KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 9. szám Budapest, 2019. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Rábai Imre

(1926–2019)

„A gyalogos osztályban is, amilyen a miénk volt, egyetemi igényességgel tanított, de úgy, hogy senki sem félt a matematikától. Akkor ez nekem fel sem tűnt. Nem azért, mert én nem féltem, hanem valószínűleg azért, mert a nálam sokkal gyengébb osztálytársaim sem féltek a matematikától. Ma már tudom, hogy ez rendkívüli tanári teljesítmény. Van olyan értékes, mint ahogyan összehozta azt a nevezetes matematikai osztályt.

Figyelte, kinek milyen a tudásszintje, s ha valaki ahhoz képest előrelépett, azt értékelte. Voltak olyan osztálytársaim, akik matematikából könnyen megbukhattak volna, mégis stabilan tartották a kettest. Időnként még hármast is elértek. Ezeket a gyerekeket rendszeresen megdicsérte. Nem adott nekik ötöst. Arról szó sem lehetett. Azonban aki lelkiismeretesen dolgozott, és egy kicsit előrébb lépett, azzal éreztette, hogy ezt az erőfeszítést elismeri. ”

Egy Rábai-tanítvány, ma a matematikai tudományok doktora
(Forrás: Természet Világa, 2012. június)

Rábai Imre 1926. július 9-én született Mezőkovácsházán. Gimnáziumi tanulmányait Szegeden végezte. 1944 júniusában munkaszolgálatra vitték, majd októberben erőltetett menetben Wiener Neustadtba terelték. Innen Dachauba, a koncentrációs táborba, majd a mühldorfi kényszermunkatáborba került. A tábor 1945 április 30-i felszabadulása után egy amerikai katonai kórházban lábadozott, csak ősszel tudott Szegedre visszatérni*. 1945 decemberében érettségizett.

1951-ben a Szegedi Pedagógiai Főiskolán matematika-fizika-kémia-szakos tanári diplomát, majd 1954-ben az ELTE levelező tagozatán gimnáziumi matematika szakos tanári diplomát szerzett. 1956-ig a szegedi főiskolán, majd a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében volt tanársegéd. 1956-tól 1958-ig a pécsi Janus Pannonius gimnáziumban, majd a budapesti Toldy Ferenc gimnáziumban tanított.

Rábai Imre nagyon hamar a matematikaoktatás országosan elismert egyénisége lett. Ennek köszönhette, hogy 1958-ban kinevezték a budapesti Fazekas Mihály gimnáziumba vezető tanárnak, ahol matematikatanárok módszertani továbbképzését végezte, és egy matematikaszakkört is elindított.

Az 1960-as évek elején az oktatási kormányzatban felmerült egy (szovjet mintára tervezett) speciális matematika tagozatos gimnáziumi osztály elindítása, amelyről a végső döntés 1962 augusztusában született meg. Az osztályt a Fazekas Mihály gimnáziumban indították, és az osztály matematikatanárának Rábai Imrét kérték fel. Rábai Imre eleget tett a felkérésnek, és ezzel óriási feladatot vállalt magára. Az osztály elindításában nemcsak az adminisztratív feladatokat és a gyerekek összegyűjtését végezte el, de a képzés teljes tanmenetét is ő dolgozta ki. A heti 10 órás,

*Erről bővebben ír ő maga itt: *Rábai Imre:* Törtrészek; `https://zachor.hu/cikkek/rabai-imre-tortreszek` (A Szerk.).

emelt szintű óraszám és a válogatott osztály igen gyors haladási üteme hatalmas tananyag és a hozzá tartozó feladatsorok összegyűjtését igényelte. De ezenfelül arra is volt gondja, hogy előadóként megnyerje a magyar matematika számos kiválóságát: meghívására Hajnal András, Péter Rózsa, Pólya György, Révész Pál, Varga Tamás tartottak iskolai órákat az osztálynak. Mély belátást és bölcsességet tükrözött az a döntése, hogy az osztályfőnöki tisztséget nem vállalta el, hanem a feladatra Komlós Gyulát, korábbi kollégáját kérte fel: „Elég voltam én nekik a megemelt óraszámú, választott szaktantárgyukból ... Ismertem Komlós erényeit, tudását, gyerekszerető emberségét. Komlós Gyula nagyon közel tudott kerülni a gyerekek lelkéhez, igazi csapattá kovácsolta az osztályát," mondta erről később. Rábai Imrének ez a választása döntő hatást gyakorolt sokak életére az osztály tagjai közül; e sorok írójának életére mindenképpen.

