számának hányadosa. Ez a feltételezés azonban nyilván nem teljesül, hiszen – mivel a bábut kezdetben bármelyik mezőre $\frac{1}{64}$ valószínűséggel helyezzük le – azok a lépések valószínűbbek, melyek olyan mezőről indulnak ki, ahonnan kevesebb huszár lépés lehetséges. Emellett igen gyakori volt még a számolási hibák elkövetése (például valamelyik mező esetén a kedvező lépés valószínűségének elszámolása).

63 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Adravecz Balázs, Debreczeni Tibor, Demcsák Ágnes, Facskó Vince, Falvay Júlia, Hordós Adél Zita, Kis Károly, Kis-Tóth Janka, Kovács Bence, Limpek Balázs, Mészáros Márton, Molnár István, Német Franciska, Pásti Bence, Székelyhidi Klára, Szigeti Donát, Wagner Dávid Barnabás. 4 pontos 6, 3 pontos 14, 2 pontos 11, 1 pontos 5, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5004. *$2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb hány olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül legalább az egyikkel?*

(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. A $2n$ egymást követő egész szám halmazát jelölje $\mathcal{H}$. A $\mathcal{H}$ elemei között legfeljebb egy lehet osztható $2n$-nel, hiszen két ilyen szám különbsége legalább $2n$, míg $\mathcal{H}$ legnagyobb és legkisebb elemének különbsége csupán $2n-1$. Hasonló okból az $n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ számoknak legfeljebb két többszörösük lehet $\mathcal{H}$-ban, mivel három ilyen többszörös közül a legnagyobb és legkisebb különbsége legalább $2(n+1) > 2n-1$.

A továbbiakban n paritása szerint két esetet különítünk el egymástól.

1. eset: n páros. Ekkor az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül $\frac{n}{2}$ páros és ugyanennyi páratlan. Ha – a $2n$ kivételével – ezek közül mindegyik k-nak két többszöröse van $\mathcal{H}$-ban, akkor ezek „szomszédos” többszörösök (ik és $(i+1)k$), így a páratlanoknak egy páratlan és egy páros többszöröse, a párosaknak pedig két páros többszöröse található $\mathcal{H}$-ban. Ez (a $2n$ egyetlen $\mathcal{H}$-beli többszörösét is beszámítva $2\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2}+1=n+\frac{n}{2}-1$ páros és) $\frac{n}{2}$ páratlan többszöröst jelentene $\mathcal{H}$-ban; mivel azonban $\mathcal{H}$-nak pontosan n páros és n páratlan eleme van, ebben az esetben legfeljebb $n+\frac{n}{2}$ lehet a $\mathcal{H}$-ba eső többszörösök száma. Ez a korlát el is érhető: legyen $\mathcal{H}=\{n+1, n+2, \ldots, 3n\}$, ekkor $(n+1)$-től $2n$-ig mindegyik szám osztható az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül valamelyikkel, mégpedig saját magával. A többiek közül pedig az $\frac{n}{2}$ darab páros szám: $2n+2=2(n+1)$, $2n+4=$ $=2(n+2)$, …, $3n=2\left(\frac{3n}{2}\right)$ osztható rendre $n+1$-gyel, $n+2$-vel, …, $n+\frac{n}{2}$-vel.

2. eset: n páratlan. Az előző esethez hasonlóan, most $\left(\frac{n+1}{2}\right.$ páros és$\left.\right)$ $\frac{n-1}{2}$ páratlan szám van az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok között. Így a $\mathcal{H}$-ba eső páratlan többszöröseik száma $\frac{n-1}{2}$, ezért a $\mathcal{H}$-ban található többszörösök száma legfeljebb n (a $\mathcal{H}$ páros elemeinek a száma) $+\frac{n-1}{2}$. Az $n+\frac{n-1}{2}$ korlát elérhető, ha például (ismét) a $\mathcal{H}=\{n+1, n+2, \ldots, 3n\}$ választással élünk. Ekkor ugyanis az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok saját magukkal, az $\frac{n-1}{2}$ darab páros szám pedig: $2n+2=2(n+1)$, $2n+4=2(n+2)$, …, $3n-1=2\left(\frac{3n-1}{2}\right)=2\left(n+\frac{n-1}{2}\right)$ saját magának a felével osztható.

Tehát $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb $n+\left[\frac{n}{2}\right]$ olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok valamelyikével.

Nyárfádi Patrik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

47 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Bokor Endre, Csaplár Viktor, Dobák Dániel, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffy Ágoston, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Kovács Tamás, Kun Ágoston, Mátravölgyi Bence, Nagy Nándor, Nyárfádi Patrik, Rareş Polenciuc, Soós Máté, Telek Zsigmond, Terjék András József, Tóth Ábel, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 3 pontos 8, 2 pontos 5, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 1, nem számítunk a versenybe 1 dolgozatot.

