Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 4? (*7 pont*)

b) Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható 60-nal? (*5 pont*)

2. *a*) Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a 6 kékszemű tanuló átlaga pontosan 3, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan 4 lett. A 21 fiú átlaga pontosan 3,5, a lányok átlaga pontosan 4,5 lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban. (*5 pont*)

b) Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A buszköltséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség 175 Ft-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség további 225 Ft-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (*8 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}. \qquad (\textit{6 pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x\right| = \frac{1}{2}. \qquad (\textit{7 pont})$$

4. *a*) Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1; 10)$ és az $M_2(4; -5)$ pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a, b, c és d értékét. (*7 pont*)

b) Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=(x+3)^2-6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. (*6 pont*)

II. rész

5. Egy felmérésben azt vizsgálták, az autósok hogyan viszonyulnak a téli gumiabroncsok használatához. A felmérésben 1800 autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumiabroncsokat, 1320-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumiabroncsot, 40%-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.

a) Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon. (*6 pont*)

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumiabroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km-t tett meg, addig a műszerfal 101,2 km megtett utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője 632 mm volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.

b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (*5 pont*)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozaton vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége 1,6 mm alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén 1/15 annak a valószínűsége, hogy a kopás 1,6 mm alá csökkent.)

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább 5 olyan autót találnak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket. (*5 pont*)

6. A valós számokon értelmezett $f(x)=2x^3+3x^2+bx+c$ függvénynek lokális maximuma van $x=-2$-nél.

a) Igazoljuk, hogy ekkor $b=-12$. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f-nek három különböző zérushelye van. (*7 pont*)

c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c=0$. (*4 pont*)

7. A kanaszta nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában 55 lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében 13-13 lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezeken a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés" lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. (*4 pont*)

Egy szerencsejátékban 4 Király és 4 Ász közül visszatevés nélkül húz lapokat a játékos a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt k darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye $100k^2$ forint.

c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. (*7 pont*)

8. Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB, beírt körének középpontja O_1, a beírt kör sugara 9 cm. A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2, sugara pedig 4 cm.

a) Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát. (*5 pont*)

b) Igazoljuk, hogy $O_2C = 10{,}4$ cm. (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a háromszög területét. (*7 pont*)

9. Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H. Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot. (*6 pont*)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordinátarendszerben $A(0;0)$ és $B(10;0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknegyedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a $P(17;17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja. (*6 pont*)

Koncz Levente
Budapest