Ezekben az években Rábai Imre tanítványai szinte minden számottevő országos matematikai versenyt megnyertek, és kiemelkedő eredményességgel képviselték Magyarországot a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon is. (Volt olyan év, amikor a diákolimpiára kiküldött nyolctagú csapat öt tagja az osztályból került ki, és a csapat három másik tagja is a Fazekas Gimnázium alacsonyabb évfolyamú matematika tagozatos osztályába járt.)

Rábai Imrének ez az úttörő vállalkozása óriási hatást gyakorolt a hazai matematikaoktatásra. A Fazekas Gimnázium a 60-as évek óta a magyar matematikaoktatás fellegvára. Példáját számos gimnázium követte az országban, és így épült ki a matematikai tehetséggondozás országos rendszerének egyik pillére.

Rábai Imre 1965-ben és 1966-ban már csak félállásban dolgozott a Fazekas gimnáziumban (az osztályának megtartása mellett), és a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészkari Matematika Tanszék adjunktusa lett. Később a BME Tanárképző és Pedagógiai Intézetébe került, és innen ment nyugdíjba 1992-ben, de nyugdíjasként még 1999-ig dolgozott.

Rendszeresen publikált a matematika módszertanáról, és a témában számtalan előadást tartott. Ő indította el 1966-ban a TIT rendkívül népszerű és több évtizeden át működő egyetemi felvételire előkészítő matematika kurzusait. Hosszú pályafutása alatt nagyon sok könyvet, feladatgyűjteményt, a matematika különböző ágait gyakoroltató, az érettségire vagy egyetemi felvételire készülőket segítő példatárat és egyéb oktatási segédanyagot írt. Ezek nagy része sok kiadást ért meg, és a mai napig nagy népszerűségnek örvend.

Rábai tanár úr munkásságáért 1967-ben Beke Manó díjban, 1999-ben a Magyar Köztársasági Arany Érdemkereszt kitüntetésben részesült, 2001-ben a Bolyai János Matematikai Társulat örökös tagjává választották, 2003-ban elnyerte a Rátz Tanár Úr Életműdíjat, 2013-ban pedig az Apáczai Csere János-díjat. Halálával a magyar matematikatanítás egy legendás alakja távozott körünkből.

Laczkovich Miklós

1981 és 2004 között minden évben több felvételire előkészítő feladatsort küldött, illetve inkább hozott be személyesen a KöMaL szerkesztőségébe, hogy el is magyarázhassa, miért éppen ezt vagy azt a feladatot tűzte ki, és miért épp azt a megoldást választotta, amit leírt. Mindezt huncut mosollyal a szemében, örömmel, hogy van, akinek elmondhatja, és ha megjelenik a lapban, mennyien tudnak majd tanulni belőle. Az utolsó években minden feladatsort valakinek az emlékére ajánlott, nekem mindig elmesélte, ki is volt az. Amikor a lapban másoktól is közöltünk felvételi feladatsorokat, morgolódott: ezek nem olyanok, mint az övé … Az utolsó alkalommal azt mondta, ő már régóta nem tanít, azóta változhattak a dolgok, jöjjenek a fiatalabb kollégák. Persze tudom, hogy meg volt győződve arról, hogy ő jobb feladatokat tudna kitalálni.

Nagyon büszke volt az első matektagozatos osztályára, tulajdonképpen annak minden tagjára, külön-külön is. És a tanítványai is büszkék voltak rá, szerették. Akárkinek a visszaemlékezését olvastam vagy láttam videón ebből a híres osztályból, Rábai tanár urat, később kollégaként Imrét szinte piedesztálra emelték.

Gondosan válogatott újabb és újabb feladatsorait biztosan sok tanár őrzi és használja, hiszen csaknem haláláig a Bolyai János Matematikai Társulat Vándorgyűlésein, illetve képzéseken, konferenciákon, ahova csak meghívták, előadást tartott belőlük. Örök fiatalként halt meg.

Oláh Vera

Térbe kilépő bizonyítások III.

