, amely érinti mindkét kört úgy, hogy k_1 és k_2 a főköröknek ugyanazon az oldalain van. A két érintő főkör metszéspontjait jelölje H_1 és H_2, az érintési pontokat az egyik közös érintőn T_1, illetve T_2, a másik érintő főkörön U_1 és U_2. A két körvonalra illesszünk egy-egy „békaszemet", azaz olyan $\mathcal{G}_1$, illetve $\mathcal{G}_2$ gömböt, amely merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t, és legyen H a két békaszem külső hasonlósági pontja (*8. ábra*).



8. ábra

Vegyük észre, hogy a szemgolyókat érinti a $H_1T_1T_2H_2$ főkör és a gömb OT_1, illetve OT_2 sugara is, ezért a szemgolyókat az $H_1T_1T_2H_2$ sík is érinti, és a két szemgolyó a síknak ugyanazon az oldalán van. Ezért a H hasonlósági pont ebben a síkban van; sőt, a két érintési pontot összekötő T_1T_2 egyenes átmegy a H ponton. Ugyanígy láthatjuk, hogy a $H_1U_1U_2H_2$ sík, és benne az U_1U_2 egyenes is átmegy H-n.

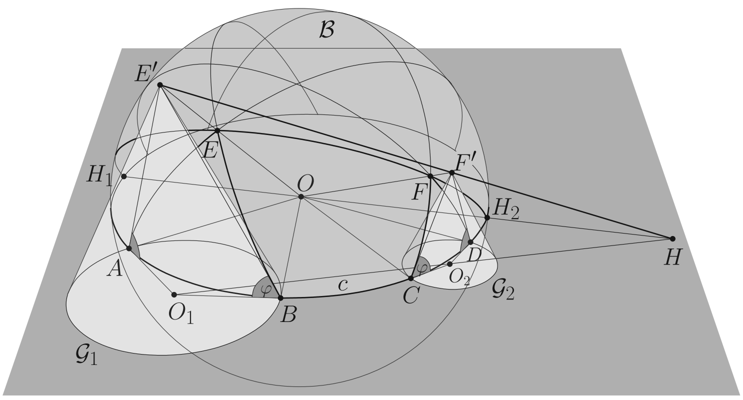
A $H_1T_1T_2H_2$ és a $H_1U_1U_2H_2$ síknak O, H_1, H_2 és H is közös pontja, tehát ez a négy pont egy egyenesen van. Azt kaptuk, hogy a két körvonal „külső hasonlósági átmérőjének" egyenese átmegy a körvonalakhoz tartozó békaszemek külső hasonlósági pontján.

Az általános esetben nem feltétlenül léteznek a körvonalak közös érintő főkörei. Szerencsére a békaszemek most is segítenek, és 3-dimenziós gömbi geometria helyett elég a kúpok tengelyére illeszkedő „síkon", azaz gömbfelületen belül dolgoznunk.

Legyen c a két kör centrálisa, vagyis az a főkör, amely átmegy a k_1 és k_2 középpontján; a két körrel vett metszéspontok legyenek A és B, illetve C és D. Válasszunk egy tetszőleges φ hegyesszöget, és a 6. ábrához hasonlóan, az AB és CD szakaszokra, a c-nek ugyanazon az oldalán, rajzoljunk olyan egyenlő szárú ABE és CDF gömbháromszögeket, amelyekben $EAB\sphericalangle = ABE\sphericalangle = FCD\sphericalangle = CDF\sphericalangle = \varphi$; ezek a háromszögek felelnek meg a két körvonalra emelt kúpoknak. A kúpokat összekötő egyenesnek az EF főkör felel meg; legyen az EF főkör és c két metszéspontja H_1 és H_2.

Vegyük fel ismét a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemeket, a középpontjuk legyen O_1, illetve O_2. Metsszük el a békaszemeket a c síkjával, és a metszetkörökre emeljünk olyan kúpokat, amelyek alkotói a c síkjával φ szöget zárnak be. A két kúp csúcsai legyenek E', illetve F'.

Az AE' szakasz érinti az AE főkörívet, ezért O, A, E és E' egy síkban van. Hasonlóan O, B, E és E' is egy síkban van; ennek a két síknak O, E és E' közös pontjai, tehát egy egyenesen vannak. Ugyanígy látjuk, hogy O, F és F' is egy egyenesen van (*9. ábra*).



9. ábra

Tekintsük ezek után az O_1O_2, H_1H_2 és $E'F'$ egyeneseket. Mint láttuk, az $E'F'$ egyenes és a H_1H_2 egyenes is az EF főkör síkjában van; az O_1O_2 és a H_1H_2 is a c síkjában, végül az O_1O_2 és az $E'F'$ is a két kúp tengelyére illesztett síkban. A három egyenes tehát vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamosak.

Ha k_1 és k_2 különböző sugarú, akkor a két kúp is különböző méretű, és az $E'F'$ és O_1O_2 egyenesek a két kúp, egyben a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemek külső hasonlósági pontjában metszik egymást, tehát a H_1H_2 egyenes is átmegy ezen a ponton.

Ha k_1 és k_2 sugara ugyanakkora, akkor a két kúp is ugyanakkora, tehát $E'F'$ párhuzamos az O_1O_2 egyenessel. Ebben az esetben H_1H_2 is párhuzamos a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemek centrálisával.

