KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 1. szám Budapest, 2020. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

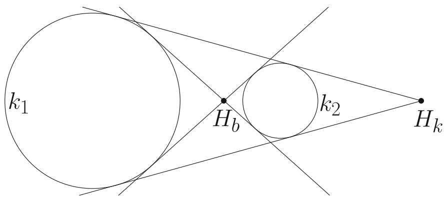
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Térbe kilépő bizonyítások IV.

Kúpok és hasonlósági pontok

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ebben a részben körök hasonlósági pontjainak viselkedését fogjuk vizsgálni. Legyen k_1 és k_2 két kör a síkon. Mint jól tudjuk, a két kör *külső hasonlósági pontja* az a H_k pont, ahonnan alkalmas, pozitív arányú középpontos nagyítással a két kör átvihető egymásba. A külső hasonlósági pont csak akkor létezik, ha a körök sugara különböző. A két kör *belső hasonlósági pontja* pedig az a H_b pont, ahonnan a körök negatív arányú középpontos nagyítással vihetők át egymásba. Ha a köröknek léteznek a külső közös, illetve a belső közös érintői, akkor ezek átmennek a hasonlósági pontokon (*1. ábra*).



1. ábra

A hasonlósági pontok szerkesztése kúpokkal

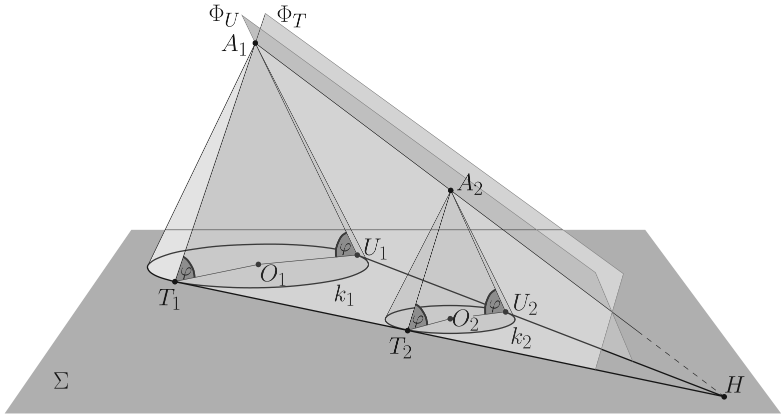
Most foglalkozzunk egy kicsit a külső hasonlósági ponttal. Legyen k_1 és k_2 két különböző sugarú kör, amelyeknek léteznek külső közös érintő egyenesei, a középpontjaik legyenek O_1 és O_2. Az egyik közös érintő érintési pontjai legyenek T_1, illetve T_2, a másik érintő egyenes érintési pontjai U_1, illetve U_2; a két érintő metszéspontja legyen H. A térben illesszünk a körökre egy-egy körkúpot, amelyek alkotói ugyanakkora, φ szöget zárnak be a körök Σ síkjával. A kúpok csúcsai legyenek az A_1 és A_2 pontok (*2. ábra*).

A H pontból nem csak a két kört, hanem a két kúpot is egymásba nagyíthatjuk, ezért az A_1A_2 egyenes átmegy a H ponton. Ezt a tényt most hasonlóság nélkül is igazoljuk. A kúpok A_1T_1, illetve A_2T_2 alkotóit megkaphatjuk úgy, hogy a körök T_1O_1, illetve T_2O_2 sugarát φ szöggel elforgatjuk a T_1T_2H érintő körül. Ezért ezek az alkotók és a H pont egy Φ_T síkban vannak. Hasonlóan látjuk, hogy az A_1U_1 és A_2U_2 alkotók is egy Φ_U síkban vannak a H ponttal. A Φ_T és Φ_U síkoknak A_1, A_2 és H is közös pontja, ezért ez a három pont egy egyenesen van.

Monge tétele (a három hasonlósági pont tétele)

Monge[1] tétele: *Ha adott a síkon három különböző sugarú kör, egymás külsejében, és vesszük páronként a külső közös érintőik metszéspontjait, akkor ez a három pont egy egyenesre esik.*

[1] Gaspard Monge francia matematikus (1746–1818)

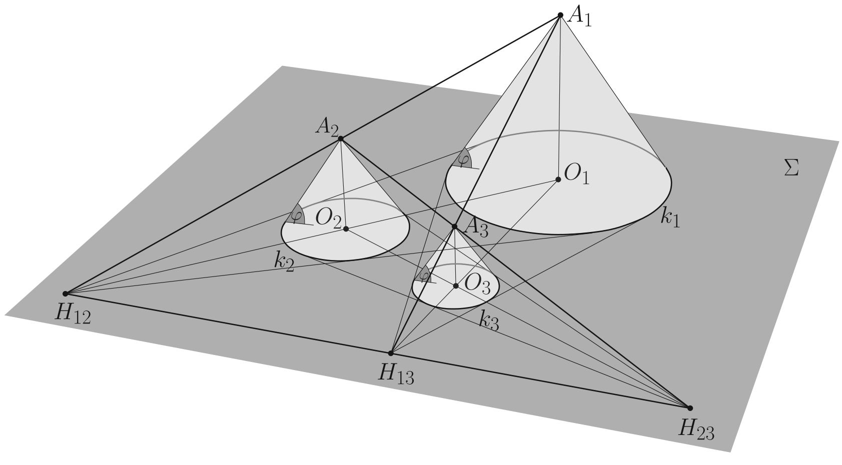


2. ábra

Világos, hogy itt a külső hasonlósági pontokról van szó, ezért mondjuk ki ebben az általánosabb formában:

Monge tétele, általánosabb változat: *A síkon bármely három különböző sugarú kör páronként vett külső hasonlósági pontjai egy egyenesre esnek.*

A tételt az előbb látott kúpokkal bizonyítjuk. Legyen a három kör k_1, k_2 és k_3 a Σ síkban, és minden i, j indexpárra jelölje k_i és k_j külső hasonlósági pontját H_{ij}. Válasszunk egy φ hegyesszöget, és illesszünk egy-egy kúpot a körökre, amelyeknek alkotói φ szöget zárnak be Σ-val. A kúpok csúcsai legyek A_1, A_2, illetve A_3 (*3. ábra*).

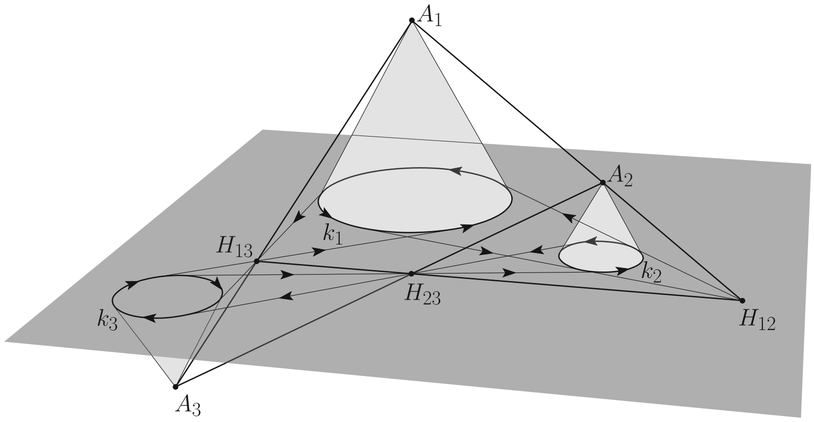


3. ábra

Bármely i, j indexek esetén az A_iA_j egyenes átmegy a H_{ij} ponton. Ezért mindegyik H_{ij} hasonlósági pont az $A_1A_2A_3$ síkban van. Ezzel már két különböző síkot is ismerünk, amely tartalmazza a H_{12}, H_{13} és H_{23} pontot, tehát ezek egy egyenesen, a Σ és az $A_1A_2A_3$ sík metszésvonalán vannak.

Mi legyen a belső hasonlósági pontokkal?

A belső hasonlósági pontokat is nehézség nélkül megszerkeszthetjük kúpokkal, csak most a kúpokat a sík ellentétes oldalára kell építenünk. Ha három körvonalra illesztünk kúpokat, és ezek közül kettő a sík egyik, a harmadik a sík másik oldalán van, akkor a Monge-tételnek egy olyan változatát kapjuk, amikor az egyik körpárnak a külső, a másik két párnak a belső hasonlósági pontját vesszük (*4. ábra*).



4. ábra

A Monge-tételnek ezeket a különböző változatait egységesen kezelhetjük, ha a körvonalaknak és érintő egyeneseknek irányítást adunk, vagyis nyilacskákat rajzolunk rájuk. Egy irányított körvonalnak csak az olyan irányított érintőit vesszük figyelembe, amelyeknél a kitüntetett irány megegyezik. Két irányított körvonal *hasonlósági pontja* azonos irányítású körök esetén az eddigi külső, ellentétes irányítású körök esetén a belső hasonlósági pont. A „pozitív" irányítású körökre a sík egyik oldalán, a „negatív" irányítású körökre a sík másik oldalán illesztünk kúpokat.

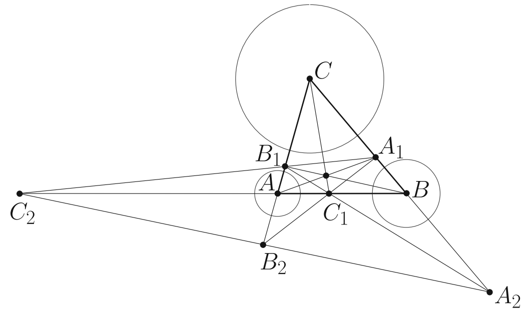
A Ceva- és a Menelaosz-tétel

Tanulságos lerajzolni egy ábrán három körnek mind a hat belső és külső hasonlósági pontját. Az 5. ábrán a három kör középpontja A, B és C, a belső hasonlósági pontok A_1, B_1 és C_1, a külső hasonlósági pontok pedig A_2, B_2 és C_2. A Monge-tétel szerint egy egyenesre esnek az A_2, B_2, C_2 pontok, továbbá az A_2, B_1, C_1 pontok, az A_1, B_2, C_1 pontok, és az A_1, B_1, C_2 pontok is. Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai, A_2, B_2 és C_2 egyenesre esnek, ezért a Desargues-tétel szerint a megfelelő csúcsokat összekötő AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy ponton mennek át.

Ha a körök sugarai r_a, r_b és r_c, akkor a körök között a hasonlóságok előjeles arányai

$$\frac{r_a}{r_b} = -\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_2A}{C_2B}, \quad \frac{r_b}{r_c} = -\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2B}{A_2C} \quad \text{és} \quad \frac{r_c}{r_a} = -\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{B_2C}{B_2A};$$

a szorzatuk 1. Ezek az arányok két híres tételben is szerepelnek:



5. ábra

Ceva[2] tétele: *Legyenek az ABC háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesein A_1, B_1, C_1 a csúcsoktól különböző pontok. Az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy ponton vagy párhuzamosak, ha*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Az állításban szereplő arányok előjelesek: az arány pozitív, ha a két szakasz ugyanabba az irányba mutat, és negatív, ha ellentétes irányúak. Az is megengedett, hogy A_1, B_1, C_1 az egyenesek végtelen távoli pontjai legyenek, ilyenkor a megfelelő arány -1.

Menelaosz[3] tétele: *Legyenek az ABC háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesein A_2, B_2, C_2 a csúcsoktól különböző pontok. Az A_2, B_2 és C_2 pontok akkor és csak akkor esnek egy egyenesre, ha*

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=-1.$$

A Ceva-tételhez hasonlóan az arányok most is előjelesek, és A_2, B_2, C_2 az egyenesek végtelen távoli pontjai is lehetnek.

Láthatjuk, hogy a Monge- és a Menelaosz-tétel egyik iránya lényegében ugyanaz, illetve hogy a Ceva- és a Menelaosz-tétel között az összekötő kapocs a Desargues-tétel.

„Hasonlósági pontok" nemeuklideszi geometriákban

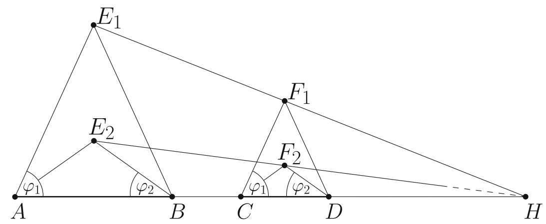
A gömbi és a hiperbolikus geometriákban nincs hasonlóság. Vicces módon azonban a körök hasonlósági pontjainak szerkesztése elmondható ilyenkor is.

Ha adott két kör a hiperbolikus síkban, vannak külső közös érintőik, és ezek el is metszik egymást, akkor a metszéspontot nevezhetjük a két kör „hasonlósági pontjának". A két körre egy-egy kúpot illesztve, a kúpok csúcsait összekötő egyenes átmegy a hasonlósági ponton. Ha három körünk van, bármelyik kettőnek vannak

[2]Giovanni Ceva (ejtsd: Cseva) olasz matematikus, 1647–1734
[3]Alexandriai Menelaosz görög matematikus csillagász, Kr.u. kb. 70–140

külső közös érintői, és ezek metszik egymást, akkor a Monge-tétel bizonyítását változtatás nélkül elmondhatjuk. Tehát a Monge-tétel (az eredeti, speciális formájában) igaz hiperbolikus geometriában is.

Ha bármely két kör „hasonlósági pontját" szeretnénk definiálni, közös érintők felhasználása nélkül, akkor megtehetjük, hogy a két körre kúpokat illesztünk, és a síkot átdöfjük a kúpok csúcsait összekötő egyenessel. (Ha a csúcsokat összekötő egyenes nem döfi a síkot, akkor nincs hasonlósági pont.) Azt viszont mindenképpen meg kell indokolunk, hogy a szerkesztésünk különböző meredekségű kúpok esetén is mindig ugyanazt a döféspontot produkálja. Ez igazából síkbeli feladat; a kúpok tengelyein keresztül fektethetünk egy síkot, és csak ezzel a síkkal vett metszetet vizsgáljuk (*6. ábra*).



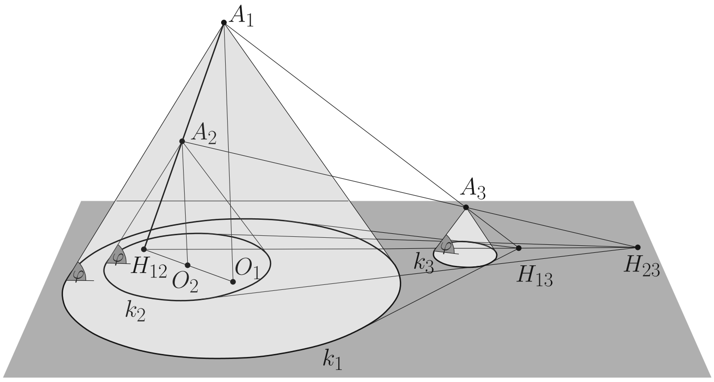
6. ábra

Vegyünk tehát két tetszőleges kört, k_1-et és k_2-t a Σ síkban; ezekhez szeretnénk igazolni, hogy a hasonlósági pont nem függ a Σ és a kúpok alkotói közötti φ szögtől. Vegyünk fel egy harmadik kört, k_3-at, amely kisebb, mint az első kettő, úgy, hogy a három kör középpontja ne essen egy egyenesre, k_3-nak a k_1-gyel és k_2-vel is legyenek külső közös érintői és ezek el is metsszék egymást a H_{13}, illetve a H_{23} pontban.

Most illesszünk tetszőlegesen egy-egy kúpot a k_1 és k_2 körökre, amelyek alkotói ugyanakkora φ szöget zárnak be a Σ síkkal; ezek csúcsai legyenek A_1, illetve A_2. Illesszünk egy harmadik kúpot a k_3 körre ugyanazzal a φ szöggel, ennek csúcsa legyen A_3 (*7. ábra*). (Megjegyzés: hiperbolikus geometriában nem lehet bármilyen körre bármilyen φ szöggel kúpot szerkeszteni, mert az alkotók nem feltétlenül metszik el a kúp tengelyét; de az igaz, hogy ha a k_1 és k_2 körökhöz létrejön a megfelelő kúp, akkor a náluk kisebb k_3-hoz is.)

Már láttuk, hogy az A_1A_3 egyenes átmegy a H_{13} ponton, és az A_2A_3 egyenes átmegy H_{23}-n. Az A_1A_2 egyenes benne van a kúpok tengelyére fektetett $O_1A_1O_2A_2$ síkban és a $H_{13}H_{23}A_3$ síkban is. Ezeknek a metszésvonala a Σ síkkal az O_1O_2, illetve a $H_{13}H_{23}$ egyenes, egyik sem függ a φ szög nagyságától.

Ha az O_1O_2 és $H_{13}H_{23}$ egyenesek metszik egymást egy H_{12} pontban, akkor H_{12} a három síknak közös pontja, tehát rajta van a harmadik metszésvonalon, az A_1A_2 egyenesen is. Ilyenkor tehát a döféspont mindig létrejön és ugyanaz. Ha pedig az O_1O_2 és $H_{13}H_{23}$ egyenesek párhuzamosak (nem metszik egymást), akkor a három síknak nincs közös pontja, és így A_1A_2 metszésvonalnak nem lehet pontja a Σ síkban.



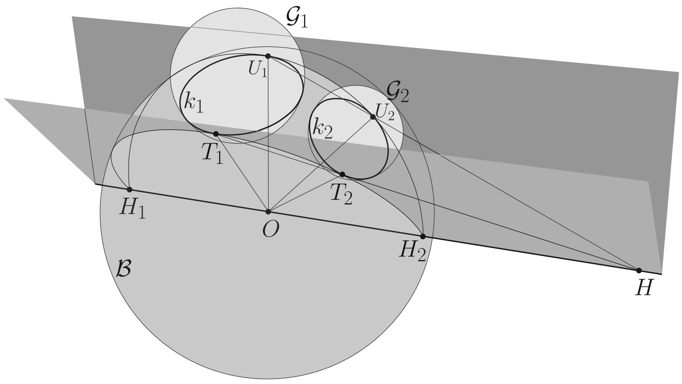
7. ábra

Tehát, a φ nagyságától függetlenül, az A_1A_2 egyenes vagy mindig döfi a Σ síkot, és mindig ugyanabban a H_{12} pontban, vagy pedig semmilyen φ esetén sem döfi, és ilyenkor nem jön létre a „hasonlósági" pont.

Gömbön: hasonlósági átmérő

A gömbfelületen két körvonal közös érintői főkörök, amelyek a gömb két egymással átellenes pontjában metszik egymást. Ezért hasonlósági pontok helyett „hasonlósági átmérőkről" fogunk beszélni.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a körök sugara különböző, és a közös érintők léteznek. Legyen k_1 és k_2 két, főkörnél kisebb körvonal az O középpontú $\mathcal{B}$ gömbfelületen, amelyekhez létezik két főkör, amely érinti mindkét kört úgy, hogy k_1 és k_2 a főköröknek ugyanazon az oldalain van. A két érintő főkör metszéspontjait jelölje H_1 és H_2, az érintési pontokat az egyik közös érintőn T_1, illetve T_2, a másik érintő főkörön U_1 és U_2. A két körvonalra illesszünk egy-egy „békaszemet", azaz olyan $\mathcal{G}_1$, illetve $\mathcal{G}_2$ gömböt, amely merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t, és legyen H a két békaszem külső hasonlósági pontja (*8. ábra*).



8. ábra

Vegyük észre, hogy a szemgolyókat érinti a $H_1T_1T_2H_2$ főkör és a gömb OT_1, illetve OT_2 sugara is, ezért a szemgolyókat az $H_1T_1T_2H_2$ sík is érinti, és a két szemgolyó a síknak ugyanazon az oldalán van. Ezért a H hasonlósági pont ebben a síkban van; sőt, a két érintési pontot összekötő T_1T_2 egyenes átmegy a H ponton. Ugyanígy láthatjuk, hogy a $H_1U_1U_2H_2$ sík, és benne az U_1U_2 egyenes is átmegy H-n.