Hatványvonalak és hatványsíkok

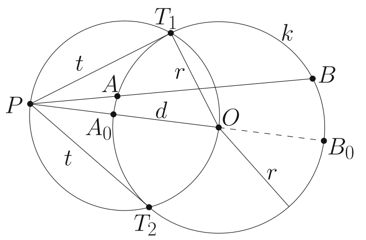
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A harmadik részben körök hatványvonalaival és gömbök hatványsíkjaival fogunk játszani. Legyen a k egy körvonal, a középpontja O, sugara r, és P tetszőleges pont a síkon, az O-tól d távolságra. Húzzunk P-n keresztül egy e egyenest, ami elmetszi k-t az A és B pontokban; a *szelőtétel* szerint a $PA \cdot PB$ előjeles szorzat nem függ az e választásától. Ezt a számot hívjuk a P pontnak a k körre vonatkozó *hatványának.*

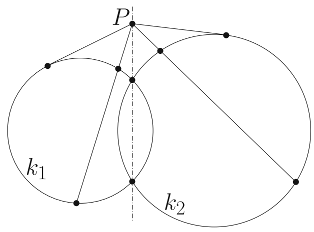
Az *1. ábrán* az O-n átmenő szelőről leolvashatjuk, hogy a hatvány értéke $PA_0 \cdot PB_0 = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$. Ha P a körön kívül van, akkor a szelő két határhelyzete a két P-ből húzott érintő, ezért ha az érintő szakaszok hossza $PT_1 = PT_2 = t$, akkor a OPT_1 és OPT_2 derékszögű háromszögekből is megkaphatjuk, hogy a hatvány értéke $t^2 = d^2 - r^2$.

Ha nem egy, hanem két körünk van, k_1 és k_2, és a középpontjuk különböző, akkor azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, egy egyenes; ezt az egyenest hívjuk k_1 és k_2 *hatványvonalának.* A hatványvonal merőleges a két kör centrálisára[1].

[1]centrális: a középpontokat összekötő egyenes



1. ábra



2. ábra

Térben, ha $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két gömb a térben, és a középpontjuk különböző, akkor azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeknek a két gömbre vonatkozó hatványa egyenlő, egy sík; ezt a síkot hívjuk $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ hatványsíkjának.

Azt, hogy két kör hatványvonala egyenes, az iskolában koordinátákkal vagy vektorokkal szoktuk levezetni; felírjuk az (x, y) pont hatványait a két körre, és vesszük a kettő különbségét. A különbség egy kétváltozós lineáris függvény, tehát egy egyenes egyenlete.

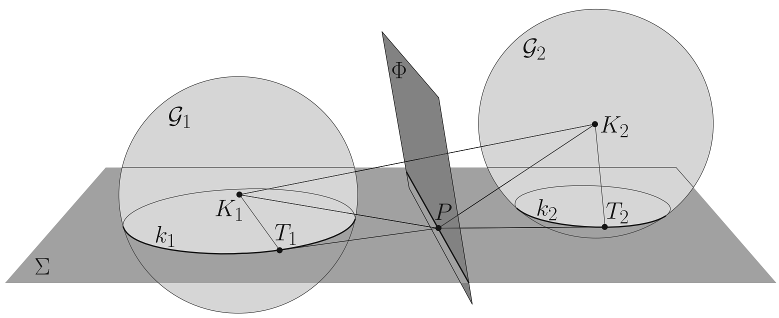
Miért egyenes a hatványvonal?

Az iskolai levezetésből tudjuk, hogy a hatványvonal egyenes, csak az nem teljesen világos, hogy *miért.* Lássunk egy másik bizonyítást, amelyből közvetlenül derül ki, hogy a kérdéses pontok tényleg egy egyenesen vannak.

Vegyük fel a k_1 és k_2 köröket a Σ síkban, és nevezzünk egy $P \in \Sigma$ pontot *érdekesnek,* ha a P-ből k_1-hez és k_2-höz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak. (A definícióból sajnos kimaradnak a körökön belüli pontok; a bizonyításunk csak a kívül elhelyezkedő pontokra fog működni.) Konstruálunk egy egyenest, ami átmegy az összes érdekes ponton.

Illesszünk a két körvonalra egy-egy gömbfelületet, amelyek sugara ugyanakkora; a gömbök legyenek $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$, középpontjuk K_1, illetve K_2. A gömböket úgy válasszuk, hogy K_1 és K_2 a Σ síknak ugyanazon az oldalán legyenek.