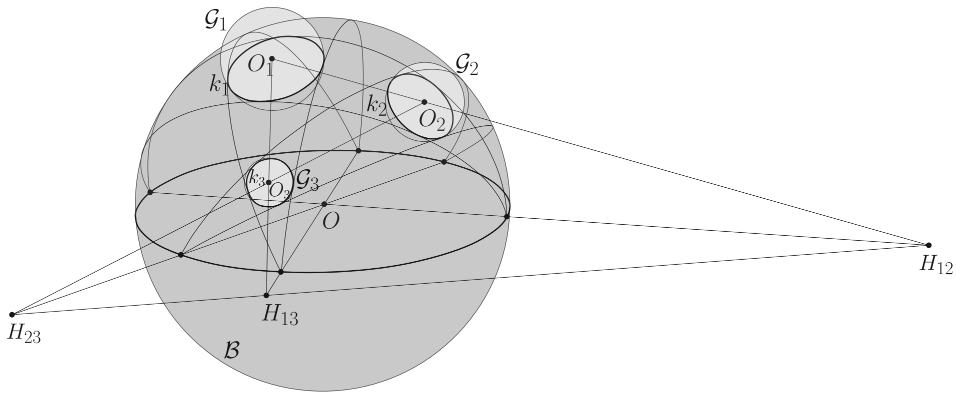
Tehát a H_1H_2 átmérő nem függ a φ választásától; a hasonlósági átmérő különböző sugarú körök esetén átmegy a békaszemek külső hasonlósági pontján, egyenlő sugarú körök esetén párhuzamos a békaszemek centrálisával.

A Monge-tétel a gömbön

Most már minden készen áll ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Monge-tétel gömbi megfelelőjét.

Monge-tétel a gömbön. *A gömbfelületen bármely három (a főkörnél rövidebb) körvonal hasonlósági átmérői egy főkörön vannak.*

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a három körvonal sugara különböző. A gömb középpontját jelöljük O-val. Legyen k_1, k_2 és k_3 három tetszőleges körvonal, a hozzájuk tartozó békaszemek legyenek $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, illetve $\mathcal{G}_3$, a középpontjaik O_1, O_2, illetve O_3, a páronként vett külső hasonlósági pontjaik H_{12}, H_{13} és H_{23} (*10. ábra*).



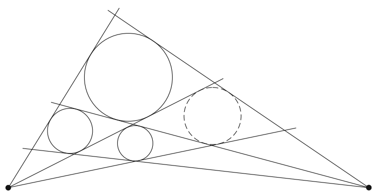
10. ábra

Ha a szemeket elmetsszük az $O_1O_2O_3$ síkkal, éppen a Monge-tétel ábráját kapjuk; a Monge-tétel szerint H_{12}, H_{13} és H_{23} egy egyenesre esik. Akkor viszont a $\mathcal{B}$ gömbnek a három hasonlósági ponton átmenő átmérői, az OH_{12}, OH_{13}, illetve OH_{23} egyenesek, mind az $OH_{12}H_{13}H_{23}$ síkban, vagyis egy főkörön vannak.

Ha a három körvonal közül valamelyik kettő, például k_1 és k_2 ugyanakkora, akkor a hozzájuk tartozó békaszemek is ugyanakkorák, és a H_{12} pont nem jön létre. Ha a békaszemek sugara $r_1 = r_2$ és r_3, akkor $\frac{H_{13}O_1}{H_{13}O_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{H_{23}O_2}{H_{23}O_3}$ miatt a $H_{13}H_{23}$ egyenes párhuzamos a O_1O_2 egyenessel. De akkor k_1 és k_2 hasonlósági átmérője párhuzamos O_1O_2-vel és $H_{13}H_{23}$-mal, tehát az $OH_{13}H_{23}$ síkban van.

Végül, ha mindhárom körvonal sugara ugyanakkora, akkor mindhárom hasonlósági átmérő párhuzamos az $O_1O_2O_3$ síkkal, így ilyenkor is egy síkban, vagyis egy főkörön vannak.

Feladatok



11. ábra

1. Két pontból rajzoljunk három-három félegyenest úgy, hogy bármely két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást. Ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha ezek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is az (*11. ábra*).

2. Bizonyítsuk be a Ceva-tételt közvetlenül, térbe kilépéssel.

3. Írjuk fel és bizonyítsuk be a Ceva- és a Menelaosz-tétel gömbi megfelelőit.

4. Az $ABCD$ négyszög AB oldalán adott egy P pont. Legyen ω a CPD háromszög beírt köre, a középpontja I. Tegyük fel, hogy ω érinti az APD és BPC háromszögekbe írt köröket a K, illetve az L pontban. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja E, és legyen az AK és BL egyenesek metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy E, I és F egy egyenesre esik. (IMO Shortlist, 2007/G8)

Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0,$ (*7 pont*)

b) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1.$ (*6 pont*)

2. A nem is olyan távoli jövőben a fizika fakultációsok online szimulációban vizsgálhatják töltött részecskék viselkedését mágneses mezőben, ahol a részecskék helyzetét derékszögű koordináta-rendszer segítségével írják le. Két fizika fakultációs diák, Hácé és Kácé fontos kísérletet tervez: egy háromszög csúcsaiba $\big(A(-2;1)$; $B(10;6)$; $C(4;9)\big)$ Kácé három detektort helyez. Hácé ekkor egy töltött részecskét juttat a háromszög súlypontjába. A töltött részecske tömege peti-ben (peti: tömegegység a szimulációban) a háromszög területének és a $BAC\sphericalangle$ cosinusának szorzata. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit és a részecske tömegének pontos értékét. (*12 pont*)