B. 5035. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $n \geqslant 8$ csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor több, mint*

$$\frac{(n-5)^4}{64}$$

egyszínű, négy hosszú kör keletkezik.

(*6 pont*) *Pálfi Máté* (Budapest) javaslata nyomán

Megoldás. *Elnevezés:* Az $\binom{n}{k}$ kifejezésben n-re olykor számlálóként, k-ra pedig nevezőként hivatkozunk. Szükségünk lesz a következő becslésre: Legyenek a, b, y pozitív egész számok, melyekre $a>b$; ekkor: $\binom{a}{y}+\binom{b}{y} \geqslant \binom{a-1}{y}+\binom{b+1}{y}$.

Bizonyítás: ekvivalens átalakításokat hajtunk végre a bizonyítandó egyenlőtlenségen. Szorozzuk mindkét oldalt $(y!)^2$-nel:

$$a(a-1)(a-2)\ldots(a-y+1)+b(b-1)(b-2)\ldots(b-y+1) \geqslant$$
$$\geqslant (a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-y)+(b+1)b(b-1)\ldots(b-y+2).$$

Vonjuk ki a jobb oldalt és emeljünk ki:

$$\big(a-(a-y)\big)(a-1)(a-2)\ldots(a-y+1)+$$
$$+\big((b-y+1)-(b+1)\big)b(b-1)\ldots(b-y+2) \geqslant 0.$$

Végezzük el a kivonást és adjuk hozzá a negatív tagot:

$$y(a-1)(a-2)\ldots(a-y+1) \geqslant yb(b-1)\ldots(b-y+2).$$

Ez pedig egyenesen következik abból, hogy $a>b$, mert mindkét oldalon y pozitív szám szorzata áll, és a bal oldalon lévők páronként nagyobbak vagy egyenlők, mint a jobb oldalon lévők. Ezzel a lemmával a későbbiekben olyan összegeket tudunk alulról becsülni, ahol a binomiális tagok „számlálójában” lévő tagok összege adott. Fontos megjegyezni, hogy amit beláttunk 1-re (amennyivel „közelebb vittük egymáshoz” a két számlálót), az tetszőleges pozitív valós számra igaz, ez látszik a bizonyítás menetéből. Tehát valójában a számlálók átlagával tudunk alulról becsülni, és ez akárhány tagra igaz.

A feladat állításának bizonyítása: Vegyünk egy tetszőleges n pontú teljes gráfot. Legyen az élek színe kék és lila, és tegyük fel, hogy kékből van több vagy ugyanannyi, mint lilából. Legyen a kék élek száma $\frac{nk}{2}$ (itt k nem feltétlenül egész szám, de ez nem baj, és már most tudjuk, hogy $k \leqslant \frac{n-1}{2}$), az a lényeg, hogy egy csúcsból átlagosan k darab kék él indul ki. Ha egy csúcsból kiindul x kék él, akkor az a csúcs $\binom{x}{2}$ kék cseresznyének a gyökere (egy cseresznye egy kettő hosszú út, és gyökere az élek közös végpontja). Legyen a gráf i-edik csúcsából kiinduló kék élek száma A_i. Ekkor a gráfban van $\binom{A_1}{2}+\binom{A_2}{2}+\ldots+\binom{A_n}{2}$ kék cseresznye, ahol $A_1+A_2+\ldots A_n=nk$. Most alkalmazzuk a lemmát az $y=2$ esetre, és megkapjuk, hogy van a gráfban legalább $n\binom{k}{2}$ kék cseresznye, hiszen mind az n számlálóba behelyettesítettük k-t, a számlálók átlagát. Ezt osszuk el az élek számával, és megkapjuk, hogy egy élen átlagosan

$$\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}$$

cseresznye fekszik (egy cseresznye azon az élen fekszik, ami hiányzik a három pont által meghatározott háromszögből). Persze lehetséges, hogy néhány élen több, néhányon pedig kevesebb cseresznye fekszik, azonban a következő lépésből és a lemmából látni fogjuk, hogy akkor kapunk alsó becslést, ha az átlaggal számolunk. Szintén a lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2}$$

4 hosszú kék kör fekszik átlagosan egy élen mint a 4 hosszú kör „átlóján”. Ezt az élek számával beszorozva megkapjuk a 4 hosszú kék körök számát. Azonban így minden 4 hosszú kék kört kétszer számoltunk (mindkét átlójánál), ezért ezt el kell osztani 2-vel. Ebből azt kapjuk, hogy legalább

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

4 hosszú kék kör van a gráfban. Teljesen megegyező gondolatmenettel kaphatjuk, hogy lila körből legalább

$$\binom{\frac{2\binom{n-1-k}{2}}{n-1}}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}$$