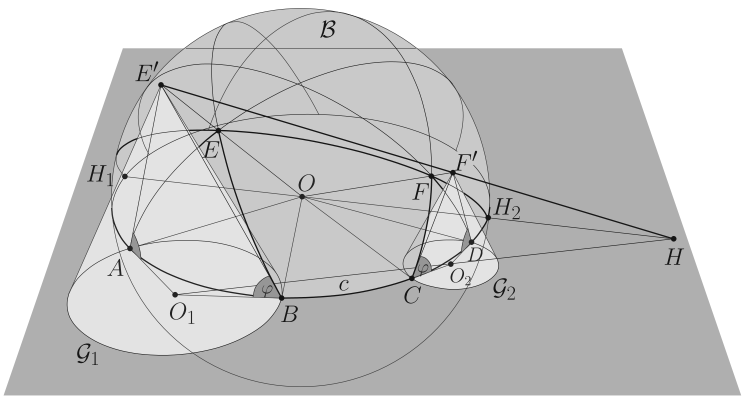
A $H_1T_1T_2H_2$ és a $H_1U_1U_2H_2$ síknak O, H_1, H_2 és H is közös pontja, tehát ez a négy pont egy egyenesen van. Azt kaptuk, hogy a két körvonal „külső hasonlósági átmérőjének" egyenese átmegy a körvonalakhoz tartozó békaszemek külső hasonlósági pontján.

Az általános esetben nem feltétlenül léteznek a körvonalak közös érintő főkörei. Szerencsére a békaszemek most is segítenek, és 3-dimenziós gömbi geometria helyett elég a kúpok tengelyére illeszkedő „síkon", azaz gömbfelületen belül dolgoznunk.

Legyen c a két kör centrálisa, vagyis az a főkör, amely átmegy a k_1 és k_2 középpontján; a két körrel vett metszéspontok legyenek A és B, illetve C és D. Válasszunk egy tetszőleges φ hegyesszöget, és a 6. ábrához hasonlóan, az AB és CD szakaszokra, a c-nek ugyanazon az oldalán, rajzoljunk olyan egyenlő szárú ABE és CDF gömbháromszögeket, amelyekben $EAB\sphericalangle = ABE\sphericalangle = FCD\sphericalangle = CDF\sphericalangle = \varphi$; ezek a háromszögek felelnek meg a két körvonalra emelt kúpoknak. A kúpokat összekötő egyenesnek az EF főkör felel meg; legyen az EF főkör és c két metszéspontja H_1 és H_2.

Vegyük fel ismét a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemeket, a középpontjuk legyen O_1, illetve O_2. Metsszük el a békaszemeket a c síkjával, és a metszetkörökre emeljünk olyan kúpokat, amelyek alkotói a c síkjával φ szöget zárnak be. A két kúp csúcsai legyenek E', illetve F'.

Az AE' szakasz érinti az AE főkörívet, ezért O, A, E és E' egy síkban van. Hasonlóan O, B, E és E' is egy síkban van; ennek a két síknak O, E és E' közös pontjai, tehát egy egyenesen vannak. Ugyanígy látjuk, hogy O, F és F' is egy egyenesen van (*9. ábra*).



9. ábra

Tekintsük ezek után az O_1O_2, H_1H_2 és $E'F'$ egyeneseket. Mint láttuk, az $E'F'$ egyenes és a H_1H_2 egyenes is az EF főkör síkjában van; az O_1O_2 és a H_1H_2 is a c síkjában, végül az O_1O_2 és az $E'F'$ is a két kúp tengelyére illesztett síkban. A három egyenes tehát vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamosak.

Ha k_1 és k_2 különböző sugarú, akkor a két kúp is különböző méretű, és az $E'F'$ és O_1O_2 egyenesek a két kúp, egyben a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemek külső hasonlósági pontjában metszik egymást, tehát a H_1H_2 egyenes is átmegy ezen a ponton.

Ha k_1 és k_2 sugara ugyanakkora, akkor a két kúp is ugyanakkora, tehát $E'F'$ párhuzamos az O_1O_2 egyenessel. Ebben az esetben H_1H_2 is párhuzamos a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ békaszemek centrálisával.

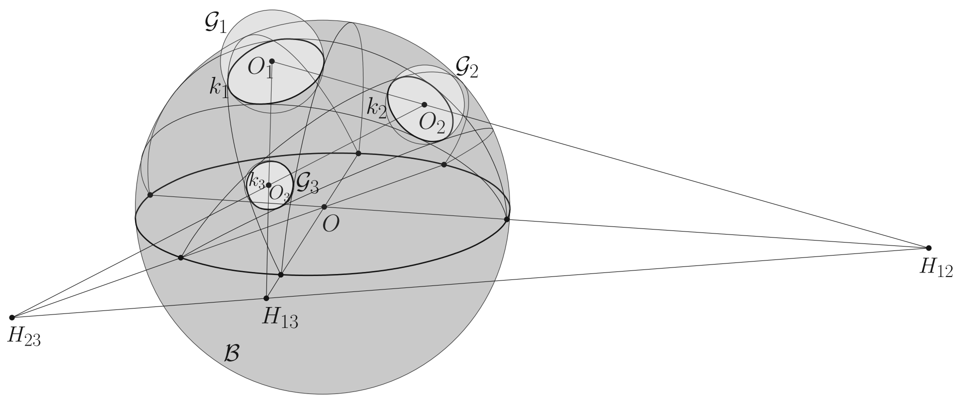
Tehát a H_1H_2 átmérő nem függ a φ választásától; a hasonlósági átmérő különböző sugarú körök esetén átmegy a békaszemek külső hasonlósági pontján, egyenlő sugarú körök esetén párhuzamos a békaszemek centrálisával.

A Monge-tétel a gömbön

Most már minden készen áll ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Monge-tétel gömbi megfelelőjét.

Monge-tétel a gömbön. *A gömbfelületen bármely három (a főkörnél rövidebb) körvonal hasonlósági átmérői egy főkörön vannak.*

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a három körvonal sugara különböző. A gömb középpontját jelöljük O-val. Legyen k_1, k_2 és k_3 három tetszőleges körvonal, a hozzájuk tartozó békaszemek legyenek $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, illetve $\mathcal{G}_3$, a középpontjaik O_1, O_2, illetve O_3, a páronként vett külső hasonlósági pontjaik H_{12}, H_{13} és H_{23} (*10. ábra*).



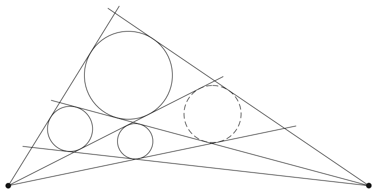
10. ábra

Ha a szemeket elmetsszük az $O_1O_2O_3$ síkkal, éppen a Monge-tétel ábráját kapjuk; a Monge-tétel szerint H_{12}, H_{13} és H_{23} egy egyenesre esik. Akkor viszont a $\mathcal{B}$ gömbnek a három hasonlósági ponton átmenő átmérői, az OH_{12}, OH_{13}, illetve OH_{23} egyenesek, mind az $OH_{12}H_{13}H_{23}$ síkban, vagyis egy főkörön vannak.

Ha a három körvonal közül valamelyik kettő, például k_1 és k_2 ugyanakkora, akkor a hozzájuk tartozó békaszemek is ugyanakkorák, és a H_{12} pont nem jön létre. Ha a békaszemek sugara $r_1 = r_2$ és r_3, akkor $\frac{H_{13}O_1}{H_{13}O_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{H_{23}O_2}{H_{23}O_3}$ miatt a $H_{13}H_{23}$ egyenes párhuzamos a O_1O_2 egyenessel. De akkor k_1 és k_2 hasonlósági átmérője párhuzamos O_1O_2-vel és $H_{13}H_{23}$-mal, tehát az $OH_{13}H_{23}$ síkban van.

Végül, ha mindhárom körvonal sugara ugyanakkora, akkor mindhárom hasonlósági átmérő párhuzamos az $O_1O_2O_3$ síkkal, így ilyenkor is egy síkban, vagyis egy főkörön vannak.

Feladatok



11. ábra

1. Két pontból rajzoljunk három-három félegyenest úgy, hogy bármely két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást. Ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha ezek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is az (*11. ábra*).

2. Bizonyítsuk be a Ceva-tételt közvetlenül, térbe kilépéssel.

3. Írjuk fel és bizonyítsuk be a Ceva- és a Menelaosz-tétel gömbi megfelelőit.

4. Az $ABCD$ négyszög AB oldalán adott egy P pont. Legyen ω a CPD háromszög beírt köre, a középpontja I. Tegyük fel, hogy ω érinti az APD és BPC háromszögekbe írt köröket a K, illetve az L pontban. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja E, és legyen az AK és BL egyenesek metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy E, I és F egy egyenesre esik. (IMO Shortlist, 2007/G8)

Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0$, (*7 pont*)

b) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1$. (*6 pont*)

2. A nem is olyan távoli jövőben a fizika fakultációsok online szimulációban vizsgálhatják töltött részecskék viselkedését mágneses mezőben, ahol a részecskék helyzetét derékszögű koordináta-rendszer segítségével írják le. Két fizika fakultációs diák, Hácé és Kácé fontos kísérletet tervez: egy háromszög csúcsaiba $\big(A(-2;1)$; $B(10;6)$; $C(4;9)\big)$ Kácé három detektort helyez. Hácé ekkor egy töltött részecskét juttat a háromszög súlypontjába. A töltött részecske tömege peti-ben (peti: tömegegység a szimulációban) a háromszög területének és a $BAC\sphericalangle$ cosinusának szorzata. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit és a részecske tömegének pontos értékét. (*12 pont*)

3. Pébé tanár úr, a C osztály osztályfőnöke lelkesen érkezett a reggeli órára.

– Képzeljétek, megálmodtam a matematika emelt szintű érettségi átlagunkat!

– És mennyi volt, tanár úr?

– Azt sajnos elfelejtettem, de emlékszem, hogy a D-sek átlaga szabályos közelítéssel 84,3, az E-seké 85,1, a három osztály átlaga pedig 87,9 volt. Tudjuk, hogy a D-ből 11-en, az E-ből 14-en, tőlünk pedig 24-en írnak emelt szintű érettségit. Ebből már ki lehet számolni az osztályátlagot.

a) Mennyi a C-sek osztályátlaga egy tizedesjegyre kerekítve, ha minden diák érettségi eredménye csak egész százalék lehet? (*8 pont*)

A Szalagavató nyitótáncában a C-sek 20%-a, a D-sek 25%-a vesz részt. Az egyik szünetben 4 fő C osztályos és 2 fő D osztályos tanuló vásárolt pizzát a büfében.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan ketten táncolnak a nyitótáncban? (*6 pont*)

4. Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-8$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-2x$ függvények.

a) Adjuk meg a $g\circ f$ függvény $x=2$ abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét. (*7 pont*)

b) Adjuk meg a $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f}{g}$ határértéket. (*5 pont*)

II. rész

5. Két birkózó egyesület közös bajnokságra készül. A felkészülés során előírás a napi 8 óra alvás. A korábbi felkészülések során kiderült, hogy a felkészülés hatékonyságát jelentősen befolyásolja a regenerálódásra fordított idő. A szakemberek megállapították, hogy a hatékonyságot az $E(t)=t^3\cdot(3{,}2-t)$ függvénnyel lehet leírni, ahol t a regenerálódásra fordított idő.

a) Mennyi időt fordítsanak a regenerálódásra, hogy a felkészülés a lehető leghatékonyabb legyen? (*8 pont*)

A bajnokságot kieséses rendszerben folytatják le, a párokat minden egyes mérkőzés előtt véletlenszerűen sorsolják. Az első pár sorsolásakor $\frac{7}{40}$ a valószínűsége annak, hogy mindkét versenyző az A egyesület tagja. Két mérkőzés után, ahol egy résztvevőt az A, három résztvevőt pedig a B egyesületből sorsoltak ki, ugyanakkora valószínűséggel sorsolják mindkét versenyzőt az A egyesületből, mint a B egyesületből.

b) Hányan indultak a bajnokságon az egyes egyesületekből? (*8 pont*)

6. Egy paralelogramma alakú füves terület oldalai 50 m és 34 m, az oldalak végpontjait összekötő átló 56 m hosszú. Az átló egy pontjába egy önműködő locsoló berendezést helyezünk, amely a terület bármely pontjából eléri bármely másik pontját, és ha a távolságot beállítottuk, akkor egy körön belül mindent lelocsol.

a) Legalább mekkora területet kell kézzel locsolni, ha a locsoló berendezés a terület határán túl nem locsolhat? (*10 pont*)

A füves területen egy kör alakú virágágyást alakítanak ki. A virágágyást két egyenes gyalogút szeli át, amelyek egy a körön kívüli P pontban metszik egymást. A virágágyást az egyik gyalogút az A és B, a másik gyalogút a C és D pontokban metszi. Tudjuk, hogy $PA = 3$ m, $AB = 5$ m, valamint $PD = PC + 10$ m.

b) Mekkora a PD távolság? (*6 pont*)

7. *a*) Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos páratlan számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzata reciprokának kétszeresével. (*4 pont*)

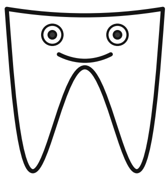
Adott az $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots$ végtelen sor.

b) Bizonyítsuk be, hogy az n-edik részletösszeg:

$$S_n = \frac{n}{3n+1}.$$

(*8 pont*)

c) Adjuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$ határértéket. (*4 pont*)



8. Az *ábrán* egy nemzetközi fogász kongresszus emblémája látható.

Az alakzatot az alábbi függvények grafikonjai határolják:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 \quad \text{és} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{36}x^2 + 4.$$

a) Határozzuk meg a függvények grafikonjainak metszéspontjait. (*2 pont*)

b) Mekkora az embléma területe, ha a koordináta-rendszer 1 egysége a valóságban 1 cm-nek felel meg?

A konferencián egy asztalhoz került hat fogorvos, akik örömmel állapították meg, hogy valamennyien részt vesznek egy programban, amelyben hasznos kezelési eljárásokat osztanak meg egymással. Ennek keretében a hat fogorvos is kapcsolatban áll egymással, mindegyik mindegyikkel. A kapcsolattartás két hálózaton keresztül folyik, de két fogorvos egymás között mindig ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*8 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy az asztalnál helyet foglaló hat fogorvos között van három olyan, aki egymás közt ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*6 pont*)

9. Egy függönytartó rúd kúpban végződik. Rögzítő elemként egy R sugarú gömböt kúposan átfúrunk úgy, hogy pontosan illeszkedjen a rúd végére, majd az így kapott testet ráhúzzuk úgy, hogy a kúp tengelye átmenjen a gömb középpontján. A rögzítőelem magassága 7 cm, a felső alapköre $r_1 = 3$ cm, az alsó alapköre $r_2 = 4$ cm sugarú.

a) Határozzuk meg a rögzítőelem felszínét és térfogatát. (*10 pont*)

Az áruházban a függönytartó rudakat négyféle színben (arany, ezüst, fehér, fekete), a rögzítőelemet háromféle színben (arany, zöld és piros), a függönyöket ötféle színben (arany, ezüst, fehér, zöld, piros) árulják.

b) Hányféle kombinációt lehet összeállítani, ha az az előírás, hogy legalább az egyik elem aranyszínű legyen és a rúd két végén lévő rögzítőelem azonos színű? (*6 pont*)

Balga Attila
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb* 4? (*7 pont*)

b) *Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható* 60*-nal?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A sorrendre való tekintet nélkül 11-féleképpen tudjuk előállítani a 4-et, a 3-at, a 2-t vagy az 1-et négy nemnegatív egész szám összegeként:
$4=4+0+0+0=3+1+0+0=2+2+0+0=2+1+1+0=1+1+1+1$ (5 lehetőség);
$3=3+0+0+0=2+1+0+0=1+1+1+0$ (3 lehetőség);
$2=2+0+0+0=1+1+0+0$ (2 lehetőség);
$1=1+0+0+0$ (1 lehetőség).

Az $X000$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot, mert a 0 nem állhat a legnagyobb helyiértéken.

Az $XY00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, a maradék két helyre 2-féleképpen variálhatjuk a másik két számjegyet, tehát ezekből egyaránt $(3\cdot 2=)$ 6 négyjegyű számot képezhetünk.

Az $XX00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, így ezekből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Az $XYY0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, ezután 3-féleképpen választhatjuk ki az X helyét, így ebből $(3\cdot 3=)$ 9-féle négyjegyű szám képezhető.

Az $XXX0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, így ebből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Végül az $XXXX$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot.

Összesen tehát $(1+6+3+9+1+1+1+6+3+1+3+1=)$ 35, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

b) 60-nal pontosan akkor osztható egy szám, ha 3-mal, 4-gyel, és 5-tel is osztható. 3-mal csak akkor osztható a szám, ha számjegyeinek összege 3-mal osztható, tehát esetünkben a számjegyek összege 3. 5-tel akkor osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik, de 5-re végződő szám nincs a szóba jövő számok között, a számnak tehát

0-ra kell végződnie. 4-gyel akkor osztható, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel, tehát a szóba jöhető lehetőségek közül az utolsó két számjegy 00 vagy 20 lehet (12 nem lehet, mert az 5-tel oszthatóság miatt 0-ra kell végződnie).

Azok a négyjegyű számok, melyek 00-ra vagy 20-ra végződnek, és számjegyeik összege 3, a következők: 3000, 2100, 1200, 1020.

Tehát 4, a feltételeknek megfelelő szám van.

2. *a) Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a* 6 *kékszemű tanuló átlaga pontosan* 3*, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan* 4 *lett. A* 21 *fiú átlaga pontosan* 3,5*, a lányok átlaga pontosan* 4,5 *lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban.* (*5 pont*)

b) Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A buszköltséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség 175 Ft*-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség további* 225 Ft*-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.*

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje az osztály létszámát x. Az osztályzatok összegét kétféleképpen felírva:

$$6\cdot 3+(x-6)\cdot 4=21\cdot 3{,}5+(x-21)\cdot 4{,}5,$$
$$4x-6=4{,}5x-21,$$
$$x=30.$$

Az osztály létszáma 30 volt.

A dolgozat átlaga a teljes osztályban $\frac{6\cdot 3+24\cdot 4}{30}=3{,}8$ volt.

Ellenőrzés: $\frac{21\cdot 3{,}5+9\cdot 4{,}5}{30}=3{,}8$, ami megegyezik az előzőleg kiszámított átlaggal.

b) *I. megoldás.* Jelölje x a szerdáig elfogadott jelentkezések számát. Ekkor hétfőig $x-5$, keddig $x-3$ jelentkezést fogadtak el. Jelölje y a teljes buszköltséget.

Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\frac{y}{x}=\frac{y}{x-5}-400,$$
$$\frac{y}{x}=\frac{y}{x-3}-225.$$

Beszorozva a nevezőkkel:

$$y(x-5)=yx-400x(x-5),$$
$$y(x-3)=yx-225x(x-3).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és rendezve:

$$5y = 400x(x-5),$$
$$3y = 225x(x-3).$$

Az első egyenletből $y = 80x(x-5)$, ezt a másodikba beírva:

$$240x(x-5) = 225x(x-3).$$

Mivel $x \neq 0$, oszthatunk vele, és rendezés után kapjuk, hogy $x = 35$. Visszahelyettesítve $y = 84\,000$ adódik. Tehát 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig 84 ezer Ft volt.

Ellenőrzés: hétfőig 30 ember jelentkezett, nekik $\left(\frac{84\,000}{30} = \right)$ 2800 Ft-ot kellett volna fizetni.

Keddig 32 ember jelentkezett, így egy embernek $\left(\frac{84\,000}{32} = \right)$ 2625 Ft-ot kellett volna fizetni. $2625 = 2800 - 175$ valóban.

Szerdáig 35 ember jelentkezett, így egy embernek $\left(\frac{84\,000}{35} = \right)$ 2400 Ft-ot kellett fizetni. $2400 = 2625 - 225$ valóban.

II. megoldás. Jelölje n a hétfőig elfogadott jelentkezések számát, és b (Ft) az egy főre eső buszköltséget n jelentkező esetén. Ekkor keddig $n+2$ fő jelentkezett, akiknek $b-175$ Ft-ot kellett volna fizetni, szerdáig pedig végül $n+5$ fő jelentkezett, akiknek $b-400$ Ft-ot kellett fizetni. Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$nb = (n+2)(b-175),$$
$$nb = (n+5)(b-400).$$

Mindkét egyenletben elvégezve a kijelölt műveleteket, és nb-t kivonva az egyenletek mindkét oldalából:

$$0 = 2b - 175n - 350,$$
$$0 = 5b - 400n - 2000.$$

A második egyenletből $b = 80n + 400$, ezt az elsőbe beírva:

$$0 = 2(80n + 400) - 175n - 350,$$

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy $n = 30$. Visszahelyettesítve $b = 2800$ adódik.