Tekintsünk tetszőlegesen egy érdekes P pontot a Σ síkban, és húzzunk P-ből egy-egy érintőt a két körhöz; a két érintési pont legyen T_1, illetve T_2. A PT_1 és PT_2 egyenesek nem csak a két kört, hanem a két gömböt is érintik (*3. ábra*).



3. ábra

A PK_1T_1 háromszög egybevágó a PK_2T_2 háromszöggel, mert $K_1T_1 = K_2T_2$ a két gömb közös sugara, $PT_1 = PT_2$ az érdekes P pontból a körökhöz húzott érintő szakaszok, és $PT_1K_1\sphericalangle = PT_2K_2\sphericalangle = 90°$, mert a gömböt érintő szakaszok merőlegesek az érintési pontból húzott sugarakra. Ezért a háromszögek átfogói is egyenlők, $PK_1 = PK_2$; ez viszont azt jelenti, hogy a P pont a K_1K_2 szakasz felező merőleges síkjában van.

Jelöljük a K_1K_2 szakasz felező merőleges síkját Φ-vel. A K_1 és K_2 pont választása miatt Σ nem lehet azonos Φ-vel, például mert Φ felezi, míg Σ nem is metszi a K_1K_2 szakaszt.

Az érdekes pontok nem csak a Σ-nak, hanem a Φ síknak is pontjai. Ez a két sík különböző, tehát a közös részük vagy üres, vagy egy egyenes. Az érdekes pontok tehát, ha egyáltalán léteznek, a két sík metszésvonalán vannak.

Érdemes meggondolni, hogy a két sík mikor lehetne párhuzamos. A Φ sík merőleges a K_1K_2 szakaszra, ezért a két sík párhuzamosságának feltétele, hogy a K_1K_2 szakasz is merőleges legyen Σ-ra. Ebben az esetben a két középpont, K_1 és K_2 vetülete Σ-n egybeesne, vagyis k_1 és k_2 koncentrikus[2] lenne.

Hatványvonalak nemeuklideszi geometriákban

Az előbbi bizonyítást többféle irányban is lehetséges kiterjeszteni, általánosítani. Az első, kézenfekvő irány a dimenzió növelése. Térben, két gömb hatványsíkja mindig sík, és ezt úgy igazolhatjuk, hogy a gömbfelületekre azonos sugarú, 4-dimenziós gömböket illesztünk. Ezt ugyan nem tudjuk elképzelni és lerajzolni, de minden más lépés gond nélkül működik.

Van egy másik irány, ami talán nem annyira nyilvánvaló. A bizonyításunkban csak háromszögek egybevágóságát és szimmetriát (szakaszfelező merőleges síkot) használtunk; nem volt szükségünk párhuzamosságra és hasonlóságra. Ezért a bizonyítás olyan geometriai struktúrákban is elmondható, ahol nincs párhuzamosság és hasonlóság.

A *gömbi geometriában,* az eddigi sík helyett, a pontok egy egységsugarú gömbfelület pontjai, az egyenesek helyét a gömb főkörei veszik át. Két pont távolsága a pontokat összekötő (rövidebb) főkörív hossza. A gömbfelületen is bármelyik két körvonalhoz definiálhatjuk az „érdekes" pontokat.

Ugyanaz az okoskodás a gömbön is működik, persze a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömböket egy 1-gyel magasabb dimenziójú gömbi geometriában kell elhelyeznünk; a bizonyítás végén azok a pontok, amelyek egyenlő távol vannak a K_1 és K_2 pontoktól, egy 2-dimenziós gömbfelületen vannak, és a két gömbfelület metszete egy főkör. Megint csak a személyes korlátainkkal kell megküzdenünk, amikor az elrendezést megpróbáljuk elképzelni vagy lerajzolni.

A *hiperbolikus geometriák* létezését egymástól függetlenül Bolyai János[3] és Nyikolaj Lobacsevszkij[4] bizonyította be, ők publikáltak először olyan geometriai

