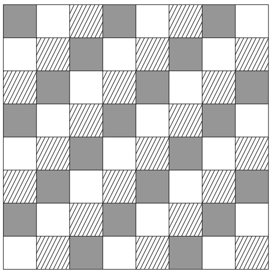
Vagyis azt kaptuk, hogy az egyetlen megoldás: $a = 16$, $b = 21$, $c = 26$, $d = 37$.

Ezt leellenőrizve (a, b illetve c, d valóban relatív prímek)

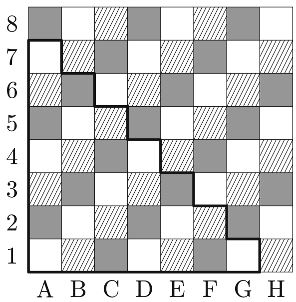
$$\left(1 + \frac{16}{21}\right)\left(1 + \frac{26}{37}\right) = \left(\frac{37}{21}\right)\left(\frac{63}{37}\right) = \frac{63}{21} = 3.$$

Sztranyák Attila
Budapest

C gyakorlat megoldása



C. 1517. *Egy sakktábla mezőit három színnel színeztük az* ábrán *látható módon. A táblán véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt, majd azzal véletlenszerűen (de szabályosan) egyet lépünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a huszár a kiinduló mezővel azonos színű helyre érkezik?*



I. megoldás. Jelöljük a sakktábla mezőit az *ábrán* látható módon. Mivel a huszárt véletlenszerűen helyezzük el a táblán, ezért egy mező kiválasztásának a valószínűsége $\frac{1}{64}$. A továbbiaknak minden mezőre kiszámoljuk az egy lépésben vele azonos színű mezőre való lépés valószínűségét. A kapott valószínűségek összegét $\frac{1}{64}$-gyel szorozva kapjuk meg a keresett valószínűséget.

A színezett tábla tengelyesen szimmetrikus a H1–A8 átlóra nézve, ezért csak a vastag vonallal határolt mezőkhöz tartozó valószínűségek összegét számoljuk ki, majd az eredmény kétszeréséhez hozzáadjuk a H1–A8 átló mezőihez tartozó valószínűségeket.

A „megfelelő" lépés minden esetben a kiinduló mezővel azonos színű mezőre lépést jelenti. Az első négy átlószerűség mezőit részletesen indoklom, a többi esetben csak a valószínűségeket adom meg úgy, hogy a tört számlálójában a megfelelő lépések, míg nevezőjében a lehetséges lépések száma áll.

1.) A1: 2 lehetséges és 0 megfelelő lépés, a keresett valószínűség így 0.

2.) B1–A2: A B1 és az A2 mező esetén is 3 lehetséges és 1 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$. A B1–A2 „átlóhoz" tartozó mezők valószínűségének összege $\frac{2}{3}$.

3.) C1–A3: Mindhárom mező esetén 4 lehetséges és 2 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. A C1–A3 „átlóhoz” tartozó mezők valószínűségének összege $\frac{3}{2}$.

4.) D1–A4: a D1 és az A4 mező esetén 4 lehetséges és 2 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, míg a C2 és B3 mező esetén 6 lehetséges és 3 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. A D1–A4 „átlóhoz” tartozó valószínűségek összege $\frac{4}{2}=2$.

5.) Az E1–A5 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=\frac{5}{2}.$$

6.) Az F1–A6 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=3.$$

7.) A G1–A7 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{3}=\frac{23}{6}.$$

8.) A H1–A8 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{4}+\frac{2}{2}=5.$$

Tehát az egyes mezőkhöz tartozó valószínűségek összege:

$$2\cdot\left(0+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{23}{6}\right)+5=2\cdot\frac{27}{2}+5=32.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen elhelyezett huszár a kiinduló mezővel azonos színű mezőre lép $\frac{1}{64}\cdot 32=\frac{1}{2}$.

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szakközépiskola, 12. évf.)

II. megoldás (vázlat). Az $\frac{1}{2}$ eredmény túl szép ahhoz, hogy ne próbáljunk meg ennél elegánsabb megoldást keresni. Ez (mivel bármelyik mező kiválasztásának a valószínűsége $\frac{1}{64}$) olyan szimmetriát sugall, hogy minden megfelelő lépésnek kölcsönösen egyértelműen meg lehet feleltetni egy nem megfelelő lépést. A megfeleltetés a következő: minden lépéshez hozzárendeljük a sakktábla első sorának felezőmerőlegesére vett tükrözéssel kapott lépést.

Megjegyzések. 1. Akik jól oldották meg a feladatot, azok az I. megoldáshoz hasonlóan gondolkoztak. A II. megoldáshoz hasonlóan senki nem dolgozott.

2. A leggyakoribb hiba annak feltételezése volt, hogy minden lépés azonos valószínűségű, és ennek megfelelően a keresett valószínűség a kedvező lépések és az összes lépés