Tehát $(30+5=)$ 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig $(30 \cdot 2800 =)$ 84 000 Ft volt.

Ellenőrzés mint az I. megoldásban.

3. *a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x\right| = \frac{1}{2}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) Legyen $2^x = a$. Ekkor $4^x = a^2$ és $2^{x-1} = \frac{a}{2}$. Így az egyenlőtlenség a következőképpen írható fel: $a^2 + 2 < \frac{9a}{2}$. Kettővel beszorozva és nullára rendezve:

$$2a^2 - 9a + 4 < 0.$$

A $2a^2 - 9a + 4 = 0$ egyenlet gyökei 4 és 0,5. Mivel a főegyüttható pozitív, az egyenlőtlenség $0{,}5 < a = 2^x < 4$ esetén teljesül.

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, $2^{-1} < 2^x < 2^2$ pontosan akkor teljesül, ha $-1 < x < 2$.

b) $$\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x = \frac{3}{2} - \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2}.$$

Az abszolútértéket figyelembe véve két eset lehetséges:

$$2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Nullára rendezve az egyenleteket kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

A $\sin x$-ben másodfokú egyenleteket megoldva adódik, hogy $\sin x$ értéke négyféle lehet: 1, $-\frac{1}{2}$, 0 vagy $\frac{1}{2}$. Ezekből kapjuk az egyenlet megoldásait: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ és $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

4. *a*) *Az*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1; 10)$ *és az* $M_2(4; -5)$ *pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a, b, c és d értékét.* (*7 pont*)

b) *Határozzuk meg az*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x + 3)^2 - 6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) M_1 és M_2 illeszkednek f grafikonjára, ezért $10 = -a + b$ és $-5 = 4a + b$. Az első egyenletből kivonva a másodikat $15 = -5a$ adódik, innen pedig $a = -3$. Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $b = 7$.

M_1 és M_2 illeszkednek g grafikonjára is, ezért $10 = (-1 - c)^2 + d$ és $-5 = (4 - c)^2 + d$. Az első egyenletből kivonva a másodikat a $15 = (-1 - c)^2 - (4 - c)^2$

egyenlet adódik. A négyzetre emeléseket elvégezve a másodfokú tag kiesik, és kapjuk, hogy $15 = 10c - 15$, innen pedig $c = 3$. Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe $10 = (-1-3)^2 + d$, ahonnan $d = -6$.

Összefoglalva tehát $a = -3$, $b = 7$, $c = 3$ és $d = -6$, így $f(x) = -3x + 7$ és $g(x) = (x-3)^2 - 6$.

b) Meghatározzuk a két függvény metszéspontjait.

$$3x + 7 = (x+3)^2 - 6$$

A négyzetre emelést elvégezve és nullára rendezve: $0 = x^2 + 3x - 4$. Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$.

Mivel a két függvény grafikonja közül az f grafikonja helyezkedik el a g grafikonja fölött, ezért a keresett területet a $\int_{-4}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ integrál adja meg:

$$f(x) - g(x) = (3x+7) - \left[(x+3)^2 - 6\right] = 3x + 7 - (x^2 + 6x + 3) = -x^2 - 3x + 4,$$

$$\int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{13}{6} - \left(-\frac{56}{3}\right) = \frac{125}{6}.$$

A síkidom területe tehát $\frac{125}{6}$ területegység.

II. rész

5. *Egy felmérésben azt vizsgálták, az autósok hogyan viszonyulnak a téli gumiabroncsok használatához. A felmérésben* 1800 *autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumiabroncsokat,* 1320*-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumiabroncsot,* 40%*-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.*

a) *Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon.* (*6 pont*)

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumiabroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

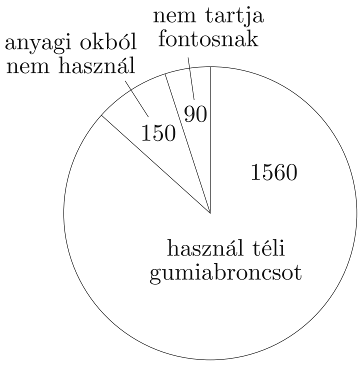
Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km*-t tett meg, addig a műszerfal* 101,2 km *megtett utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője* 632 mm *volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.*

b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (*5 pont*)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozaton vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. *Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége* 1,6 mm *alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén* 1/15 *annak a valószínűsége, hogy a kopás* 1,6 mm *alá csökkent.)*

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 *autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább* 5 *olyan autót találnak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) $\frac{1800-1320}{2}=240$ autós nem használ téli gumiabroncsot, $1800-240=1560$ autós igen. Legyen n 240 téli gumiabroncsot nem használó autós közül azoknak a száma, akik anyagi okból mondanak le a használatáról, ekkor azok száma, akik nem is tartják fontosnak a használatát, $0{,}6n$. $0{,}6n=240-n$, ahonnan $n=150$.



Tehát 150-en anyagi okokból mondanak le a téli gumiabroncs használatáról, 90-en pedig nem tartják fontosnak a használatát.

A kördiagramon 1° $\frac{1800}{360}=5$ autósnak felel meg.

A téli gumiabroncsot használókhoz tartozó középponti szög tehát $\frac{1560}{5}=312$ fokos, a használatról anyagi okokból lemondókhoz tartozó középponti szög $\frac{150}{5}=30$ fokos, a használatot fontosnak nem tartókhoz tartozó középponti szög pedig $\frac{90}{5}=18$ fokos.

b) *I. megoldás.* A gumiabroncs gyártáskori kerülete $K=d\pi\approx 1985{,}5$ mm. Ekkor 100 km megtétele alatt a kerék $\frac{100\,000\,000}{1985{,}5}\approx 50\,365$-öt fordul.

A kopott gumiabronccsal futó autó műszerei 101,2 km út megtételét

$$\frac{101\,200\,000}{1985{,}5}\approx 50\,970$$

fordulat érzékelése után jelzik. Ekkor azonban az autó ténylegesen még csak 100 km-t tett meg, tehát az abroncs kerülete $\frac{100\,000\,000}{50\,970}\approx 1961{,}9$ mm, sugara $\frac{1961{,}9}{2\pi}\approx 312{,}2$ mm.

Mivel az abroncs gyártáskori sugara 316 mm volt, ezért a felületi kopás kb. 3,8 mm volt.

II. megoldás. A műszerek a ténylegesen megtett út 1,012-szeresét érzékelték, tehát a kerék 1,012-szer annyi fordulatot tett meg, mint amennyit újkori állapotában

100 km-en fordult volna. Azaz kerülete 1,012-ed részére csökkent. Mivel a kerület és a sugár egyenesen arányos, ezért a kerék sugara is 1,012-ed részére csökkent, tehát a gumi kopott állapotában $316 : 1{,}012 \approx 312{,}3$ mm-es. A felületi kopás így kb. 3,7 mm (az I. megoldásban a kerekítések miatt jött ki 3,8 mm).

c)
$$P(\text{legalább } 5) = 1 - P(\text{legfeljebb } 4) = \\ = 1 - \big[P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)\big].$$

Az $n = 80$ és $p = \frac{1}{15}$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével:

$$P(0) = \left(\frac{14}{15}\right)^{80} \approx 0{,}0040,$$

$$P(1) = \binom{80}{1}\left(\frac{14}{15}\right)^{79} \cdot \frac{1}{15} \approx 0{,}0229,$$

$$P(2) = \binom{80}{2}\left(\frac{14}{15}\right)^{78} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{2} \approx 0{,}0646,$$

$$P(3) = \binom{80}{3}\left(\frac{14}{15}\right)^{77} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{3} \approx 0{,}1200,$$

$$P(4) = \binom{80}{4}\left(\frac{14}{15}\right)^{76} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{4} \approx 0{,}1650.$$

Így $P(\text{legalább } 5) = 1 - \big[P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)\big] \approx 1 - 0{,}3765 = 0{,}6235.$

6. *A valós számokon értelmezett $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + bx + c$ függvénynek lokális maximuma van $x = -2$-nél.*

a) Igazoljuk, hogy ekkor $b = -12$. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f-nek három különböző zérushelye van. (*7 pont*)

c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c = 0$. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A függvénynek ott lehet lokális maximuma, ahol az első deriváltja nulla. $f'(x) = 6x^2 + 6x + b$, $f'(-2) = 12 + b = 0$, azaz valóban csak $b = -12$ lehetséges.

Ellenőrizni kell még, hogy valóban lokális maximumhely-e ekkor a -2. $f''(x) = 12x + 6$, $f''(-2) = -18$, mivel a második derivált itt negatív, ezért a -2 valóban lokális maximumhely.

b) A harmadfokú függvény alakját figyelembe véve akkor lesz az f-nek három különböző zérushelye, ha a lokális maximuma pozitív, lokális minimuma negatív értéket vesz fel.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei a -2 és az 1, melyek közül a -2 lokális maximumhely, az 1 pedig lokális minimumhely.

$$f(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) + c = 20 + c > 0, \quad \text{ahonnan} \quad c > -20,$$
$$f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + c = -7 + c < 0, \quad \text{ahonnan} \quad c < 7.$$

Összevetve: $-20 < c < 7$ esetén lesz f-nek három különböző zérushelye.

c) $c = 0$ esetén: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x = x(2x^2 + 3x - 12)$. Ennek a függvénynek egyik zérushelye $x_1 = 0$, másik két zérushelyét a $2x^2 + 3x - 12 = 0$ egyenlet megoldásai adják. Ezek (a másodfokú egyenlet megoldóképletéből) $x_{2,3} = \frac{-3\pm\sqrt{105}}{4}$ (azaz három tizedesjegy pontossággal $-3{,}312$ és $1{,}812$).

7. *A kanaszta nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában* 55 *lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében* 13-13 *lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezeken a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.*

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés" lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. (*4 pont*)

Egy szerencsejátékban 4 *Király és* 4 *Ász közül visszatevés nélkül húz lapokat a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt* k *darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye* $100k^2$ *forint.*

c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. (*7 pont*)

Megoldás. *a)* A kérdezett valószínűségeket hipergeometrikus eloszlás segítségével határozhatjuk meg. Összesen van a két csomagban 110 lap, ezek között 18 szerencsés, és 3 lapot húzunk ki visszatevés nélkül.

$$P(0) = \frac{\binom{92}{3}}{\binom{110}{3}} = \frac{125\,580}{215\,820} = \frac{2093}{3597} \approx 0{,}582,$$

$$P(1) = \frac{\binom{18}{1}\binom{92}{2}}{\binom{110}{3}} = \frac{75\,348}{215\,820} = \frac{2093}{5995} \approx 0{,}349,$$

$$P(2) = \frac{\binom{18}{2}\binom{92}{1}}{\binom{110}{3}} = \frac{14\,076}{215\,820} = \frac{391}{5995} \approx 0{,}065,$$

$$P(3)=\frac{\binom{18}{3}}{\binom{110}{3}}=\frac{816}{215\,820}=\frac{68}{17\,985}\approx 0{,}0038.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy például az első négy lap sorban pikk, káró, kőr és treff:

$$\frac{26}{110}\cdot\frac{26}{109}\cdot\frac{26}{108}\cdot\frac{26}{107}\approx 0{,}0033.$$

A négy különböző szín azonban $4!=24$-féle sorrendben kerülhet elő, ez 24 különböző (diszjunkt) lehetőség, tehát a kérdezett valószínűség az előző érték 24-szerese, azaz 0,079.

c) Annak a valószínűsége, hogy 0, 1, 2, 3, illetve 4 Királyt húz a játékos az első Ász előtt:

$$P(0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$P(1)=\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7},$$

$$P(2)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{7},$$

$$P(3)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{35},$$

$$P(4)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{70}.$$

A kérdezett várható érték így

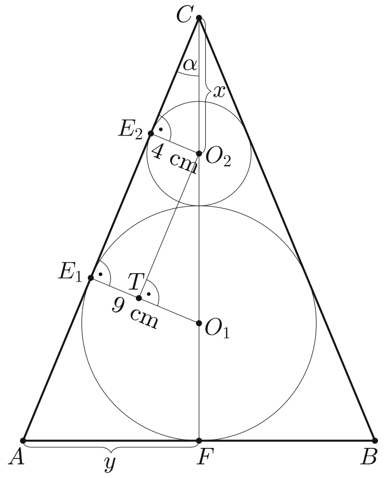
$$\sum_{i=0}^{4}P(i)\cdot 100i^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\right)\frac{2}{7}\cdot 100+\frac{1}{7}\cdot 400+\frac{2}{35}\cdot 900+\frac{1}{70}\cdot 1600=160\text{ Ft.}$$

8. *Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB, beírt körének középpontja O_1, a beírt kör sugara* 9 cm. *A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2, sugara pedig* 4 cm.

a) *Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát.* (*5 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy $O_2C=10{,}4$ cm.* (*4 pont*)

c) *Határozzuk meg a háromszög területét.* (*7 pont*)



Megoldás. *a)* Jelölje az AC száron a beírt kör érintési pontját E_1, a második kör érintési pontját pedig E_2. Bocsássunk merőlegest O_2-ből O_1E_1-re, a merőleges talppontját jelölje T. A derékszögű O_1O_2T háromszögben $O_1O_2 = 9 + 4 = 13$ cm, $O_1T = 9 - 4 = 5$ cm. Így a Pitagorasz-tétellel $O_2T = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm.

Mivel $TO_2E_2E_1$ téglalap, ezért $E_1E_2 = O_2T = 12$ cm.

b) Az O_1CE_1 és az O_2CE_2 háromszögek hasonlóak, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak. Az O_2C szakasz hosszát jelölje x. Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{13+x}{9} = \frac{x}{4}$, ahonnan $x = 10{,}4$, az O_2C szakasz hossza tehát valóban 10,4 cm.

c) I. megoldás. Az AB szakasz felezőpontját jelölje F. $CF = 9 + 9 + 4 + 10{,}4 = 32{,}4$ cm.

Az AFC és az O_2E_2C háromszögek hasonlóak, mert egyik hegyesszögük közös, és mindkettőnek van egy derékszöge, így szögeik megegyeznek. Az AF szakasz hosszát jelölje y. Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{AF}{CF} = \frac{E_2O_2}{CE_2}$. A Pitagorasz-tételből $CE_2 = \sqrt{10{,}4^2 - 4^2} = 9{,}6$ cm. $\frac{y}{32{,}4} = \frac{4}{9{,}6}$, ahonnan $y = 13{,}5$, az AF szakasz hossza tehát 13,5 cm.

A háromszög területe tehát

$$T = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{2AF \cdot CF}{2} = \frac{27 \cdot 32{,}4}{2} = 437{,}4\ \text{cm}^2.$$

II. megoldás. Jelölje a háromszög szárai által bezárt szöget 2α. Ekkor $\sin\alpha = \frac{4}{10{,}4} = \frac{5}{13}$ ($\approx 0{,}385$). Mivel α hegyesszög, azért

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}\,\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

(így $2\alpha \approx 45{,}24°$).

Így $AF = CF \cdot \operatorname{tg}\alpha = 32{,}4 \cdot \frac{5}{12} = 13{,}5$ cm. A Pitagorasz-tételből

$$AC = \sqrt{13{,}5^2 + 32{,}4^2} = 35{,}1\ \text{cm}.$$

A háromszög félkerülete:

$$s = \frac{27 + 2 \cdot 35{,}1}{2} = 48{,}6\ \text{cm},$$

területe $T = \varrho s = 9 \cdot 48{,}6 = 437{,}4$ cm^2.

9. *Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H. Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.*

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot. (*6 pont*)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;0)$ és $B(10;0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknegyedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a $P(17;17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a gráf összefüggő és egyszerű, a csúcsok fokszámai 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 lehetnek.

E számokból a következő növekvő számtani sorozatokat lehet összeállítani:

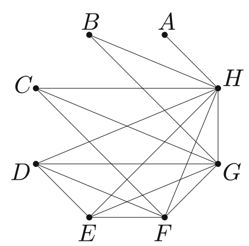
$$\begin{array}{cccc} 1, & 3, & 5, & 7; \\ 1, & 2, & 3, & 4; \\ 2, & 3, & 4, & 5; \\ 3, & 4, & 5, & 6; \\ 4, & 5, & 6, & 7. \end{array}$$

Az öt sorozat között csak kettő olyan van, amelyeknek csak egy közös elemük van, ezért a gráf fokszámsorozata (A-tól H-ig) 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7.

Ha H fokszáma 7, akkor ez a csúcs az összes többivel össze van kötve. Mivel A fokszáma 1, ezért A-ból H-n kívül más csúcsba nem vezet él.

G fokszáma 6, ezért G az A-n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve.

Mivel B fokszáma 2, ezért B-ből a G-n és H-n kívül más csúcsba nem vezet él.



F fokszáma 5, ezért F az A-n és B-n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve.

Mivel C fokszáma 3, ezért C-ből az F-en, G-n és H-n kívül más csúcsba nem vezet él.

Végül D és E fokszáma 4, ezért ezek egymással, valamint az F, G és H csúcsokkal vannak összekötve.

b) A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135 fokos, így külső szögei 45 fokosak. Ezért BC oldala egy $+1$ meredekségű egyenes egy szakasza.

A 10 egység hosszú BC oldal egy olyan egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói így $5\sqrt{2}$ egység hosszúak. Ezért $C\big(10+5\sqrt{2};5\sqrt{2}\big)$.

A nyolcszög további oldalai is vagy párhuzamosak valamelyik koordinátatengellyel, vagy pedig egy $+1$ vagy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. Így a további csúcsok koordinátái: $D\big(10+5\sqrt{2};10+5\sqrt{2}\big)$, $E\big(10;10+10\sqrt{2}\big)$, $F\big(0;10+10\sqrt{2}\big)$, $G\big(-5\sqrt{2};10+5\sqrt{2}\big)$ és $H\big(-5\sqrt{2};5\sqrt{2}\big)$.

A nyolcszögbe írható kör középpontja az AE szakasz felezőpontja: $K\big(5; 5+5\sqrt{2}\,\big)$. A kör sugara megegyezik a K pont második koordinátájával: $r = 5+5\sqrt{2}\,$. A kör egyenlete:

$$(x-5)^2 + \Big(y - \big(5+5\sqrt{2}\,\big)\Big)^2 = \big(5+5\sqrt{2}\,\big)^2 \ \big(=75+50\sqrt{2}\,\big).$$

c)
$$PK^2 = (17-5)^2 + \Big(17 - \big(5+5\sqrt{2}\,\big)\Big)^2 = 12^2 + \big(12-5\sqrt{2}\,\big)^2 = \\ = 338 - 120\sqrt{2}\,.$$

Megmutatjuk, hogy ez nagyobb, mint a kör sugarának a négyzete, és ekkor P valóban külső pontja a körnek:

$$338 - 120\sqrt{2} > 75 + 50\sqrt{2}\,, \quad 263 > 170\sqrt{2}\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{263}{170} > \sqrt{2}\,.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, mert a bal oldal nagyobb, a jobb oldal pedig kisebb 1,5-nél.

Másrészt $17 < 10+5\sqrt{2}$ ekvivalens $1{,}4 < \sqrt{2}$-vel, ami (például a négyzetre emeléssel kapott $1{,}96 < 2$ miatt) szintén igaz. Ezért P első koordinátája kisebb a C és D csúcsok első koordinátájánál (de nagyobb a többi csúcs első koordinátájánál), valamint kisebb a D és G csúcsok második koordinátájánál (de nagyobb a C és H csúcsok második koordinátájánál), ezért P a $CDGH$ téglalapnak, így a nyolcszögnek is belső pontja.

Koncz Levente
Budapest

59. Rátz László Vándorgyűlés

Gödöllő, 2019. július 3–6.

Az idei vándorgyűlést Gödöllőn rendezte meg a Bolyai János Matematikai Társulat. A környezet gyönyörű volt, az előadásokhoz közeli szállás is minden igényt kielégített, és ismét lehetett egymással sokat beszélgetni.

A vándorgyűlésről szóló részletes beszámoló a tervek szerint az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok decemberi számában (`http://www.ematlap.hu`) lesz olvasható. Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján (`http://www.bolyai.hu/rlv2019.htm`).