[2]koncentrikus: a középpontjaik egybeesnek

[3]Bolyai János magyar matematikus, 1802–1860

[4]Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus, 1792–1856

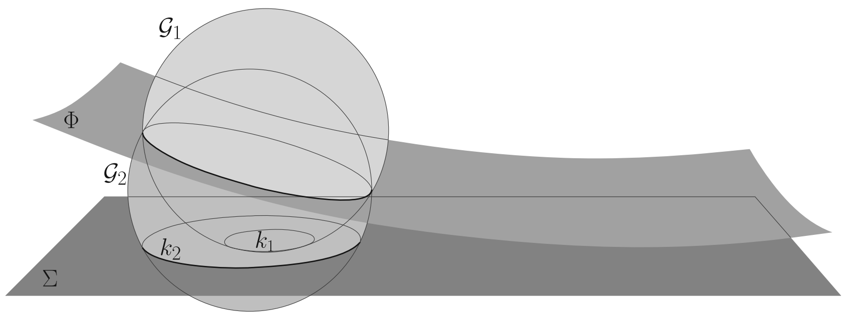
rendszereket, amelyekben a szokásos euklideszi axiómák teljesülnek, kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett az igaz, hogy bármely egyeneshez bármely rajta kívül fekvő pontból végtelen sok párhuzamost lehet húzni. (A nemeuklideszi geometriák kutatásában Gaussnak[5] is voltak publikálatlan eredményei.)

A Pitagorasz- és a szelőtételnek is léteznek megfelelői a gömbi és hiperbolikus geometriákban, ezért pont körre vagy gömbre vonatkozó hatványát is lehet képletekkel definiálni. Sajnos a Pitagorasz- és a szelőtételek nemeuklideszi alakja kicsit különbözik, és különböző hatványfogalmakat tennének logikussá.

Az alábbi táblázatban összegyűjtöttem a Pitagorasz-tétel, pont körre vonatkozó hatványa és a szelőtétel gömbön és a hiperbolikus geometriákban érvényes megfelelőit. A k rögzített pozitív szám a hiperbolikus geometria *paramétere* (egyfajta skálázás), r a kör sugara, d a pontnak a középponttól való távolsága, x_1, x_2 és t két egyirányú szelődarab, illetve a körhöz húzott érintő szakasz hossza. A ch és th a hiperbolikus koszinusz-, illetve tangensfüggvény: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

	Pitagorasz-tétel	Hatvány def.	szelőtétel (alternatív def.)
euklideszi	$t^2+r^2=d^2$	d^2-r^2	$x_1\cdot x_2=(d+r)(d-r)$
gömbi	$\cos t\cos r=\cos d$	$\dfrac{\cos d}{\cos r}$	$\tan\dfrac{x_1}{2}\cdot\tan\dfrac{x_2}{2}=\tan\dfrac{d+r}{2}\tan\dfrac{d-r}{2}$
hip.	$\operatorname{ch}\dfrac{t}{k}\operatorname{ch}\dfrac{r}{k}=\operatorname{ch}\dfrac{d}{k}$	$\dfrac{\operatorname{ch}\frac{d}{k}}{\operatorname{ch}\frac{r}{k}}$	$\operatorname{th}\dfrac{x_1}{2k}\cdot\operatorname{th}\dfrac{x_2}{2k}=\operatorname{th}\dfrac{d+r}{2k}\operatorname{th}\dfrac{d-r}{2k}$

Ezekből a képletekből le lehet vezetni, hogy a hatványvonal egyenes, illetve főkör, de az előbb látott térbe kilépés is működik: ugyanúgy definiálhatjuk az érdekes pontokat, és elismételhetjük a bizonyítást. A hiperbolikus eset végén egyetlen furcsa közjáték történhet: a Σ és a Φ síkok úgy is lehetnek párhuzamosak, hogy a k_1 és k_2 körök középpontja különböző; a hatványvonal ilyenkor nem jön létre (*4. ábra*).



4. ábra

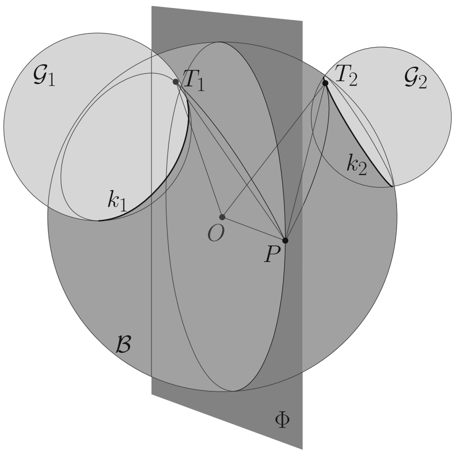
[5]Carl Friedrich Gauss német matematikus, 1777–1855

Alternatív bizonyítás a gömbön: a békaszem-módszer

A gömbi esetben a nehézségeinket az okozta, hogy plusz egy dimenziót már felhasználtunk a gömbfelület elhelyezéséhez, és a háromdimenziós gömbi geometriát már csak a négydimenziós euklideszi térbe tudnánk beágyazni. Most mutatok egy olyan bizonyítást, amikor a kétdimenziós gömbfelületből a háromdimenziós euklideszi térbe lépünk ki, így nem lesz szükségünk még egy dimenzióra. Az euklideszi tételeink közül fel fogjuk használni, hogy két különböző középpontú gömb hatványsíkja egy síkfelület.