A 2020-as vándorgyűlés helyszíne Eger lesz.

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

1. Hány lapja van annak a hasábnak, amelynek 2019 éle van? (A) 673; (B) 675; (C) 1346; (D) 1348; (E) 2019.

2. Gazdálkodó Gerzsonnak 11 lova, 12 tehene, 13 libája, 14 kacsája és 15 tyúkja van. Hánnyal több lába van összesen az állatainak, mint feje? (A) 65; (B) 94; (C) 111; (D) 137; (E) 141.

3. Mennyi az xy szorzat értéke, ha $2^x = 15$ és $15^y = 32$? (A) 5; (B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$; (C) $\log_2 47$; (D) 7; (E) $\sqrt{47}$.

4. A családot apa, anya és a gyerekek alkotják. A család átlagéletkora 18 év. A 38 éves apa nélkül a család átlagéletkora csak 14 év. Hány gyerek van a családban? (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5.

5. Hány valós gyöke van az $\Big|\big||x+7|-3\big|-2\Big| = 1$ egyenletnek? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

6. A kecskeiskolában egy szám *kecskerekítésének* hívják a számegyenesen hozzá legközelebb eső olyan egész számot, amely különböző számjegyekből áll, és ha ezeket a számjegyeket csökkenő sorrendbe rendezzük, akkor az egymást követő számjegyek különbsége 1. (Például a 27 kecskerekítése a 23, a 4817 kecskerekítése a 4765.) A 2019 és a 848 számok kecskerekítéseit összeadtuk, majd az összeget kecskerekítettük. Melyik számjegy állt a százas helyi értéken az így kapott számban? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 8; (E) 9.

7. Az $y = x^2 - 7x + 10$ egyenletű parabola összesen három pontban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit. Hány területegység a metszéspontok által meghatározott háromszög területe? (A) 10; (B) 12; (C) 13; (D) 14; (E) 15.

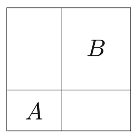
8. Gombóc Artúr zsebpénzének 36%-át étcsokoládéra, 24%-át tejcsokoládéra költötte. Megmaradt pénzének a 35%-án vásárolt egy könyvet „Édes fogyókúra csak csokival" címmel, így már csak 221 garasa maradt. Hány garast költött étcsokoládéra? (A) 204; (B) 306; (C) 408; (D) 510; (E) 612.

9. Egy állatsimogatóban a gyerekeknek és a pónilovaknak összesen 37 fejük és 112 lábuk van. Hány gyerek van az állatsimogatóban? (A) 14; (B) 18; (C) 19; (D) 23; (E) 28.

10. Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldala párhuzamos, $AB = 50$ cm és $CD = 20$ cm. Az E pont az AB alap azon belső pontja, amelyre a DE szakasz a trapézt két egyenlő területű részre osztja. Hány centiméterre van az E pont a trapéz A csúcsától? (A) 25; (B) 30; (C) 35; (D) 40; (E) 45.

11. A *Kerge Birka* rockzenekar koncertjén a közönség $\frac{2}{5}$ része magyar. A külföldiek $\frac{7}{12}$ része férfi. A nők $\frac{6}{11}$ része magyar. A közönségnek hány százaléka férfi? (A) 35; (B) 40; (C) 45; (D) 50; (E) 55.

12. Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetet az *ábrán* látható módon négy téglalap alakú részre osztottunk. Tudjuk, hogy az A jelű rész területe 48 cm^2, a B jelű rész kerülete 52 cm. Hány négyzetcentiméter a területe a betűvel nem jelölt két rész közül annak, amelyiknek kisebb a kerülete? (A) 36; (B) 48; (C) 64; (D) 72; (E) 80.



13. Egy mértani sorozat első két tagja $\sqrt{7}$ és $\sqrt[3]{7}$. Mi a sorozat negyedik tagja? (A) $\sqrt[9]{7}$; (B) $\sqrt[12]{7}$; (C) $\sqrt[5]{7}$; (D) $\sqrt[10]{7}$; (E) 1.

14. Zsófinak három testvére van: két bátyja és egy húga. A négy különböző korú gyermek életkorának szorzata 882. Mennyi Zsófi három testvére életkorának az összege, ha egyik bátyja sincs még 18 éves? (A) 15; (B) 17; (C) 22; (D) 24; (E) 31.

15. Egy szökőévben január elseje péntekre esett. Ebben az évben a válaszokban felsorolt hónapok közül az egyikben 5 vasárnap volt. Melyikben? (A) február; (B) április; (C) június; (D) július; (E) augusztus.

16. Egy derékszögű háromszög két befogójának hossza 10 cm és 24 cm. A háromszög beírt köre az átfogót az E pontban érinti, az átfogót érintő hozzáírt kör érintési pontja F. Hány centiméter az EF szakasz hossza? (A) 11; (B) 11; (C) 12; (D) 13; (E) 14.

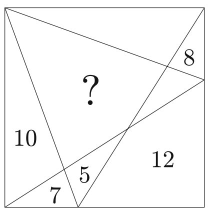
17. Mekk Elek ismét ügyködött. Kapott egy téglatestet, melynek egy csúcsból induló élei 5 cm, 6 cm és 7 cm hosszúak voltak. Azt kérték tőle, hogy minden lapját fesse be pirosra, majd darabolja fel a lapjaival párhuzamos vágásokkal 1 cm élű kockákra. Mekk Elek a testet valamelyik lapjára állítva az asztalra tette, majd az öt látható lapját pirosra festettük. A hatodikról, amin állt a test, sajnos megfeledkezett. A jól elvégzett feldarabolás után megszámolta, hogy hány kockának van legalább egy piros lapja. Mennyi a legnagyobb eredmény, amit kaphatott, ha a számolás során nem hibázott? (A) 126; (B) 130; (C) 135; (D) 138; (E) 150.

18. Mennyi a következő kifejezés értéke:

$$\frac{(2+3)\cdot(2^2+3^2)\cdot(2^4+3^4)\cdot\ldots\cdot(2^{128}+3^{128})+2^{256}}{3^{128}}?$$

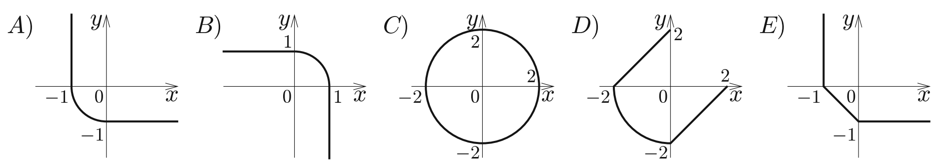
(A) 2^{128}; (B) 2^{256}; (C) 3^{128}; (D) 3^{256}; (E) más érték.

19. Timike kicsit hazudós. Amióta beszélni kezdett, minden harmadik állítása hamis, a többi igaz. Nem tudjuk, hány állítással ezelőtt hazudott utoljára. Egy kétjegyű számról a következő hat állítást fogalmazta meg, ebben a sorrendben: „Van benne 2-es számjegy.” „Nagyobb 50-nél.” „Páros.” „Kisebb 30-nál.” „Osztható 3-mal.” „Tartalmaz 7-es számjegyet.” Mennyi a számjegyek összege abban a kétjegyű számban, amiről Timike megfogalmazta állításait? (A) 12; (B) 13; (C) 14; (D) 15; (E) 16.



20. Az *ábrán* látható négyzetet nyolc részre osztottuk. A részek közül néhányba beírtuk, hogy hány cm^2 a területe. Hány négyzetcentiméter a kérdőjellel jelölt, négyszög alakú rész területe? (A) 13; (B) 17; (C) 21; (D) 24; (E) 27.

21. Az alábbiak közül melyik *ábrán* látható a $\big(x-|x|\big)^2+\big(y-|y|\big)^2=4$ egyenlet igazsághalmaza?



22. Az n pozitív egész számnak 2019 pozitív osztója van, melyek közül az egyik a 2019. Hány olyan k pozitív egész szám van, amelynek ötödik hatványa osztója az n-nek? (A) 135; (B) 268; (C) 405; (D) 667; (E) más érték.

23. Egy 4×4-es táblára elhelyezünk 4 fehér és 4 fekete bábut úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba 1 fehér és 1 fekete bábu kerüljön. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha két elhelyezést akkor is különbözőnek tekintünk, ha tükrözéssel vagy forgatással egymásba vihetők? (A) 72; (B) 144; (C) 216; (D) 288; (E) más érték.

24. Az ABC háromszög C-nél lévő szöge derékszög, a C-ből húzott magasságának talppontja D. A B csúcsból induló szögfelező a CD magasságot az M, az AC befogót az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a DME szög nagysága 120°, és a DME háromszög területe 71 cm^2. Hány négyzetcentiméter az ABC háromszög területe? (A) 637; (B) 781; (C) 852; (D) 923; (E) 994.

25. János gazda bárányainak több, mint 47%-a, de kevesebb, mint 50%-a fekete. Minimum hány báránya van János gazdának? (A) 8; (B) 13; (C) 21; (D) 33; (E) más érték.

26. Adott a síkon az $A_1A_2A_3 \ldots A_{2018}A_{2019}$ szabályos 2019 oldalú sokszög. Hány olyan különböző szabályos háromszög rajzolható a sokszög síkján, amelynek legalább két csúcsa a sokszög csúcsai közül való? (A) 2 035 171; (B) 4 072 996; (C) 4 074 342; (D) 2 037 171; (E) 2 035 825.

27. Az iskolai kosárlabda bajnokságban 5 csapat indult. A bajnokság során minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzik meg. Eddig összesen 4 mérkőzést bonyolítottak le. Tudjuk, hogy nincs három olyan csapat, akik már az összes egymás közti mérkőzésüket lejátszották. Hány különböző módon lehetséges ez, ha a mérkőzések sorrendje nem számít? (A) 60; (B) 75; (C) 90; (D) 120; (E) 140.

28. A pozitív egész számokat az *ábrán* látható mintát követve háromszög alakban írtuk be egy táblázatba. A táblázat kitöltését addig folytattuk, amíg el nem jutottunk a 63. sor utolsó, azaz 63. cellájáig. (A sorok vízszintesek, az oszlopok függőlegesek.) Hányadik oszlopban a legnagyobb a számok összege? (A) 1; (B) 5; (C) 10; (D) 14; (E) 19.

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15

29. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja D. Tudjuk, hogy az ACB szög 30°, az ADB szög pedig 45°. Hány fokos az ABC háromszög legkisebb külső szöge? (A) 45; (B) 60; (C) 90; (D) 105; (E) más érték.

30. A *kecske* nyelvben csak 4 betűt használnak: egy magánhangzót (e), illetve három mássalhangzót (k; c; s). A kecske nyelvben egyetlen egybetűs értelmes szó van, az e. Egy egynél több betűs szó akkor értelmes a kecske nyelvben, ha tartalmaz magánhangzót, és az utolsó betűjét elhagyva olyan szót kapunk, amely nem értelmes a kecske nyelvben. Hány 5 betűs értelmes szó van a kecske nyelvben? (A) 325; (B) 393; (C) 437; (D) 481; (E) 543.

A feladatsort **Erdős Gábor** állította össze és **Kiss Géza** lektorálta

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. **Fridrik Richárd** (Szeged, Magister Universitas) .... 124 pont
2. **Baloghné Cseh Judit** (Szolnok, Varga Katalin Gimn.) .... 120 pont
3. **Fonyó Lajos** (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 111 pont
4. **Horváth Eszter** (Budapest, Kempelen Farkas Gimn.) .... 109 pont
5. **Fonyóné Németh Ildikó** (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 105 pont
6. **Csanády Gáborné** (Budapest, Baár-Madas Református Gimn.) .... 104 pont
7. **Székely Péter** (Budapest, Eötvös József Gimn.) .... 100 pont
8. **Laczik István** (Budapest, Baár-Madas Református Gimn.) .... 95 pont
9. **Baráti Ákos** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn.) .... 94 pont
10. **Bukorné Both Emőke** (Rév-Komárom, Selye János Gimn.) .... 92 pont.

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. **Nagy Tibor** (Kecskemét, NJE Petőfi Sándor Gyak. Ált. Isk.)
2. **Egyed László** (Bajai III. Béla Gimn.)
3. **Rózsáné Motkó Edit** (Ócsa, Bolyai János Gimn.)
4. **Tóth Gabriella** (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.)
5. **Csordás Mihály** (Kecskemét, Kodály Zoltán Ének-zenei Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és AMI).

A 2019. évi Beke Manó Emlékdíjasok

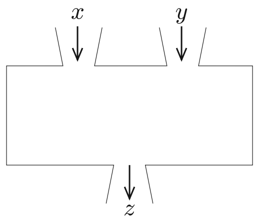
A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2019-ben a díj második fokozatában részesült **Balga Attila, Gajárszki Rozália, Pálovicsné Tusnády Katalin, Regősné Jancsovics Julianna, Takács Sándor, Törökné Dr. Bodzsár Mária** és **Varga Vince.**

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (644–648.)

K. 644. Egy dobozban kék és zöld kockák vannak, összesen 70 darab. Kiveszünk négyszer annyi kék kockát, mint zöldet, így a dobozban maradt kockák között 7-szer annyi a zöld, mint a kék. Hány kék és hány zöld kocka volt a dobozban eredetileg?

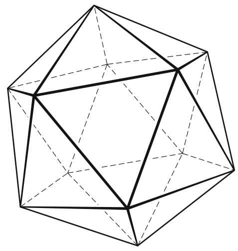
K. 645. Milyen maradékot kapunk, ha az $1+4+7+\ldots+2020$ összeget 8-cal elosztjuk?

*Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.

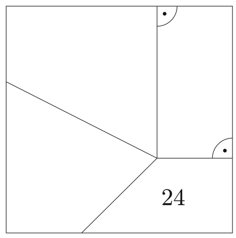


K. 646. Van három gépünk, amelyek két-két bemenettel, és egy-egy kimenettel rendelkeznek. A gépek a bemeneteken keresztül megadott számokkal egy meghatározott műveletsort végeznek el, és ennek eredménye jelenik meg a kimeneten. A három gép tehát az *ábra* szerint néz ki.

Az A gép kimenetén $x\cdot y$ jelenik meg, a B gép kimenetén x^2+y, a C gép kimenetén pedig $5\cdot x+3\cdot y$ (x és y jelöli az egyik, illetve a másik bemeneten beadott számokat). Összekötjük az A, B és C gépeket olyan módon, hogy az egyik kiválasztott gép egy-egy bemenetére a másik két gép kimenetét kötjük rá. Mennyi lesz az utolsó gépből kijövő lehető legnagyobb eredmény, ha a két első gépbe egyaránt az $x=4$ és $y=7$ értékeket tápláljuk be?



K. 647. Egy papírból készült ikozaédert néhány él mentén felvágunk úgy, hogy széthajtva a test valamelyik (síkban fekvő) hálójához jussunk. Hány élt kell felvágni ehhez?



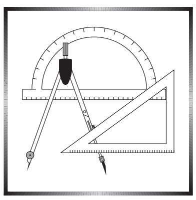
K. 648. Egy négyzet belső pontját összekötöttük minden oldalon az egyik oldalharmadoló ponttal az *ábra* szerint, és így négy négyszöget kaptunk. Ismerjük az egyik ilyen négyszög területét (lásd az ábrát). Határozzuk meg a többi négyszög területét.

❄

Beküldési határidő: 2020. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1581–1587.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1581. Adjuk meg n azon pozitív egész értékeit, amelyekre $n!$ pontosan 19 531 darab 0-ra végződik.

C. 1582. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira kifelé az ABP, BCQ, CDR, DAS szabályos háromszögeket rajzoltuk. Milyen feltételnek kell teljesülnie a paralelogrammára ahhoz, hogy $PQRS$ négyzet legyen?

Feladatok mindenkinek

C. 1583. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, melyeknek koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|x| + |y| + |x + y| \leqslant 2.$$

Mekkora területű síkidomot kaptunk?

(*Horvát feladat*)

C. 1584. Legfeljebb mekkora területű négyzetet lehet legfeljebb három egyenes vágással kivágni egy háromszög alakú papírlapból, amelynek oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak?

C. 1585. Melyek azok a p és q egymástól különböző pozitív prímszámok, melyekre $p - 4p^2 + p^3 = q - 4q^2 + q^3$?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1586. Az ABC háromszög AB oldalának harmadolópontjai D és E. A DE szakasz egy tetszőleges belső pontja P. Húzzunk párhuzamost a PC egyenessel a D, illetve E pontokon keresztül. Ezek az egyenesek az AC és BC oldalakat rendre a Q és R pontokban metszik.

Mutassuk meg, hogy a $PRCQ$ négyszög területe az APQ háromszög területével egyenlő nagyságú.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1587. Oldjuk meg az

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}}{2x-1}$$

egyenletet a valós számok halmazán.

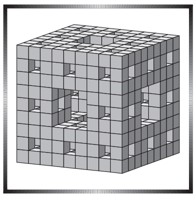
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2020. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5070–5077.)



B. 5070. Egy szigeten kétféle ember él. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Tíz szigetlakó között kiosztottuk az $1, 2, \ldots, 10$ számokat. Mindenki egy-egy különböző számot kapott. Ezután mindenkinek feltették a következő három kérdést: „A te számod páros?”, „A te számod osztható 4-gyel?”, „A te számod osztható 5-tel?”. Az első kérdésre hárman, a másodikra hatan, a harmadikra pedig ketten válaszoltak igennel. Mely számok vannak hazudósoknál?

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5071. Legyen az ABC háromszög BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja A_1, a C-hez közelebbi harmadolópontja A_2, a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja B_1, az A-hoz közelebbi harmadolópontja B_2, végül az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja C_1, a B-hez közelebbi harmadolópontja C_2. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ és $B_2C_2A_2$ háromszögek egybevágók és területük az ABC háromszög területének harmadával egyenlő.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5072. Igazoljuk, hogy $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{4n+5}\right]$ bármely pozitív egész n esetén.

(*3 pont*) Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

B. 5073. Az ABC háromszögbe írt körnek a háromszögoldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le, az ezekbe írt körök sugara 2, 3 és 10 egység. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög derékszögű.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5074. Mely pozitív egész n-ekre és különböző (pozitív) p, q, r prímszámokra teljesül, hogy

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr^3}+\frac{1}{qr^2}=\frac{1}{n}?$$

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5075. Az $ABCD$ konvex négyszög AD és BC oldalainak felezőpontja E, illetve F. Az EF szakasz az AC átlót a P pontban, a BD átlót Q-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AEP és BFQ körök az AB egyenesen metszik egymást.

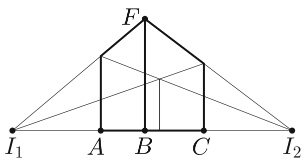
(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5076. Oldjuk meg az

$$x+y+z+v=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+v^2=12,$$
$$x^3+y^3+z^3+v^3=24$$

egyenletrendszert a valós számnégyesek halmazán.

(*6 pont*)

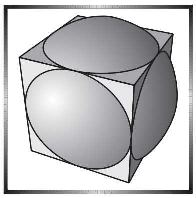


B. 5077. Egy kocka két iránypontos perspektív képét szeretnénk elkészíteni az *ábra* szerint. A két iránypont $I_1=(-9;0)$ és $I_2=(10;0)$; a kocka három csúcsának képe $A=(-3;0)$, $B=(0;0)$ és $C=(4;0)$. Mekkora legyen az F pont y-koordinátája?

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (767–768.)

A. 767. Egy $n\times n$-es táblázat mezői mind különböző színűre vannak színezve. Egy lépés abból áll, hogy kiválasztunk egy sort, abban minden mezőt eggyel jobbra tolunk, a sor jobb szélső mezőjét pedig berakjuk a sor bal szélén lévő mező helyére; vagy kiválasztunk egy oszlopot, abban minden mezőt eggyel lefelé tolunk, és az oszlop legalsó mezőjét berakjuk az oszlop tetején lévő mező helyére. Milyen n esetén lehet ilyen lépésekkel az n^2 darab mező összes lehetséges elrendezését megkapni?

Javasolta: *Schweitzer Ádám*

A. 768. Legyen S egy olyan síkbeli alakzat, melyet néhány (véges sok) egységnégyzet uniójaként állítottunk elő. Bizonyítandó, hogy S kerületének és területének az aránya legfeljebb 8.

❄

Beküldési határidő: 2020. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein. Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust és a szintén matematikai előképzettséget igénylő aktuáriust és statisztikust (`https://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-of-2019`). Ez Magyarországra is igaz, hiszen nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek, hanem számos cég is tárt karokkal és igen jó fizetéssel várja az ELTE-n végzett matematikusokat. Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és világszerte jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében).

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk az egyetemen a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. Tanári szakképzettséget kétszakos formában lehet szerezni $4+1$ vagy $5+1$ éves képzés keretében, amelyben a plusz egy év szakmai gyakorlat teljesítésére szolgál. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A tanárképzés első három évében szakpáronként egységes képzésben részesülnek hallgatóink. A matematika szakterületi tárgyaknál az oktatás szemléletében már az első három évben is nagy hangsúlyt kap az iskolai matematikatanítással való kapcsolat. A harmadik év végén a hallgató dönt arról, hogy általános iskolai vagy középiskolai tanári végzettséget kíván szerezni a két szakjából. Ezen döntéstől függően vagy egy 2 féléves, vagy pedig egy 4 féléves képzési programot kell elvégezni. Ekkor kerül sor a szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére, melyekre az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük. A szakterületi záróvizsgák letétele után a hallgatóknak még egy egyéves szakmai gyakorlatot kell elvégezniük egy iskolában, melynek során módjuk lesz begyakorolni a tanári munka mesterfogásait.

Azaz bátran állíthatjuk, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Ha személyesen is szeretnél találkozni leendő oktatóiddal, beszélgetni a mostani egyetemistákkal, akkor gyere el az ELTE TTK nyílt napjára január 17-én!

Informatikából kitűzött feladatok

I. 499. A betű-számrejtvény fejtörők klasszikus matematikafeladatok. Ilyenkor azokat a számjegyeket keressük, amelyeket a megfelelő betűk helyére írva a számítási eljárás teljesül.

Például:

```
 ÖT       SOK      SEND
+ÖT       SOK     +MORE
TÍZ       KIS     MONEY
         +KOS
         OKOS
```

Oldjuk meg a fenti három feladatot a *brute force* (nyers erő) módszerével, azaz vizsgáljuk meg a betűk minden lehetséges értékét, amíg az *összes* megoldást meg nem kapjuk. Ügyeljünk arra, hogy a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.

A kapott összes megoldást írjuk ki a képernyőre a betűk helyett a megfelelő számjegyek megjelenítésével az alábbi formátumban. Például a harmadik feladatban:

```
 9567
+1085
10652
```

Beküldendő egy `i499.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 500. A Technikai Múzeumban Ármin bácsi a villanymotor-gyűjtemény muzeológusa. Feladatai közé tartozik minden nap a múzeum nyitása után a motorok beindítása, hogy ezáltal fenntartsa a működőképességüket. Fontos, hogy a motorokat egyesével indítsa be, hogy a bekapcsolási áramlökések ne adódjanak össze. A motorokat egy ideig járatja, majd lekapcsolja őket ő, vagy ebben már más is segíthet neki (egy időpontban több motort is leállíthatnak). Minden motort egy nap csak egyszer kapcsolnak be.

Rendelkezésünkre áll Ármin bácsi naplója a motorok bekapcsolási és leállítási időpontjáról. Az adatokat a nyitás óta eltelt másodpercek számával rögzítette. A napi jelentés az első motor bekapcsolásától az utolsó motor leállításig tart.

A villanymotorok száma legfeljebb 50, de általában ennél kevesebb van a múzeumban, mert vagy néhányat kikölcsönöztek más kiállításra, vagy elvitték őket javításra. A napi jelentésben az éppen bent lévő motorok egymás után felsorolva szerepelnek.

Rendelkezésre állnak a `naplo.txt` tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású állományban egy olyan nap adatai, amikor kevés motor volt bent.

A múzeumigazgató a naplóba pillantva két kérdést tett fel és egy kérést fogalmazott meg. A kérdések megválaszolását és a kérés teljesítését segítsük táblázatkezelővel.

1. Ármin bácsi naplója alapján adjuk meg a leghosszabb időintervallum hosszát, amikor legalább egy motor bekapcsolt állapotban volt.
2. Adjuk meg a leghosszabb időintervallum hosszát, amikor nem működött egy motor sem.
3. Az A:C oszlop celláiban állítsuk be feltételes formázás használatával a leghosszabb ideig bekapcsolt motorok közül az első három sorának cellakitöltését három különböző színűre.

	A	B	C	D	E
1	Sorszám	Kezdés	Leállás	**Leghosszabb idő, amíg motor működött**	**Leghosszabb idő, amíg minden motor állt**
2	1	100	120	**50**	**13**
3	2	80	130		
4	3	10	50		
5	4	90	100		
6	5	110	130		
7	6	15	40		
8	7	20	40		
9	8	0	6		
10	9	60	67		
11	10	55	60		

A megoldást úgy készítsük el, hogy az igazgató kérdéseire a maximális 50 villanymotor esetén is választ kapjunk. Használjunk hivatkozásokat, hogy a válasz a naplózott adatok módosításait kövesse. Segédszámításokat az E oszloptól jobbra végezhetünk, melyek értelmezését feliratokkal segítsük.

Beküldendő egy tömörített `i500.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 501 (É). A `https://trends.google.hu/trends/?geo=HU` (utolsó letöltés: 2018. 12. 14.) oldalon 2001-től napjainkig megtalálhatóak az adott évben legnépszerűbb keresések különböző kategóriákban a Google szerint. Feladatunk ezen adatok egy részének feldolgozása adatbázis-kezelő program segítségével.

Az adatok a `keresesek.txt` és `tipusok.txt` állományokban állnak rendelkezésünkre. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

1. Készítsünk új adatbázist `keresesek` néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos nevű táblákba.
2. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat, valamint alakítsuk ki a kapcsolatokat.

Táblák:

keresesek (id, tipus id, megnevezes, helyezes, ev id)

id	az adott keresés azonosítója (szám), ez a kulcs;
tipus id	a típushoz tartozó azonosító (szám);
megnevezes	a keresési listán megjelenő megnevezés (szöveg);
helyezes	az elért helyezés (szám);
ev	az adott év (szám).

tipusok (tipus id, tipus megnevezes)

tipus id	az adott típus azonosítója (szám), ez a kulcs;
tipus megnevezes	az adott típus megnevezése (szöveg).

Készítsük el a következő feladatok megoldását. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. Megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

3. Határozzuk meg, hogy melyik az az év, amelyikből a legtöbb keresés szerepel az adatbázisban. (3legtobbadat)
4. Írassuk ki azon tv-műsorok nevét, amelyekben szerepel szám. (4tvmusorok)
5. A megadott adatok között több recept is található. Mindegyik megnevezésének végén szerepel a „recept” szó. Készítsünk frissítő lekérdezést, melynek segítségével a nevek végéről a „recept” szót elhagyjuk. A lekérdezést futtassuk is le az adatok módosításához. (5receptek)
6. Általában minden évben 10 elem szokott egy-egy kategóriában felkerülni a listára. Egy év volt, amikor csak 5 került fel. Határozzuk meg a kategóriát és az évet, amikor ez előfordult. (6hiany)
7. Adjuk meg egész számra kerekítve, hogy átlagosan az egyes színházak hányadik helyen végeztek a rangsorban. Jelenítsük meg a színház nevét és az átlagot.[*] (7szinhazak)
8. Készítsünk lekérdezést, mely megadja azon magyar személyek vezeték- és keresztnevét (külön mezőben), akik 2015-ben a kategóriájukban felkerültek a lis-

[*]Mivel nem minden színház szerepel minden évben, ezért a kapott eredmények nem összehasonlíthatók egymással.

tára. Figyeljünk rá, hogy a vezeték- és a keresztnév nagybetűvel kezdődjön. (8nagybetusnevek)

9. Jelenítsük meg minden személy eddigi összes helyezését az évszámmal együtt a helyezések szerinti növekvő sorrendben. (9szemelyek)
10. Az előző lekérdezést felhasználva készítsünk űrlapot, melyen segítjük a személyek születési évének és nemének bevitelét. Figyeljünk rá, hogy a születési évhez csak számot tudjunk beírni. (10bevitel)

Beküldendő egy tömörített `i501.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

A feladat forrásai:
`https://trends.google.hu/trends/yis/20xy/HU/` (ahol `xy` a 11-17 számjegyek) és
`https://trends.google.hu/trends/yis/20uv/GLOBAL/` (ahol `uv` a 01-10 számjegyek).

I/S. 41. Lapföldén háromféle síkidom él: körök, háromszögek és deltoidok. Egy nap K darab kör, H darab háromszög és D darab deltoid fut egy réten. Ha kettő különböző típusú síkidom futás közben egymáshoz ér, akkor összeolvadnak egy harmadik típusú síkidommá. Az nem lehetséges, hogy kettőnél több síkidom ér össze egyszerre. A nap végén azt látjuk, hogy már csak egy típusú síkidom van a réten. Hányféleképpen fejeződhetett be a nap, ha csak az számít, hogy melyik síkidomból és hány darab van a réten a nap végén?

Standard bemenet: az első sor tartalmazza a K, H és D egész számokat ebben a sorrendben.

Standard kimenet: adjunk meg egyetlen számot, a nap végén lehetséges kimenetelek számát.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`2 2 1`	`2`

Korlátok: $1 \leqslant K + H + D \leqslant 10^{13}$, pozitív egészek. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $K + H + D \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `is41.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 140. Egy titkosszolgálatnak N db számítógépe van, melyek közül néhányat kétirányú adatátvitelt biztosító kábelek kötnek össze, melyekből legfeljebb M db van. Az i-edik kábelnek öt fontos tulajdonsága van: a_i, b_i, t_i, x_i, y_i, mely azt jelenti, hogy az a_i és b_i sorszámú számítógépek között egy információcsomag átküldése t_i időbe telik. Hogy biztonságosabbá tegyék a rendszert a hackertámadásokkal szemben, felváltva x_i ideig engedélyezik, majd y_i ideig megtiltják az adatátvitelt az i-edik kábelen. Kezdetben minden kábelen engedélyezve van az adatátvitel. Két számítógép között csak akkor küldhetünk át egy információcsomagot, ha a küldéstől a megérkezésig minden időpillanatban engedélyezve van az adott kábelen az adatátvitel. A K-adik számítógépről szeretnénk egy csomagot küldeni a V-edik számítógépre. Adjuk meg, hogy a csomag leghamarabb mikor érhet oda.

Standard bemenet: az első sor tartalmazza a számítógépek N számát, a kábelek M számát, valamint a K és V számítógépsorszámokat. Ezután M sor következik, ahol az i-edik sor tartalmazza az a_i, b_i, t_i, x_i, y_i számokat ebben a sorrendben.

Standard kimenet: adjuk meg, hogy leghamarabb mikor juthat el egy információcsomag a K-adik számítógépről a V-edik számítógépre. Ha nem juttatható el az információcsomag, akkor `-1`-et írjunk ki.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`3 2 1 3 / 1 2 2 3 3 / 2 3 3 3 3`	`9`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant M \leqslant 10^6$, $1 \leqslant t_i, x_i, y_i \leqslant 10^9$, $1 \leqslant a_i, b_i, K, V \leqslant N$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `s140.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. február 10.

Mérési feladat megoldása

M. 389. *Erősítsünk vékony fonalat egy tojáshoz, és helyezzük bele egy hengeres edénybe. Öntsünk a tojásra annyi vizet, hogy ellepje a tojást, majd a fonálnál fogva óvatosan emeljük ki a tojást a vízből.*

Mérjük meg, hogyan függ a fonalat feszítő erő a tojás elmozdulásától! Határozzuk meg a kiemelés során végzett munkát! Függ-e ez a munka az edény keresztmetszetétől?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

I. megoldás. *I. A felhasznált eszközök:* kb. 50 g tömegű főtt tojás, 28 cm^2 keresztmetszetű mérőhenger, 75 cm^2 keresztmetszetű konyhai mérőedény, mérőszalag, erőmérő (1 N-os), cérna (a tojásnak az erőmérőre történő erősítéséhez), szükséges mennyiségű víz.

II. A mérés menete. Miután megfőztük a tojást, egy celluxdarabbal egy cérnát erősítettünk rá, aminek a másik végére egy hurkot kötöttünk (a mérés során ebbe akasztottuk az erőmérőt). A tojást belehelyeztük először a mérőhengerbe, és annyi vizet öntöttünk rá, hogy teljesen ellepte. Megemeltük a tojást addig a pontig, amíg teljes terjedelmével még *éppen* benne volt a vízben, és leolvastuk az erőmérőt. Ezután a mérőszalagot a henger mellé állítva lassan kiemeltük a tojást a vízből úgy, hogy cm-enként leolvastuk az erőmérő által mutatott F értékeket. A mérés során végig a cérnaszál egy kiszemelt pontjának $\Delta\ell$ elmozdulását követtük (például a tojás tetejének és a cérna találkozási pontjának elmozdulását).

III. A mérési adatok. A mérést háromszor végeztük el, majd ugyancsak háromszor a másik edénnyel is, ugyanezzel a módszerrel. Az adatokat és az azokból számolt átlagos erőket táblázatba foglaltuk:

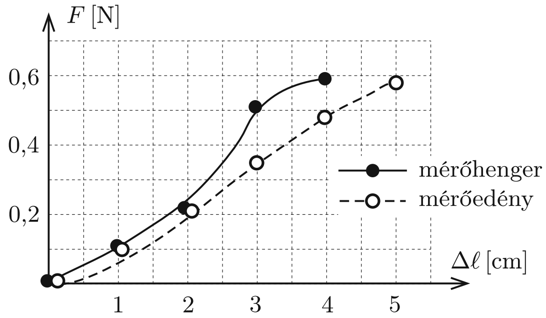
mérőhengerrel

$\Delta\ell$ [cm]	F_1 [N]	F_2 [N]	F_3 [N]	$F_{\text{átlag}}$ [N]
0	0,02	0,02	0,02	0,02
1	0,12	0,10	0,08	0,10
2	0,22	0,20	0,22	0,21
3	0,54	0,50	0,48	0,51
4	0,58	0,58	0,58	0,58

mérőedénnyel

$\Delta\ell$ [cm]	F_1 [N]	F_2 [N]	F_3 [N]	$F_{\text{átlag}}$ [N]
0	0,02	0,02	0,02	0,02
1	0,08	0,12	0,10	0,10
2	0,20	0,22	0,2	0,21
3	0,32	0,33	0,34	0,33
4	0,50	0,46	0,46	0,47
5	0,58	0,58	0,58	0,58

IV. Grafikon. A mérési adatok alapján milliméterpapíron grafikont készítettünk:



V. A kiemelés során végzett munka kiszámítása. A kis elmozdulásokra érvényes $\Delta W = F \cdot \Delta\ell$ képlet alapján kimondhatjuk, hogy az erő-elmozdulás grafikonon a görbe alatti terület számértéke megegyezik a végzett munka számértékével. Ezt jó közelítéssel viszonylag könnyen megkaphatjuk, ha a cm-enként egy-egy átlagos erővel kiszámoljuk a munkákat, majd ezeket összeadjuk. Az eredmény:

$$W_{\text{mérőhenger}} = 11{,}2\ \text{mJ}; \qquad W_{\text{mérőedény}} = 14{,}1\ \text{mJ}.$$

Látható, hogy a nagyobb keresztmetszetű mérőedényből nehezebben (több munkával) tudjuk kiemelni a tojást, mint a szűkebb mérőhengerből.

VI. A mérési eredmény értelmezése. A végzett munkák közötti eltérés a kiszorított víz energiaváltozásával magyarázható. Amikor kiemeljük a tojást, a kiszorított víz térfogata folyamatosan csökken, helyére az edény többi részéből áramlik át a víz, és eközben a vízszint valamennyit lesüllyed. Egy kisebb keresztmetszetű edényben a vízszint csökkenése jelentősebb, mint a nagyobb keresztmetszetű edény esetében. A különbséget a mérési adatok jól mutatják: a mérőhengernél a tojás már 4 cm-es emelés után kikerült a vízből, a mérőedénynél ugyanez csak 5 cm-es emelés után következett be. A végzett munka azért nagyobb a nagyobb alapterületű edénynél, mert ott *hosszabb úton* történik az erőkifejtés, jóllehet az adott elmozduláshoz tartozó erő a nagyobb edénynél *kisebb,* mint a kisebb edény esetében.

VII. Hibaforrások

1. A mérőszalagról és az erőmérőről leolvasott értékek bizonyos mértékben pontatlanok. A mért adatok pontosságáról a mérőeszköz skálájának beosztása, illetve a többször megismételt mérés eredményeinek ingadozása (szórása) ad – számszerűsíthető – felvilágosítást.

2. A konyhai mérőedény nem túl pontos kísérleti eszköz, egyrészt nem tökéletes henger (az oldalai kissé kifelé dőlnek), valamint nem teljesen átlátszó, és a fénytörés is nehezebbé teszi az elmozdulás leolvasását.

3. A mérés során (főleg a szűkebb mérőhenger esetében) a tojás néha „odatapadt" az edény oldalához, ami torzíthatott az eredményen.

A felsoroltak közül az utóbbi kettő a mérésben *szisztematikus* hibaként jelentkezik, ennek mértékét igen nehéz lenne számszerűsíteni.

Jeszenői Sára (Kecskemét, Katona J. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. *Eszközök*
– állvány,
– konyhai mérleg,
– vonalzó,
– tojás,
– cérna,
– hengeres edények (műanyag edény, üvegkorsó).

Elrendezés és a mérés menete. A tojásra egy cérnát rögzítettem. A cérna végét egy állványhoz erősítettem úgy, hogy a tojást lehessen emelni, illetve süllyeszteni. A cérnára egy rövid szigetelőszalagot ragasztottam, majd a későbbiekben a szigetelőszalag és a felfüggesztési pont d távolságának változásából számoltam a tojás x elmozdulását.

Az edénybe vizet töltöttem, és rátettem a mérlegre. A mérleget ekkor „táráztam", majd beleeresztettem a tojást. Ekkor a mérleg a tojás m tömegét mérte, mert a mérleg tányérjára (a tárázott helyzethez viszonyítva) mg erő hatott.

Ha a tojást részben kiemeljük a vízből, és a cérnát K erő feszíti, akkor a mérleg tányérjára csak $mg-K=m'g$ erő hat, a mérleg ezt az m' fiktív tömeget méri. A két mért tömegértékből a fonalat feszítő erő könnyen kiszámítható:

$$K=(m-m')g.$$

Megjegyzés. Ha a mérleget az edény + víz + tojás állapotban tárázzuk, majd a cérnát felfelé húzzuk, akkor a mérleg éppen az $m-m'$ tömegkülönbséget méri, azt adja meg negatív előjellel.

Mért és abból számított adatok

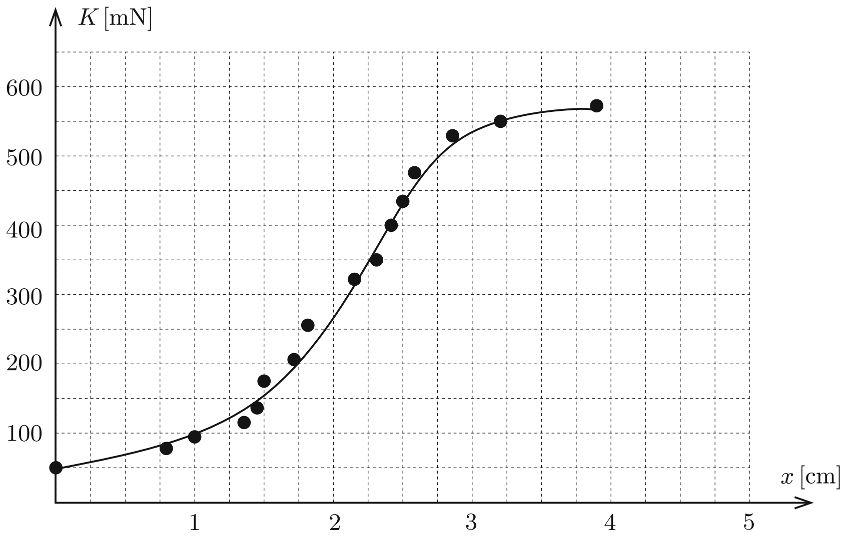
A tojás tömege: $m=58$ g.