Legyen $\mathcal{B}$ egy O középpontú gömbfelület, és rajta k_1 és k_2 két különböző, főkörnél kisebb körvonal. Nevezzük $\mathcal{B}$ egy P pontját érdekesnek, ha P-ből a két körvonalhoz egyenlő hosszúságú érintő főköríveket lehet húzni. Azt szeretnénk igazolni, hogy az érdekes pontok a $\mathcal{B}$ gömb valamelyik főkörén vannak.

Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ az a két gömb, amely k_1, illetve k_2 mentén merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t. (A $\mathcal{B}$ gömb a béka teste, $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ a két szemgolyója.)



5. ábra

Tekintsünk egy tetszőleges érdekes P pontot a $\mathcal{B}$ felületen, és legyen T_1 és T_2 egy-egy olyan pont a két körvonalon, amelyre a PT_1 és PT_2 főkörívek érintik k_1-t, illetve k_2-t (*5. ábra*).

A $\mathcal{G}_1$ gömb merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t, ezért $\mathcal{G}_1$-et érinti a $\mathcal{B}$ gömb OT_1 sugara; ezen kívül a PT_1 főkör is érinti. Ezért $\mathcal{G}_1$-et érinti az OPT_1 sík és vele együtt a PT_1 szakasz is. Hasonlóan láthatjuk, hogy a PT_2 szakasz érinti a $\mathcal{G}_2$ gömböt. A feltevésünk szerint P egy érdekes pont, vagyis a PT_1 és PT_2 ívek egyforma hosszúak; ebből következik, hogy a PT_1 és PT_2 szakaszok is egyforma hosszúak. Tehát a P pontból egyforma hosszú érintőt lehet húzni a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbökhöz. Ezért a P pont benne van a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök hatványsíkjában. Jelöljük ezt a síkot Φ-vel.

Vegyük észre, hogy az O pontból a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbökhöz húzott OT_1 és OT_2 érintők is egyforma hosszúak, mert a $\mathcal{B}$ sugarai. Tehát O is a Φ síkban van. Az összes érdekes pont a $\mathcal{B}$ gömbfelület és a középpontján átmenő Φ sík közös részében van, ami egy főkör.

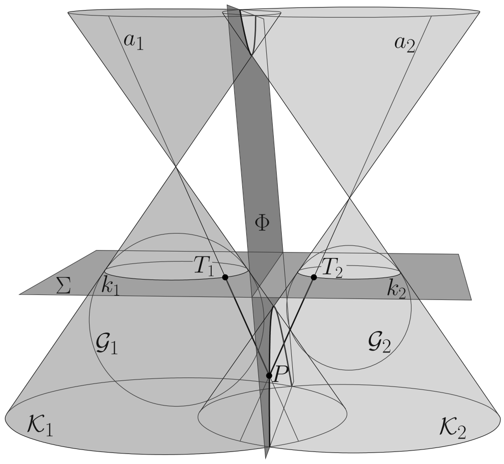
Azonos meredekségű kúpok metszete

Gömbök hatványsíkjainak egy alkalmazása a következő, jól ismert tétel.

Tétel. *Ha két egyenes körkúppalást tengelye párhuzamos, és a nyílásszögük ugyanakkora, akkor a két kúp közös pontjai egy síkban vannak.*

(Ezt a tételt is könnyű lenne koordinátákkal bizonyítani, lásd a 3. feladatot).

Jelöljük két kúpot $\mathcal{K}_1$-gyel és $\mathcal{K}_2$-vel, és metsszük el a kúpokat egy, a tengelyekre merőleges Σ síkkal; a két metszetkör legyen k_1 és k_2. Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ az a két gömb, amely k_1, illetve k_2 mentén érinti a két kúppalástot (*6. ábra*).