A tojás kiemelése során végzett munkát közelítőleg a grafikon alatti területből számítjuk. A síkidomot felbontjuk trapézokra, és a területüket összeadjuk.

A kisebb edény átmérője: $D_1 \approx 5{,}0$ cm.

d [cm]	18,3	17,5	17,3	17	16,9	16,8	16,6	16,5
m' [g]	53	51	48	46	43	40	37	32
x [cm]	0	0,8	1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8
K [mN]	49	69	98	118	147	177	206	255

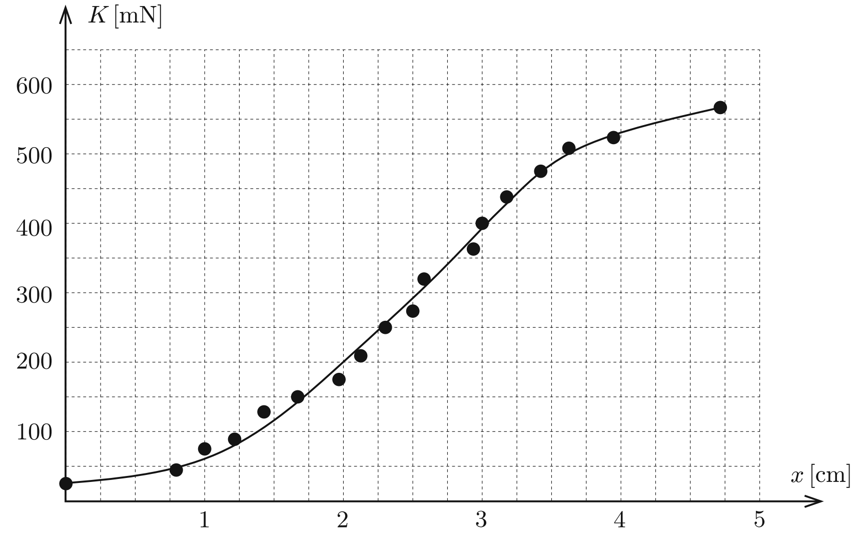
d [cm]	16,1	16	15,9	15,8	15,7	15,5	15,1	14,5
m' [g]	26	22	17	13	9	4	2	0
x [cm]	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	3,2	3,8
K [mN]	314	353	402	441	481	530	549	569



A nagyobb edény átmérője: $D_2 \approx 8{,}3$ cm.

d [cm]	18,8	18	17,8	17,6	17,3	17,2	16,9	16,7	16,5
m' [g]	55	53	51	49	46	43	40	37	33
x [cm]	0	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,9	2,1	2,3
K [mN]	29	49	69	88	118	147	177	206	245

d [cm]	16,3	16,2	15,9	15,8	15,6	15,4	15,2	14,9	14,1
m' [g]	30	25	21	17	13	10	5	4	0
x [cm]	2,5	2,6	2,9	3	3,2	3,4	3,6	3,9	4,7
K [mN]	275	324	363	402	441	471	510	530	569



A trapézok területe:

$$T_n = (x_{n+1} - x_n)\ \frac{K_n + K_{n+1}}{2}.$$

A számolást elvégezve a keskenyebb edénynél a $W_1 = 11{,}1$ mJ, a szélesebb edénynél pedig $W_2 = 13{,}3$ mJ eredményt kapjuk. Megállapíthatjuk, hogy a munka függ az edény keresztmetszetétől, a nagyobb keresztmetszetű edénynél nagyobb.

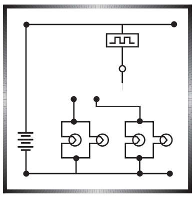
Megjegyzés. A folyamathoz egy egyszerű modellt készíthetünk. Ha a szabálytalan alakú és tömegeloszlású tojás helyett valamilyen homogén hasábot vagy hengert vizsgálunk, akkor az erő–elmozdulás függvényt és a végzett munkát részletesen, közelítésmentesen ki lehet számítani. A „modell-tojás” kiemelése ugyancsak alátámasztja azt a megfigyelésünket, hogy a szélesebb edényből könnyebben lehet a víz felszíne fölé emelni egy – a víznél nagyobb sűrűségű – testet. (Ezt a számolást azonban itt nem közöljük, mert csak közvetve kapcsolódik a mérési feladathoz. – A Szerk.)

Hibabecslés

Hibalehetőségek: a hosszmérés hibája, a tömegmérés hibája és a numerikus integrálás hibája. A hosszmérés (abszolút) hibája kb. 1 mm, eszerint a relatív hiba $\frac{1}{150} \approx 0{,}7\%$. A tömegmérés hibája kb. 0,5 g, a különbség képzésekor ez a kétszeresére is nőhet, a relatív hiba tehát kb. $\frac{1}{30} \approx 3\%$. A munkák meghatározásának relatív hibája kb. a hossz- és a tömegmérés relatív hibájának összege, vagyis 4% nagyságrendű.

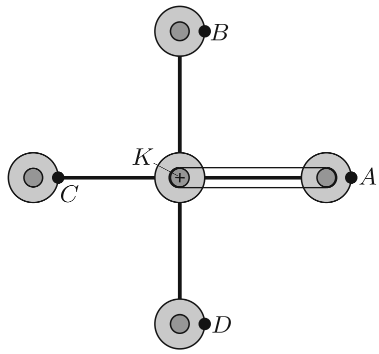
Pácsonyi Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Jeszenői Sára és Pácsonyi Péter megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 17, mérésként nem értékelhető 1 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 666. *Az* ábrán *egy vidámparki szórakoztatószerkezet vázlata látható. A középső, nagy henger egyenletesen forog körbe. A rajta lévő négy rögzítőkar segítségével négy tengelyezett, kör alakú „gondola” is körbejár. Minden gondola közepéhez egy-egy korongot rögzítettek, melyek ugyanúgy vannak tengelyezve, mint a gondola. A gondolák közepén lévő korongok csúszásmentes szíjáttétel segítségével csatlakoznak a szerkezet közepén található K koronghoz, ami rögzített, tehát egyáltalán nem forog. (Az ábrán – az áttekinthetőség kedvéért – csak az egyik gondolánál tüntettük fel ezt a szíjat.)*



Az A, B, C és D pontok egy-egy utast ábrázolnak. Milyen pályán mozognak az utasok? Hogyan változik a közöttük lévő távolság a forgás közben? (A szerkezet vízszintes síkban forog, a tengelyek mind függőlegesek.)

(*4 pont*) *Amerikai feladat nyomán*

Megoldás. A középső henger valamilyen ütemben (valamekkora szögsebességel) forog. A K korong a gondolákhoz képest ugyanekkora szögsebességgel forog, de *ellentétes* irányba. Így amennyit a középső henger elfordul az egyik irányba, ugyanannyit fordul el mindegyik gondola a nagy hengerhez képest a másik irányba. A talajhoz képest tehát a gondolák *nem forognak.*

Ez azt jelenti, hogy a mozgás során mindegyik utas (a felülnézeti ábrának megfelelően) a gondola jobb szélénél marad, és így az utasok közötti távolság nem változik. Mindegyik utas ugyanazon a körpályán mozog, azon egy negyedkörívnyi útkülönbséggel követik egymást. A körpálya középpontja nem esik egybe a K korong középpontjával, ahhoz képest a gondolák sugarával megegyező mértékben jobbra eltolódott pontban van.

Kovács Alex (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn., 9. évf.)

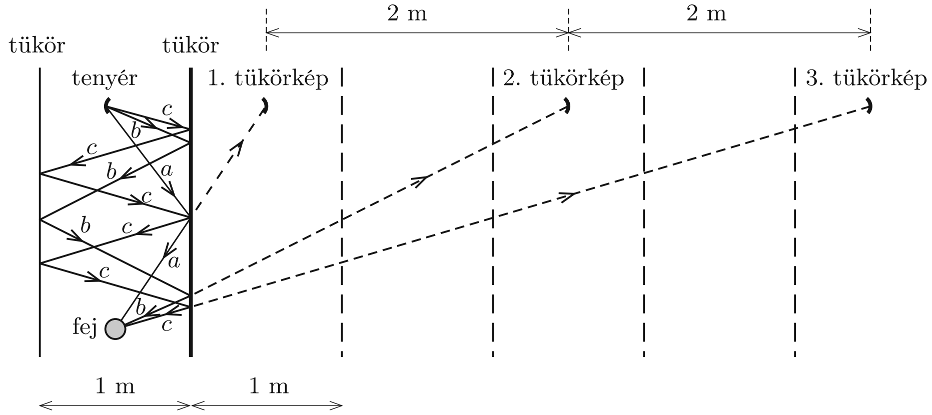
38 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 6 dolgozat.

G. 671. *Két nagy méretű, függőleges síkú síktükör egymással párhuzamos, a tükrök egymás felé néznek, a közöttük lévő távolság* 1 m. *Ha a két tükör között középen állva oldalra kinyújtott tenyerünk tükörképére nézünk az egyik tükörben, akkor igen sok képet látunk. Milyen távolságra vannak egymástól a* tenyerünk *tükörképei?*

(*3 pont*)

Megoldás. A kezünk tükörképeit úgy fogjuk látni, mintha a tenyerünk irányába eső tükör mögött egy sorban helyezkednének el.

Az alábbi *ábra* felülnézetből ábrázolja a tükröket, a tenyerünket és a fejünket, vagyis a szemünk helyzetét. (Az ábra *nem* méretarányos.)



Az egyszer vagy többször tükröződő fénysugarak a szemünkbe jutva a kezünk látszólagos képeit hozzák létre. Csak a jobb oldali (vastagabb vonallal jelölt) tükör felé induló fénysugarak hozhatják létre a *tenyerünk* képét, a balra induló fénysugarak pedig a kézfejünk képét. (Ez utóbbiakkal nem foglalkozunk.)

Az a jelű vonal az első tükröződést jelöli. Itt csak egyszer tükröződik vissza a tenyerünkről kiinduló fénysugár, így jut el a szemünkbe. Ha a megfelelő tükörre tengelyesen tükrözzük a tenyeret, akkor megkapjuk a látszólagos képének helyét.

A második, b jelű esetben a mögöttünk lévő tükörből is egyszer visszaverődik a fény. Itt három tengelyes tükrözéssel meghatározhatjuk a tenyerünk látszólagos képének helyzetét.

Ugyanezt elvégezhetjük úgy, hogy a mögöttünk lévő tükörből kétszer verődjön vissza a fény, ez a c eset. Itt öt tengelyes tükrözéssel lehet megkapni a tenyerünk látszólagos képének helyét. Leolvasható az ábráról, hogy a szomszédos tükörképek közötti távolság pontosan 2 m lesz.

Kis-Bogdán Kolos (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 10. évf.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hiányos (1 pont) 17, hibás 7 dolgozat.

G. 674. *Budapest és Veresegyház között munkanapokon kétféle vonat közlekedik: az egyik személy, a másik gyorsított személy. Internetes menetrend* (pl. `elvira.mav-start.hu`) *alapján állapítsuk meg mindkét járat átlagsebességét! Hogyan változnak az átlagsebességek, ha a vonatnak a menetrendtől eltérően* 10 *percig várakoznia kell a szemből érkező, késésben lévő ellenvonatra?*

(*3 pont*)

Megoldás. Nézzük meg az interneten az `elvira.mav-start.hu` oldalt, és válasszuk ki valamelyik személyvonat menetrendjét. Láthatjuk, hogy Budapest-Nyugati és Veresegyház között a távolság $s=27$ km. Az egyik személyvonat pl. 9:00-kor indul és 9:48-kor érkezik meg Veresegyházra, a menetidő (beleszámítva az állomásokon töltött időket is) $t=48$ perc, azaz 0,8 óra. A személyvonat átlagsebessége:

$$v_{\text{átlag}}=\frac{s}{t}=\frac{27}{0{,}8}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 34\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Tekintsünk most egy gyorsított személyvonatot, pl. ami 16:33-kor indul a Nyugatiból és 17:10-kor érkezik meg Veresegyházra, a menetideje 37 perc, azaz 0,62 óra. A gyorsított személyvonat átlagsebessége:

$$v_{\text{átlag}}=\frac{s}{t}=\frac{27}{0{,}62}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 44\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ha a személyvonat az útja során 10 percet várakozik valahol az ellenvonatára, akkor a teljes menetidő 58 percre (azaz 0,967 órára) növekedik, így a vonat átlagsebessége:

$$v_{\text{átlag}}=\frac{s}{t}=\frac{27}{0{,}967}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 28\ \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

ha pedig a gyorsított személyvonat várakozik 10 percet, akkor menetideje 47 percre (0,78 órára) nő, így az átlagsebessége:

$$v_{\text{átlag}}=\frac{s}{t}=\frac{27}{0{,}78}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 35\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Hruby Lili (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.)

29 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

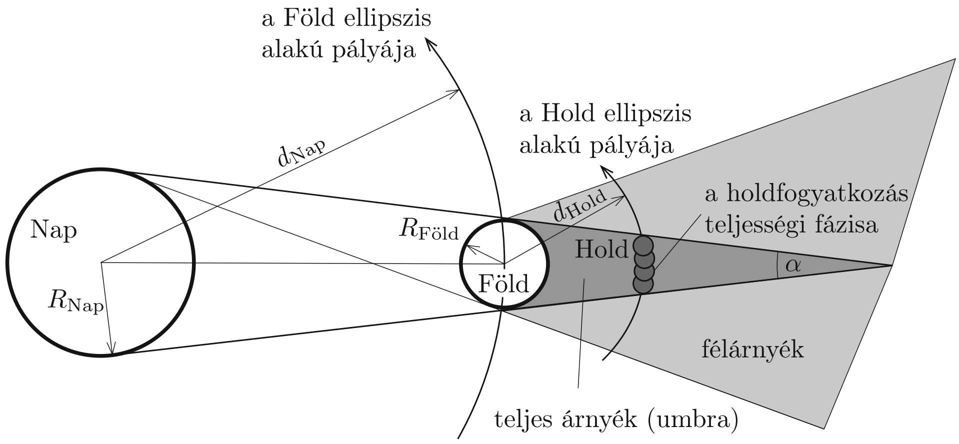
G. 676. *2019. január 21-én hajnalban Magyarországról jól látható teljes holdfogyatkozás volt, ami valamivel több, mint egy órán át volt élvezhető. Mitől függ, hogy mennyi ideig tart a holdfogyatkozás teljességi fázisa?*

(*4 pont*)

Megoldás. Holdfogyatkozás akkor következik be, amikor a Hold a Föld árnyékába kerül. Teljes holdfogyatkozáskor (ez a holdfogyatkozás teljességi fázisa) a Hold teljes terjedelmében az „umbrában" (a Föld teljes árnyékában) tartózkodik (lásd az *1. ábrát*). Ez teliholdkor történhet, amikor – ha nincs holdfogyatkozás – a Hold egy fényes körnek látszik.

A teljességi fázis időtartamát több tényező is befolyásolja:

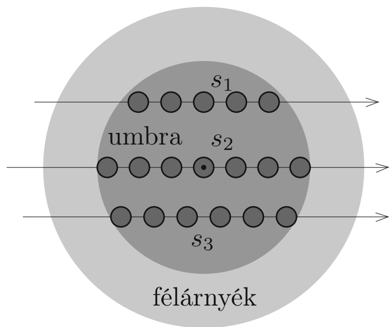
1. A Föld–Nap távolság változik, hiszen a Föld nem kör, hanem ellipszispályán kering. Az ábrán látható α szög annál kisebb, minél messzebb van a Föld a Naptól. Az α szög nagyságát a Nap sugara (R_{Nap}), a Föld sugara ($R_{\text{Föld}}$) és a Nap–Föld távolság (d_{Nap}) aktuális értéke egyértelműen meghatározza. Ha a d_{Nap} távolság nő, a Hold pályájának az umbrába eső része (annak ívhossza) is nő, és emiatt a Holdnak az árnyékban való tartózkodásának ideje is nő.



1. ábra (nem méretarányos)

2. A Hold is ellipszispályán mozog, tehát a Föld–Hold távolság (d_{Hold}) is állandóan változik. Szuperholdkor, amikor d_{Hold} a legkisebb (vagy ahhoz közeli érték), a Hold hosszabb íven halad az umbrában, ettől a holdfogyatkozás ideje nagyobb lenne, viszont ilyenkor nagyobb sebességgel halad, és ez önmagában az időtartam csökkenését eredményezi. A két ellentétes hatás közül az utóbbi, a Hold keringési sebességének változása a jelentősebb.

3. A Hold pályasíkja nem esik egybe a Föld pályasíkjával (az ekliptikával), azzal kb. 5°-os szöget zár be, emiatt van csak ritkán hold- és napfogyatkozás, hiszen a Hold nem minden hónapban halad át az umbrán. Ha mégis áthalad azon, nem biztos, hogy eléri a Nap–Föld egyenest, vagyis a kúp alakú umbra szimmetriatengelyét. Az umbra tengelyének irányából nézve a Hold egy kör alakú árnyékzónán haladhat keresztül, és az áthaladás ideje nyilván függ attól, hogy milyen közel kerül a Hold ehhez a szimmetriatengelyhez. Ezt szemlélteti a *2. ábra,* amely a Hold három lehetséges „pályáját” mutatja, azonos időközökben készült felvételeken. Láthatóan $s_2 > s_3 > s_1$, tehát az s_2 útvonalhoz tartozik a legtovább tartó holdfogyatkozás.



2. ábra (nem méretarányos)

4. A Föld keringése miatt az umbra is mozog, és mialatt a Hold áthalad rajta az árnyékzóna határai is elmozdulnak. Ez is befolyásolja a holdfogyatkozás teljességi fázisának időtartamát.

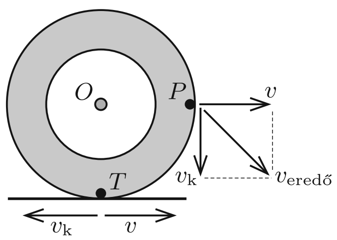
Juhász Márk Hunor (Kecskemét, Katona J. Gimn., 9. évf.),
Sárvári Borka Luca (Dunakeszi, Radnóti M. Gimn., 9. évf.) és
Szőlőssi Gergely (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

26 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 4 dolgozat.

G. 678. *Egy autó* 36 km/h *sebességgel halad a városban, miközben kerekei tisztán gördülnek. Mekkora a kerék legelöl lévő pontjának a talajhoz viszonyított sebessége?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az autó egésze, és így valamelyik kiválasztott kerekének O tengelye is a talajhoz képest



$$v = 36\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel mozog vízszintesen előre.

Mivel az autó kerekei tisztán gördülnek, a kerék haladási sebessége megegyezik a kerületi pontjainak a tengelyhez viszonyított v_k kerületi sebességével, vagyis $v = v_\mathrm{k}$. Jól látszik ez az *ábrán,* a talajjal érintkező, tehát éppen mozdulatlan T pont eredő sebességének eltűnéséből.

A kerék legelöl lévő P pontja a talajhoz képest a forgásból és a haladásból származó sebességvektorok összegének megfelelő sebességgel mozog. A kerületi sebesség vektora függőlegesen lefelé, a talaj irányába mutat, a haladási sebesség vektora pedig a talajjal párhuzamosan előre. Mivel ezek a vektorok egyenlő nagyságúak és egymásra merőlegesek, az eredőjük

$$v_\mathrm{eredő} = \sqrt{2}\,v \approx 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 51\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

nagyságú, iránya pedig a vízszinteshez képest 45°-os szögben lefelé mutat.

Több dolgozat alapján

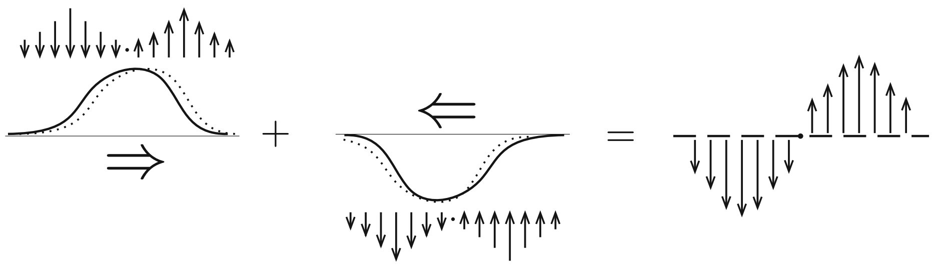
79 dolgozat érkezett. Helyes 53 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 1, hiányos (1 pont) 15, hibás 8, nem értékelhető 2 dolgozat.

G. 680. *Egyszerre megrántjuk egy kifeszített gumikötél mindkét végét, az egyiket felfelé, a másikat lefelé. Így két hullám indul el egymás felé az* ábrán *látható módon.*

A két szimmetrikus hullám azonos nagyságú energiát szállít. A két jel találkozásakor a gumikötél egy pillanatra egyenessé válik. Hová tűnik ekkor a két hullám energiája? Áthaladnak-e egymáson a jelek, vagy végleg kioltják egymást?

(*4 pont*)

Megoldás. Nézzük meg a gumikötelet egy pillanattal azelőtt, hogy egyenessé válik. Az *ábrán* ezt az alakot mutatja a folytonos görbe, az egyenessé válás pillanatát pedig a szaggatott vonal. A nyilak a gumikötél egyes darabkáinak sebességére utalnak. Rövid idővel később a hullámok a pontozott vonallal jelölt alakot mutatják. A sebességek nagyságát a folytonos görbe és a pontozott görbe közötti különbségből olvashatjuk le.



Az egyenessé válás pillanatában a jobbra és a balra haladó hullám kitérései is és a sebességek is „összeadódnak” (*szuperponálódnak*). A kötél egyes darabkái tehát mozgásban lesznek, a két hullám energiája nem tűnik el, hanem mozgási energia formájában lesz jelen.

Ha a találkozás után egy pillanattal később nézünk a kötélre, akkor egy ahhoz hasonló görbét látunk, mint amelyet az ábrán a pillanatnyi sebességvektorok végpontjai rajzolnak ki. A találkozó hullámok tehát nem oltják ki egymást, a két jel az eredeti irányba halad tovább. A két szimmetrikus hullám zavartalanul áthatol egymáson.

Hasonló jelenséget figyelhetünk meg akkor is, amikor két követ dobunk az addig mozdulatlan vízbe. A hullámok itt is „átmennek egymáson”. A találkozásukkor a gumikötélben lévő rugalmas energia (vízhullámoknál a kitéréssel arányos gravitációs helyzeti energia) mozgási energiává alakul. Amikor a hullámok szétválnak, a mozgási energia egy része visszaalakul helyzeti energiává, és a kötél (vagy a vízfelszín) megfigyelhető kitérülésével a hullám ismét láthatóvá válik.

Sebestyén József Tas (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 8. évf.) és
Szirmai Dénes (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

47 dolgozat érkezett. Helyes Láng Erik, Schmercz Blanka, Sebestyén József Tas, Szirmai Dénes és Tóth Dominik megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 18, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5130. *Hány fényév távolságra van tőlünk az a galaxis, amelynek egyik csillagáról hozzánk érkező sugárzásban a hidrogén* 4d $\to$ 2p *átmenetnek megfelelő fény hullámhossza* 513 nm?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. A 4d $\to$ 2p átmenet során a hidrogénatom $n_1 = 4$-es főkvantumszámú állapotból $n_2 = 2$-es állapotba kerül. A hidrogénatom kvantált energiaszintjeit a Bohr-modell (vagy a kvantummechanika törvényei) szerint az

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\,\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

összefüggés alapján számíthatjuk ki (ahol m az elektron tömege, e az elemi töltés, h pedig a Planck-állandó). Eszerint $E_2 = -3{,}4$ eV, $E_4 = -0{,}85$ eV, a felszabaduló energia: $E_4 - E_2 = +2{,}55$ eV. Ez az energia az Einstein–Planck-hipotézis szerint

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E_4 - E_2} = 485\ \mathrm{nm}$$

hullámhosszúságú fény keltésére elegendő (c a fénysebesség vákuumban).

A Földre érkező és itt megfigyelt fény $\lambda = 513$ nm-es hullámhossza $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 28$ nm-rel nagyobb, mint a kibocsátott fényé, az tehát a vörös felé tolódott el. A *vöröseltolódást* a galaxis (és benne a csillag) nagy sebességű távolodása miatt fellépő Doppler-hatásként értelmezhetjük. A relativisztikus Doppler-képlet szerint

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

ahonnan a csillag távolodási sebességére a

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2}\,c = 0{,}056\,c \approx 16\,800\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

értéket kapjuk. Lényegében ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a nemrelativisztikus $v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\,c$ formulából indulunk ki; így számolva

$$v = 0{,}058\,c \approx 17\,400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

távolodási sebességet kapunk.

A Hubble-törvény kapcsolatot ad meg az extragalatikus objektum r távolsága és v távolodási sebessége között:

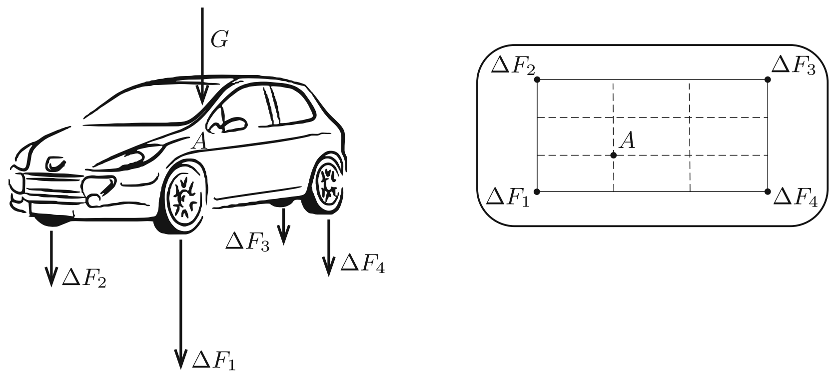
$$v = Hr, \qquad \text{ahol} \quad H \approx 70\,\frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}.$$

Ezek szerint a feladatban szereplő galaxis $r = \frac{v}{H} \approx 240$ Mpc távolságra van tőlünk; ez kb. 800 millió fényévnek felel meg.

Morvai Orsolya (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

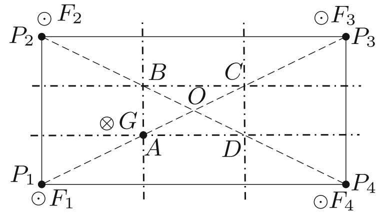
29 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.

P. 5135. *Vízszintes talajon álló autóba beszálló, $G = 840$ N súlyú vezető tömegközéppontja az* ábrán *látható A pontba kerül. (A méreteket az ábra jobb oldali része felülnézetből, méretarányosan mutatja. Az A pont a kerekek által meghatározott téglalapban a bal első és a jobb hátsó kereket összekötő átló első harmadolópontja.) Mennyivel nő meg az egyes kerekekre ható nyomóerő a vezető nélküli esethez képest? A kerekek rugói egyformák, és követik a Hooke-törvényt.*



(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

Megoldás. Jelöljük a kerekekre ható, a talaj által kifejtett erők megváltozását F_1-gyel, F_2-vel, F_3-mal és F_4-gyel. (Ezek a feladat ábráján bejelölt, a kerekek által a talajra ható ΔF_i többleterők ellenerejei.) Az autó a vezető beszállása előtt egyensúlyban volt, és utána is egyensúlyban marad. A szuperpozíció elve alapján elegendő a két helyzet „különbségét” vizsgálni, vagyis azt, hogy milyen feltételek mellett lenne egyensúlyban az autó, ha csak a G, F_1, F_2, F_3 és F_4 erők hatnának rá.



Az *ábrán* látható különböző tengelyek bármelyikére felírhatjuk a forgatónyomatékok egyensúlyának feltételét. Az egyes tengelyeket a rájuk illeszkedő pontpárokkal adhatjuk meg. Ezek szerint fennáll:

$$AB \text{ tengelyre} \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = 2(F_3 + F_4),$$
$$BC \text{ tengelyre} \quad \Rightarrow \quad 2(F_1 + F_4) - G = F_2 + F_3,$$
$$CD \text{ tengelyre} \quad \Rightarrow \quad F_3 + F_4 = 2(F_1 + F_2) - G,$$
$$DA \text{ tengelyre} \quad \Rightarrow \quad 2(F_2 + F_3) = F_1 + F_4.$$

A fenti egyenletek nem függetlenek egymástól, bármelyik háromból azonos átalakítások után megkaphatjuk a negyediket. Ezek szerint az egyik egyenletet elhagyhatjuk, majd algebrai átalakítások után kapjuk, hogy

$$F_4 - F_2 = 0, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{2}{3}G, \tag{2}$$

$$F_1 - F_3 = \frac{1}{3}G. \tag{3}$$

Az (1)–(3) egyenletek nem határozzák meg a négy ismeretlen erőt, még egy további feltételt kell keresnünk, hogy a feladatot megoldhassuk. Ez a feltétel nem lehet a függőleges irányú erőegyensúly egyenlete, hiszen (2) kétszereséből (1)-et és (3)-t kivonva az $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = G$ összefüggést kapjuk. Ugyancsak eredménytelen, ha valamilyen más tengelyre írjuk fel a forgatónyomatékok egyensúlyának egyenletét, abból sem kapunk új, független információt.

A P_1, P_2, P_3 és P_4 pontok a kerékrugók felső, a merev alvázhoz kapcsolódó végét jelölik. Ezen pontok helyzete függ a rugók összenyomódásától, a függőleges irányú $\Delta\ell_i$ elmozdulásuk pedig a vezető beszállásának hatására az F_i többleterővel arányos. Ennek megfelelően az O pont lesüllyedése egyrészt $\frac{1}{2}(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_3)$, másrészt $\frac{1}{2}(\Delta\ell_2 + \Delta\ell_4)$ alakban adható meg. Mivel a rugók egyformák és követik a Hooke-törvényt, fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_3) = \frac{1}{2}(F_2 + F_4). \tag{4}$$

Az (1)–(4) egyenletrendszer már megoldható, és a keresett erőkre $F_1 = 350$ N, $F_2 = F_4 = 210$ N és $F_3 = 70$ N adódik.

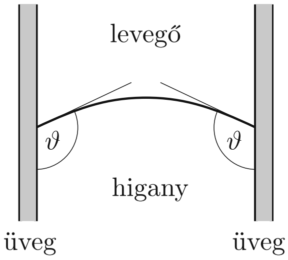
Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

17 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 7 dolgozat.

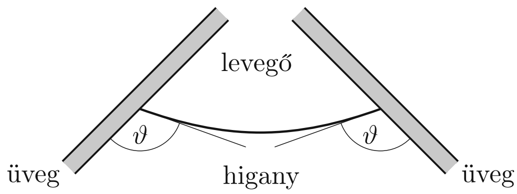
P. 5146. *Egy üvegpohárban a víz felülete a pohár falánál homorú, a higany felülete viszont domború. Létezik-e olyan alakú üvegedény, amelynek falánál a higany felülete is homorú?*

(*4 pont*)

Megoldás. A szilárd testekkel érintkező folyadékok felszíne (annak érintősíkja) bizonyos ϑ szöget zár be a szilárd felülettel (annak érintősíkjával). Ez a szög – amelyet *illeszkedési szögnek* neveznek – függ a folyadék és a szilárd test anyagi minőségétől. (A ϑ szöget a szilárd testnek a folyadékkal érintkező részétől mérjük.) Víz és üveg esetében ϑ hegyesszög (azt mondjuk: a víz nedvesíti az üveget), higany és üveg esetében pedig tompaszög (a higany nem nedvesíti az üveget).



1. ábra



2. ábra

A függőleges falú pohárban a faltól kicsit eltávolodva a higanyszint emelkedik, emiatt a higany felülete domború (*1. ábra*). Megfelelő mértékben szűkülő (tehát nem függőleges falú) üvegedényben viszont előfordulhat, hogy – jóllehet $\vartheta > 90°$ – a faltól eltávolodva a higanyszint csökken, és emiatt a higany felszíne a *2. ábrán* látható módon *homorú.*

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

17 dolgozat érkezett. Helyes Horváth Anikó és Laposa Hédi megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 11 dolgozat.

Fizika alapszak az ELTE TTK-n

Kedves továbbtanuló Fizikabarátok!

A KöMaL évszázados hagyományokat követve vezeti be a középiskolásokat a matematika és a fizika tantárgyak rejtelmeibe. Ez a tudás jól használható az egyetemi fizikatanulás során is. A KöMaL feladatmegoldóinak és olvasóinak egyik természetes továbbtanulási iránya a fizika választása. Akik szeretik a fizikát és ezzel szeretnék felkészültségüket fejleszteni, azoknak hasznos továbbtanulás az egyetemi *fizika alapképzés.* Nemcsak a leendő kutatóknak, de minden kreatív problémamegoldást igénylő munkahelyen elhelyezkedőnek felhasználható tudást nyújt ez a képzés. Azok számára is jó alap, akik később nem a fizikus mesterszakokon folytatják tanulmányaikat, hanem geofizikus, meteorológus, csillagász, környezettudományi vagy anyagtudományi mesterképzésben tanulnak tovább. A KöMaL-ban elmélyített fizikai tárgyi tudás szakmai ismeretei a fizikatanár képzésben is kamatoztathatók azok számára, akik kedvet éreznek életük során diákok tanítására.

A fizika tárgy tudása, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A kutatóintézeteken kívül a pénzügyi, műszaki világ nagyvállalatainak kutatási és fejlesztési projektjein, vagy kisebb cégekben alkalmazott problémamegoldó képességhez társuló fizikai tudást és informatikai készségeket igénylő projekteken lehet elhelyezkedni a fizikatanulás során megszerzett képességek felhasználásával.

Az ELTE TTK fizika alapszakja egyedülálló módon egyesíti a lehetőségeket! Az itt szerzett alapszakos diploma számos mesterképzésben felhasználható egyetemünkön belül és kívül úgy, hogy már az alapképzés során a speciális továbbtanulás alapozó témáiban lehet krediteket szerezni.

Az ELTE TTK további lehetőséget is nyújt a fizika tanulására az osztatlan tanárképzési szakokon. A fizika szak mellett a matematika, kémia a leggyakoribb párosítás, de informatika, történelem vagy nyelvi szakok is elterjedtek második tanári szakként. Az osztatlan tanárképzésben szerzett diploma fizikából egyedülállóan keresett képesítés a munkaerőpiacon. Napjainkban ez egy hiányszakma és biztos elhelyezkedést jelent azok számára, akik szeretnének ezen a társadalmilag is fontos pályán elhelyezkedni.

A fizika alapszak tárgyainak kínálata az ELTE TTK-n kifejezetten széles. A kötelező tárgyak szilárd alapja jelenti a szakma megismerését, de emellett számos részterület bevezető tananyaga elsajátítható. Az ELTE TTK Fizikai Intézetének munkatársai a biológiai fizika, elméleti fizika, anyagtudomány, asztrofizika, komplex rendszerek statisztikus fizikája, kvantummechanikai témakörök – például kvantumszámítógépek leírása –, részecskefizika, nehézionfizika, atommagfizika témákban nemzetközi kutatásokba is bevonják az érdeklődő diákokat. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé. Ezen diákok által végzett kutatási eredmények diákkonferenciákon mutathatók be, melynek országos rendszerében az ELTE TTK hallgatói évek óta kiválóan teljesítenek és sikereket érnek el. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra.

A tanárszakos osztatlan képzés felhasználja az ELTE többi karain oktatott pedagógiai és tanításmódszertani szakmai tudást is. A tanárszakosok többször lehetőséget kapnak a tanítási módszerek kipróbálására és a tapasztalt tanárok mesterség-elemeinek megtanulására. Az ELTE három gyakorlóiskolája kiváló terep a tanári szakma komplex elsajátítására, de számos más középiskolában is lehet gyakorlatokat végezni.

Az ELTE TTK fizikaképzése nemzetközi szintű, amit az is jelez, hogy számos alapszakos diplomával rendelkező diákunk folytatta már rangos angol, svájci vagy német egyetemen a fizikatanulását. Ezekre az egyetemekre az ELTE-n a legjobb eredménnyel végző diákoknak jó esélye van bejutni az elmúlt évek statisztikái alapján.

Az ELTE-n végzett fizikusok nemzetközi léptékben is versenyképesek. A mesterképzésben diplomát szerzők nagy része sikeresen jut be doktori iskolába vagy itthon vagy külföldön, az Egyesült Államoktól kezdve Japánig számos nívós egyetemen. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik. Számos további európai, kiemelkedő centrumba lehet Erasmus ösztöndíjat nyerni, ami az ELTE-s diákok felkészültségét jelentősen növeli és az itt elvégzett képzések jó alapot biztosítanak a kutatási kérdések sikeres megoldására, a komplex problémamegoldási képességek fejlesztésére és a későbbi kutatási vagy ipari fejlesztési állások elnyerésére.

A képzés további részleteiről az alábbi weblapon lehet információkat szerezni: `https://physics.elte.hu`.

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. A fizika népszerűsítésében is jártasságot lehet szerezni, a közösségi programok is gyakran népszerűek. A fizika szakokhoz jól szervezett mentorprogram társul. Minden évfolyamon több kiképzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat. Az ELTE TTK fizika alapszakja jól szervezett, barátságos képzés. Diákjaink nagy százalékban választják az ELTE TTK-t a továbbtanulásra.

Az ELTE TTK fizika képzéseiről személyesen is tapasztalatot lehet szerezni a Nyílt Nap programjain 2020. január 18-án a Lágymányosi Kampusz modern épületeiben.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 392. Mérjük meg a 100 forintos vagy az 1 eurós pénzérme anyagának fajhőjét kaloriméterben (termoszban)!

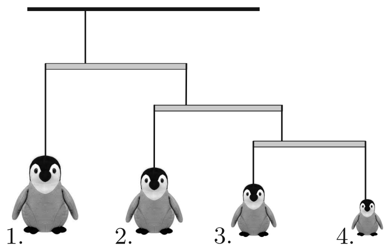
(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 693. Két teljesen hasonló vonat két párhuzamos vágányon halad egymással szemben állandó (de nem feltétlenül azonos nagyságú) sebességgel. A mozdonyok ugyanolyan hosszúságúak, mint a kocsik. Mindkét vonat 19 kocsiból és a mozdonyból áll, amely vontatja a szerelvényt. Az egyik vonaton Piri elölről a harmadik kocsiban utazik. Miután a két vonat találkozik, Piri kocsija 36 másodperc múlva kerül teljes terjedelmében Dani szemből jövő kocsija mellé, és ezt követően újabb 44 másodperc telik el, amíg a két vonat teljesen elhalad egymás mellett. Elölről hányadik kocsiban utazik Dani?

(*4 pont*) Közli: *Székely Zoltán,* Székelyudvarhely

G. 694. Egy éppen 100 kg tömegű rakéta a világűrben másodpercenként 100 g égésterméket lövell ki. A gáz 1 km/s sebességgel hagyja el a rakéta fúvókáját. Mekkora a rakéta gyorsulása?

(*3 pont*)



G. 695. Játékpingvineket függesztettek egy mozgó szobadíszre. A nagyon könnyű rudakat a negyedelőpontjukban függesztették fel, és így egyensúlyban vannak. Mekkora a 2., a 3. és a 4. pingvin tömege, ha tudjuk, hogy az első 48 dkg tömegű?

(*3 pont*) *Amerikai feladat*

G. 696. Sanyi egy forrasztópákát kapott karácsonyra, és rögtön kipróbálta. Egy 2000 Ω-os ellenállással párhuzamosan összeforrasztott egy 500 Ω-os ellenállást, majd az egésszel sorba egy másik 500 Ω-osat, végül az így kapott elrendezéssel párhuzamosan egy 600 Ω-os ellenállást. Az egészet egy telepre kapcsolta, és megállapította, hogy így a 2000 Ω-os ellenálláson 2 V feszültség mérhető.

a) Készítsük el az áramkör kapcsolási rajzát!

b) Mekkora a telep feszültsége?

c) Mekkora a telepen átfolyó áram erőssége?

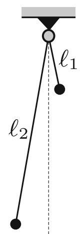
(*3 pont*)

P. 5186. Egy szánkó és a rajta ülő gyerek együttes tömege 25 kg. A csúszási súrlódási tényező a hóban 0,05.

a) Szeretnénk vízszintes terepen állandó sebességgel húzni a szánkót. Mekkora vízszintes erő szükséges ehhez?

b) A szánkót vízszintes, havas talajon 2 másodpercen át 50 N erővel felgyorsítjuk álló helyzetből, majd magára hagyjuk. Mekkora utat tesz meg a szánkó az indulás és a megállás között?

(*3 pont*) *Tarján Imre emlékverseny* (Szolnok) feladata alapján



P. 5187. Egy $\ell_1 = 25$ cm és egy $\ell_2 = 1{,}2$ m hosszú fonálingát azonos magasságban rögzítünk. A lengések síkja párhuzamos, és egymáshoz elég közel van. Az ingákat az egyensúlyi helyzetből azonos nagyságú, kis szöggel, ellentétes irányban kitérítjük, majd elengedjük.

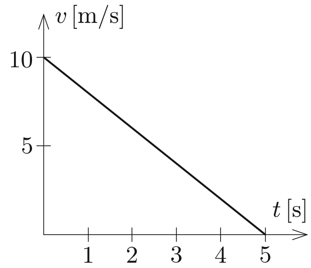
a) Az induláshoz képest mennyi idő múlva halad el egymás mellett a két fonálinga?

b) Mennyi idő múlva találkoznak másodszor?

c) Mekkorára kellene változtatni az ingahosszak arányát, hogy az ötödik találkozás legyen az első olyan, amikor az ingák sebességének iránya azonos?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5188. Vízszintes felületen egyenes vonalban mozgó, téglatest alakú hasáb a súrlódás következtében egyenletesen lassul. Az *ábra* a hasáb mozgásának sebesség–idő grafikonját mutatja.



A hasáb tetejére rugós játékágyút rögzítettek, ami v_0 torkolati sebességű, m tömegű lövedéket lő ki pillanatszerűen a hasáb lassuló mozgása során. A hasáb és az ágyú együttes tömege M.

a) Milyen irányban álljon az ágyú csöve, hogy a kilövés egyáltalán ne legyen hatással a hasáb lassulására, vagyis a grafikon az ábra szerint folytatódjon a kilövés után is?

b) Ha az ágyúcsövet az előzőekben meghatározott szög felére engedjük le, akkor a kilövés milyen módon befolyásolja a lassulási grafikont? Ábrázoljuk a módosult sebesség-idő grafikont, ha a kilövés $t = 2$ s-nál következik be!

Adatok: $m = 0{,}1$ kg, $M = 1$ kg, $v_0 = 5$ m/s.

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5189. Hosszú, hengeres, glicerinnel teli cső közepében kicsiny légbuborék van. Ha a csövet függőlegesen felállítjuk, a buborék állandó, 1 cm/s nagyságú sebességgel emelkedik. Ha a cső vízszintes, és a tengelyével párhuzamosan 20 m/s sebességre gyorsítják, hol áll meg a csőben a buborék? Hová mozdul el a buborék, ha a cső sebességét egyenletesen 30 m/s-ra növelik? És hol áll meg ezután, ha a csövet lefékezik? (A buborék megindulásának és megállásának rövid időtartamát, valamint a cső falának fékező hatását hanyagoljuk el.)

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5190. Egy vékony falú, függőlegesen álló üvegcső alul szabályos félgömb alakú. A cső átmérője 10 cm. Vizet töltünk a csőbe, 20 cm magasan. A cső tengelye mentén, a vízfelület felett 30 cm magasan egy kicsiny fényforrás világít.

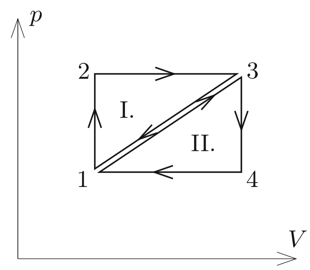
a) Hova tegyünk egy ernyőt, hogy azon a fényforrás éles képe jelenjen meg?

b) Mekkora a kép nagyítása?

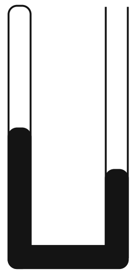
(A víz törésmutatója $n = 4/3$.)

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5191. Ugyanannyi ideális gázzal az *ábra* szerinti $p{-}V$ diagramon ábrázolt $1 \to 2 \to 3 \to 1$, illetve az $1 \to 3 \to 4 \to 1$ körfolyamatot végeztetjük. Melyik körfolyamatot végző gépnek nagyobb a hatásfoka, és milyen összefüggés áll fenn a két hatásfok között?



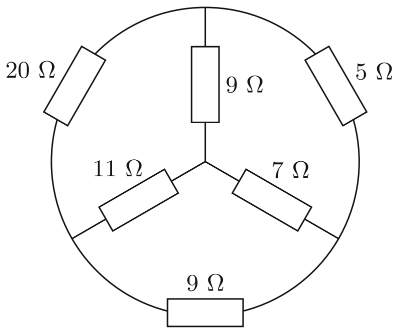
(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata



P. 5192. Az *ábrán* látható, egyik végén zárt, U alakú, 1 cm^2 keresztmetszetű csőben lévő higany 40 cm hosszúságú, 300 K hőmérsékletű levegőt zár be. A külső légnyomás 76 cm magas higanyoszlop hidrosztatikai nyomásával egyezik meg.

A bezárt gáz hőmérsékletét állandónak tartva, V_0 térfogatú higany betöltése után a cső két szárában a higanyszint megegyezik. Ha ezek után a bezárt levegőt melegítjük, azt tapasztaljuk, hogy a nyomása minden hőmérsékleten egyenesen arányos a térfogatával. Mekkora a V_0 térfogat?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs



P. 5193. Hat darab ohmos ellenállást az *ábrán* látható módon forrasztottunk össze. Mekkora eredő ellenállás mérhető a 20 Ω-os ellenállás végpontjai között?

(Lásd *A hídkapcsolás eredő ellenállása és áramerősségei* című cikket a KöMaL 2016. évi 2. számában vagy a honlapon.)

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 5194. Tekintsünk két azonos méretű, de a köztük lévő 0,2 m távolsághoz képest kicsiny fémgömböt! A két gömbnek különböző töltése van, és 1,2 N erővel vonzzák egymást. A gömböket összeérintjük, majd visszahelyezzük őket az eredeti helyükre. Azt találjuk, hogy most taszítják egymást, de az erő nagysága az előzővel azonos. Mennyi volt a fémgömbök eredeti töltése?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 5195. Egy $a = 60$ cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban egy-egy $Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C nagyságú, pontszerűnek tekinthető töltés helyezkedik el vákuumban. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a háromszög oldalharmadoló pontjaiban?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5196. Egy rakéta a hajtóművének működése közben csak a kiáramló gázsugárra „támaszkodhat”. A hajtóanyag energiájának jelentős részét a kiáramló gázok viszik magukkal, a rakéta mozgási energiájának növelésére a felszabaduló energia kisebb hányada jut.

a) Határozzuk meg, hogy mekkora Δv értékkel nő a rakéta sebessége, ha az M tömegű rakétából valamennyi idő alatt egy kicsiny ΔM tömegű gáz áramlik ki hátrafelé, a rakétához képest u sebességgel! (A gravitációs erőt itt és a továbbiakban elhanyagoljuk.)

b) Mekkora lesz az M_0 tömeggel induló rakéta sebessége, amikor a tömege már M $(M < M_0)$ értékre csökken?

Útmutatás: felhasználhatjuk, hogy

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{x_2}{x_1}.$$

c) Mekkora az M tömegű rakéta és a kiáramlott gázok összes mozgási energiája az indulási vonatkoztatási rendszerben?

Útmutatás: felhasználhatjuk, hogy a kiáramlott gázokból és a rakétából álló teljes rendszer mozgási energiájának megváltozása független a vonatkoztatási rendszertől, így pl. a rakétával együtt mozgó rendszerben is ugyanakkora, mint az indulási vonatkoztatási rendszerben.

d) Legfeljebb mekkora lehet a rakétameghajtás „mechanikai hatásfoka”, vagyis a rakéta mozgási energiájának és az összes mozgási energiának a hányadosa az indítási vonatkoztatási rendszerben?

(*6 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata

❄

Beküldési határidő: 2020. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 1. January 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 28): **K. 644.** A box contained a total of 70 blue and green cubes. Four times as many blue cubes were removed as green cubes, so there remained 7 times as many green cubes as blue cubes in the box. How many cubes of each colour were there originally? **K. 645.** What will be the remainder if $1+4+7+\cdots+2020$ is divided by 8? **K. 646.** We have three machines. Each of them has two input channels and one output channel. As represented in the *diagram,* the machines carry out some well defined sequence of operations with the numbers obtained through the input channels, and display the final result as output. Machine A displays $x\cdot y$, machine B displays x^2+y, and machine C displays $5\cdot x+3\cdot y$ where x and y stand for the first and second input numbers, respectively. The machines A, B and C are connected by attaching the outputs of two machines to the inputs of the third one. What is the largest possible output that may be obtained from the third machine if the inputs of the first two machines are the same, $x=4$ and $y=7$? **K. 647.** An icosahedron made of paper is cut along some edges to unfold in the plane and obtain the net of the solid. How many edges need to be cut? **K. 648.** The sides of a square are divided into three equal parts. An interior point of the square is connected to one of the dividing points on each side, as shown in the *figure,* to form four quadrilaterals. Given the area of one quadrilateral (see figure), determine the areas of the other quadrilaterals.

New exercises for practice – competition C (see page 29): **Exercises up to grade 10: C. 1581.** Find all positive integers n for which $n!$ ends in exactly 19 531 zeros. **C. 1582.** Let ABP, BCQ, CDR, DAS denote the regular triangles drawn on the sides of paralellogram $ABCD$ on the outside. What requirements does the parallelogram need to meet in order for $PQRS$ to be a square? **Exercises for everyone: C. 1583.** In the Cartesian coordinate plane, represent the points for which the following inequality holds: $|x|+|y|+|x+y|\leqslant 2$. What is the area of the resulting figure? (*Croatian problem*) **C. 1584.** What is the maximum area of a square that can be obtained from a triangular sheet of paper with sides 3 cm, 4 cm and 5 cm by cutting along at most three straight lines? **C. 1585.** What distinct positive primes p and q satisfy the equality $p-4p^2+p^3=q-4q^2+q^3$? **Exercises upwards of grade 11: C. 1586.** The points D and E divide side AB of triangle ABC into three equal parts. Let P be an arbitrary interior point of line segment DE. Draw parallels to line PC through the points D and E. These lines intersect sides AC and BC at points Q and R, respectively. Show that the area of quadrilateral $PRCQ$ equals the area of triangle APQ. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1587.** Solve the equation $\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x-2}=\frac{\sqrt{x}}{2x-1}$ over the set of real numbers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger)

New exercises – competition B (see page 31): **B. 5070.** There are two kinds of people living on an island: some always tell the truth, while some always lie. Ten inhabitants of the island were numbered as $1,2,\ldots,10$. Then everyone was asked the same three questions: "Is your number even?", "Is your number divisible by 4?", "Is your number divisible by 5?". The number of those saying "Yes" was three, six, and two, respectively in the three cases. Which numbers were assigned to liars? (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5071.** Let us consider a triangle ABC. Let A_1 and A_2 denote the points that divide side BC into three equal parts, with A_1 lying closer to vertex B. Analogously, let B_1, B_2 divide side CA into equal parts, with B_1 lying closer to C, and let C_1 és C_2 divide AB into three equal parts, with C_1 lying closer to B. Prove that the triangles $A_1B_1C_1$ and $B_2C_2A_2$ are congruent, and both of their areas are equal to the third of the area of the triangle ABC. (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5072.** Prove that $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{4n+5}\right]$ for all positive integers n. (*3 points*) (Proposed by *T. Imre,* Marosvásárhely) **B. 5073.** The tangents drawn to the incircle of triangle ABC, parallel to the sides, cut off three small triangles at the corners. The radii of the incircles of the small triangles are 2, 3 and 10 units long. Show that triangle ABC is right-angled. (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5074.** Find all positive integers n and distinct (positive) primes p, q, r for which $\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr^3}+\frac{1}{qr^2}=\frac{1}{n}$. (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 5075.** The midpoints of sides AD and BC of a convex quadrilateral $ABCD$ are E and F, respectively. Line segment EF intersects diagonal AC at point P, and diagonal BD at point Q. Prove that the circles AEP and BFQ intersect each other on the line AB. (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 5076.** Find the real solutions of the system $x+y+z+v=0$, $x^2+y^2+z^2+v^2=12$, $x^3+y^3+z^3+v^3=24$. (*6 points*) **B. 5077.** We want to draw a perspective image of a cube, using two vanishing points: $I_1=(-9;0)$ and $I_2=(10;0)$, as shown in the *figure.* The images of three vertices are $A=(-3;0)$, $B=(0;0)$ és $C=(4;0)$. What should the y-coordinate of point F be? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 32): **A. 767.** In an $n\times n$ array all the fields are colored with a different color. In one move one can choose a row, move all the fields one place to the right, and move the last field (from the right) to the leftmost field of the row; or one can choose a column, move all the fields one place downwards, and move the field at the bottom of the column to the top field of the same column. For what values of n is it possible to reach any arrangement of the n fields using these kinds of steps? (Proposed by *Ádám Schweitzer*) **A. 768.** Let S be a shape in the plane which is obtained as a union of finitely many unit squares. Prove that the ratio of the perimeter and the area of S is at most 8.

Problems in Physics

(see page 57)

M. 392. Measure the specific heat capacity of the material of a 100-forint (or 1-euro) coin in a calorimeter (thermos flask).

G. 693. Two exactly alike trains move towards each other (not necessarily at the same speed) along parallel railroad tracks next to each other. The length of each locomotive is the same as the length of each railway carriage. Both trains consist of 19 carriages and locomotives which haul the trains (one locomotive in front of each train). Peggy is travelling in the third carriage (counted from the locomotive). After the two trains meet, 36 seconds elapse when Peggy's carriage gets exactly next to that carriage of the other train in which Daniel is travelling, and then 44 seconds elapse until the two trains go past each other. Counted from the locomotive, in which carriage is Daniel? **G. 694.** An exactly 100-kg rocket, moving in space, ejects 100 g exhaust gas in each second. The exhaust leaves the nozzle at a speed of 1 km/s. What is the acceleration of the rocket? **G. 695.** Toy penguins were suspended to an unsteady room decoration. The very light rods (see the *figure*) were suspended at their quadrisection points such that the structure is in equilibrium. What are the masses of the second, the third, and the fourth toy penguins, if the first one has a mass of 480 g? **G. 696.** Alexander got a soldering iron as a Christmas present, and he immediately tried it. He soldered two resistors of resistances 2000 Ω and 500 Ω in parallel, and then with this he soldered another 500 Ω resistor in series. Finally with this he soldered a 600 Ω resistor in parallel. He connected the circuit to a battery and measured the voltage across the 2000 Ω resistor, which was 2 V. *a*) Draw a schematic figure of the circuit. *b*) What is the voltage across the battery? *c*) What is the current through the battery?

P. 5186. The total mass of a sleigh and a child on it is 25 kg. The coefficient of kinetic friction between the sleigh and the snow is 0.05. *a*) We would like to pull the sleigh horizontally at a constant speed. What is the horizontal force that must be applied? *b*) The sleigh is accelerated from rest for 2 seconds with a constant force of 50 N along the horizontal, snow covered ground, and then it is released. What is the distance covered by the sleigh from the starting position until it again comes to rest? **P. 5187.** Two simple pendulums are fixed at the same height. They swing in parallel planes close to each other. One of them is $\ell_1 = 25$ cm, whilst the other is $\ell_2 = 1.2$ m long. The two pendulums are displaced in the opposite direction at the same small angle, and then released. *a*) How long does it take for the pendulums to go past each other after they were released? *b*) How much time elapses until they meet again? *c*) What should the ratio of the lengths of the pendulums be in order that the fifth encounter be the first one when the direction of the velocities of the two pendulum bobs is the same? **P. 5188.** A cuboid-shaped prism is sliding along a horizontal surface in a straight line and is decelerating due to friction. The *figure* shows the velocity-time graph of its motion. A spring-loaded toy cannon is attached to the top of the prism, which fires projectiles of mass m at a speed of v_0, during the slowing motion of the prism. The total mass of the prism and the toy cannon is M. *a*) To which direction should the cannon be aimed in order that the projection not affect the decelerating motion of the prism, or in other words the graph of the motion of the cannon continue in the same way after firing the projectile? *b*) If the angle between the gun barrel and the horizontal is adjusted to half of the angle determined in the previous problem, then how does this affect the graph of the deceleration? Sketch the modified velocity-time graph of the motion, if the projectile was shot at $t = 2$ s. *Data:* $m = 0.1$ kg, $M = 1$ kg, $v_0 = 5$ m/s. **P. 5189.** There is a small air bubble at the middle of a long cylinder-shaped tube, filled with glycerine. When the tube is held vertically, the air bubble is raising at a constant speed of 1 cm/s. Where will the air bubble stop in the tube when it is held horizontally and is accelerated along its symmetry axis to a final speed of 20 m/s? Where will the bubble move if the tube's speed is uniformly increased to 30 m/s, and where will it stop if the tube is ceased to move? (The short time intervals when the bubble starts and stops, and the retarding effect of the wall of the tube are negligible.) **P. 5190.** The bottom end of a vertical, thin-walled glass tube has a shape of a hemisphere. The diameter of the tube is 10 cm. The tube is filled with water up to a height of 20 cm. 30 cm above the water level and along the axis of the tube there is a small light source. *a*) Where should we place a screen in order to gain a sharp image of the light source? *b*) What is the magnification? (The refractive index of water is $n = 4/3$.) **P. 5191.** Two samples of ideal gas, of the same amount, are taken through the cyclic processes shown in the *figure.* The figure shows the $p{-}V$ diagram of processes $1 \to 2 \to 3 \to 1$, and $1 \to 3 \to 4 \to 1$. If the working substance of two engines are the two samples of ideal gas taken through the above two cyclic processes, which engine has greater efficiency, and what is the relationship between the two efficiency values? **P. 5192.** A mercury column confines an air column of height 40 cm and of temperature 300 K in a U-shaped tube, one end of which is closed, and which has a cross sectional area of 1 cm^2, as it is shown in the *figure.* The external air pressure is the same as the gauge pressure of a 76 cm high mercury column. Keeping the temperature of the enclosed gas constant, some mercury of volume V_0 is poured into the tube such that the mercury levels in the two arms of the tube will be the same. Then if the enclosed air is heated we can observe that its pressure is proportional to its volume at any temperature. What is the volume V_0? **P. 5193.** Six ohmic resistors were soldered as shown in the *figure.* What is the equivalent resistance measured between the terminals of the 20 Ω resistor? **P. 5194.** Consider two metal spheres of the same size, which is small compared to the 0.2 m distance between them. The two spheres are charged differently and they attract each other with a force of 1.2 N. The spheres are made to touch each other and then placed back to their original position. Now they repel each other, but the magnitude of this repulsive force is the same as the magnitude of the attractive force in the first case. What was the initial charge of the spheres? **P. 5195.** At each vertex of an equilateral triangle of sides $a = 60$ cm there is a point-like charge of $Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C in vacuum. What is the magnitude and the direction of the electric field at the trisection points of the sides of the triangle? **P. 5196.** A rocket engine uses the thrust obtained from the ejected exhaust. The greatest part of the energy of the propellant is the energy of the ejected exhaust, and only a small portion is converted to increase the kinetic energy of the rocket. *a*) Determine the speed increase Δv of the rocket of mass M, when during some time a small amount of gas of mass ΔM is ejected backward at a speed of u with respect to the rocket. (The gravitational force can be neglected in this case and in the further cases as well.) *b*) What will the speed of the rocket of initial mass M_0 be, when its mass decreases to M $(M < M_0)$? *Hint:* we can use that $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{x_2}{x_1}$. *c*) What is the total kinetic energy of the rocket of mass M and the ejected gas particles with respect to the reference frame of the departure? *Hint:* we can use that the change in the kinetic energy of the whole system of the ejected gas and the rocket is independent of the reference frame; so it is the same in the reference frame of the moving rocket and in the reference frame of the departure. *d*) At most what can the "mechanical efficiency" of the rocket be? The mechanical efficiency is the ratio of the kinetic energy of the rocket to the total kinetic energy of the system in the reference frame of the departure.