6. ábra

Tekintsük a két kúpnak egy közös P pontját. Ezen átmegy a kúpoknak egy-egy alkotója; legyenek ezek a_1 és a_2. A k_1 kör és az a_1 egyenes metszéspontja legyen T_1, a k_2 és a_2 metszéspontja T_2. Az alkotók érintik a beírt gömböket, tehát PT_1 a T_1 pontban érinti $\mathcal{G}_1$-et, és PT_2 a T_2 pontban érinti $\mathcal{G}_2$-t.

Mivel a két kúp nyílásszöge ugyanakkora, a PT_1 és PT_2 szakaszok ugyanakkora szöget zárnak be a Σ síkkal. Ezért $PT_1 = PT_2$. A P pontból tehát ugyanolyan hosszú érintőt lehet húzni a két gömbhöz, így P a két gömb Φ hatványsíkjában van.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ közös pontjai mind a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök hatványsíkjában vannak.

Vegyük észre, hogy nem is használtuk a kúpok csúcsait; a bizonyítás változtatás nélkül működik egyköpenyű forgáshiperboloidokra[6], ha a tengelyeik párhuzamosak, és az alkotóik ugyanakkora szöget zárnak be a tengelyekkel.

Ezt az állítást és a bizonyítást is át lehet vinni nemeuklideszi geometriákba. A párhuzamos tengelyek helyett azt kötjük ki, hogy van egy olyan Σ sík, amely merőlegesen elmetszi mindkét kúp tengelyét, az egyenlő nyílásszög helyett azt írjuk elő, hogy a két kúp alkotói ugyanakkora szögben döfjék Σ-t.

A gömbi változatban ismét csak a képzeletünk határaiba ütközünk: Hogy képzeljünk el egy gömbi kúppalástot? A hiperbolikus esetben az okozhat nehézséget, hogy a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök nem mindig léteznek. Ezen úgy segíthetünk, ha a göm-

[6]forgásfelület, amit úgy kaphatunk, hogy egy egyenest (a hiperboloid alkotóját) körbeforgatunk egy tőle kitérő tengely körül

bök helyett más, állandó görbületű, de nem összezáródó felületeket, úgynevezett *horoszférákat* és *hiperszférákat* is használunk. A hiperbolikus változat továbbgondolásához további tanulásra is szükségünk van.

Ajánlott irodalom

[1] Gömbi trigonometriáról Obádovics Gyula: Matematika c. klasszikus zsebkönyvét (5.3.12–5.15. részek) ajánlom.

[2] Reiman István: A geometria és határterületei c. könyve utolsó fejezetében szerepel a hiberbolikus geometria egy, a Beltrami–Cayley–Klein-féle modellre épülő felépítése.

[3] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai c. könyvében a 16. fejezet szól a hiperbolikus geometriákról. Itt egy rövid rész szerepel horo- és hiperciklusokról és a horoszféra geometriájáról.

Feladatok

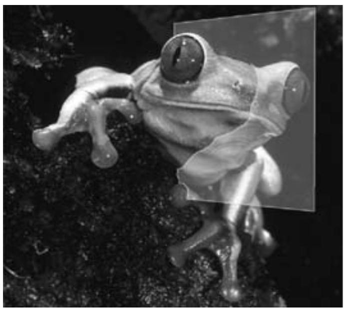
1. Módosítsuk a békaszem-módszert; vizsgáljuk a szemgolyók helyett a két körvonal síkjait.

2. Módosítsuk a békaszem-módszert úgy, hogy a szemgolyók a körökre illeszkedő, az O ponton átmenő gömbök legyenek.

3. Legyenek $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ egymástól különböző körkúp vagy egyköpenyű forgáshiperboloid-felületek a térbeli derékszögű koordinátarendszerben úgy, a tengelyük párhuzamos a z-tengellyel, és a két felület alkotói ugyanakkora szögben döfik az xy koordinátasíkot. Igazoljuk, hogy két felület egyenletének különbsége lineáris függvény.

4. Bizonyítsuk be a gömbi szelőtételt.

Sose feledjük:



Ha békával találkozunk, vizsgáljuk meg a szemgolyói hatványsíkját!

Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 4? (*7 pont*)

b) Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható 60-nal? (*5 pont*)

2. *a*) Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a 6 kékszemű tanuló átlaga pontosan 3, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan 4 lett. A 21 fiú átlaga pontosan 3,5, a lányok átlaga pontosan 4,5 lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban. (*5 pont*)

b) Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A buszköltséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség 175 Ft-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség további 225 Ft-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (*8 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}.$$ (*6 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x\right| = \frac{1}{2}.$$ (*7 pont*)

4. *a*) Az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x) = (x-c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1;10)$ és az $M_2(4;-5)$ pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a, b, c és d értékét. (*7 pont*)

b) Határozzuk meg az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x+3)^2 - 6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. (*6 pont*)

II. rész

5. Egy felmérésben azt vizsgálták, az autósok hogyan viszonyulnak a téli gumiabroncsok használatához. A felmérésben 1800 autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumiabroncsokat, 1320-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumiabroncsot, 40%-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.

a) Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon. (*6 pont*)

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumiabroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km-t tett meg, addig a műszerfal 101,2 km megtett utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője 632 mm volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.

b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (*5 pont*)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozaton vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége 1,6 mm alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén 1/15 annak a valószínűsége, hogy a kopás 1,6 mm alá csökkent.)

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább 5 olyan autót találnak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket. (*5 pont*)

6. A valós számokon értelmezett $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + bx + c$ függvénynek lokális maximuma van $x = -2$-nél.

a) Igazoljuk, hogy ekkor $b = -12$. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f-nek három különböző zérushelye van. (*7 pont*)

c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c = 0$. (*4 pont*)

7. A kanaszta nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában 55 lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében 13-13 lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezeken a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés" lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. (*4 pont*)

Egy szerencsejátékban 4 Király és 4 Ász közül visszatevés nélkül húz lapokat a játékos a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt k darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye $100k^2$ forint.

c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. (*7 pont*)

8. Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB, beírt körének középpontja O_1, a beírt kör sugara 9 cm. A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2, sugara pedig 4 cm.

a) Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát. (*5 pont*)

b) Igazoljuk, hogy $O_2C = 10{,}4$ cm. (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a háromszög területét. (*7 pont*)

9. Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H. Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot. (*6 pont*)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordinátarendszerben $A(0;0)$ és $B(10;0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknegyedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét. (*4 pont*)

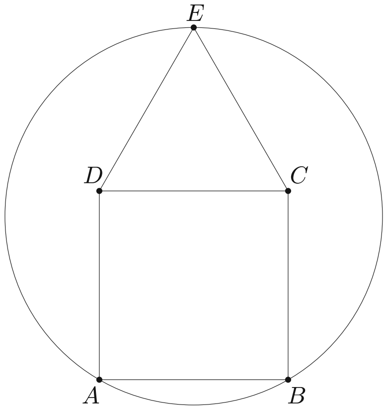
c) Igazoljuk, hogy a $P(17;17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja. (*6 pont*)

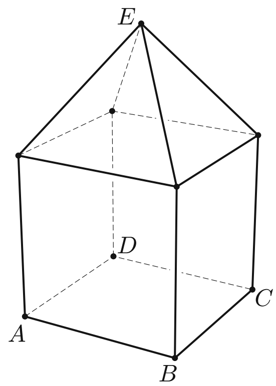
Koncz Levente
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

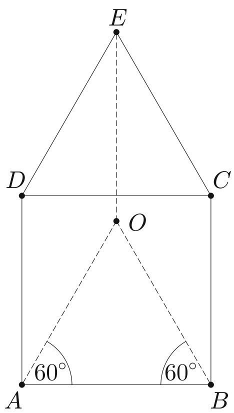
1. *a*) *A* bal oldali ábrán *egy* 1 cm *oldalhosszú négyzet és rajta egy* 1 cm *oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmegy az A, B, E pontokon?* (*5 pont*)

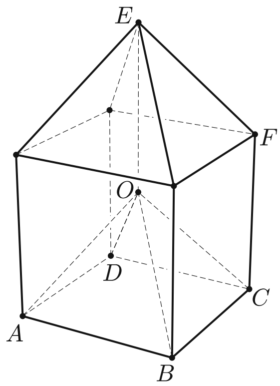




b) *A* jobb oldali ábrán *egy* 1 cm *élhosszú kocka és rajta egy olyan* 1 cm *élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmegy az A, B, C, D, E pontokon?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Toljuk el DCE szabályos háromszögünket a $\overrightarrow{CB}$ vektorral. A háromszög képe az eltolás után az ABO szabályos háromszög ($A = D'$, $B = C'$, $O = E'$) lesz; emiatt $OA = OB = 1$. Másfelől mivel $O = E'$ ezért $OE = 1$; azaz O pont az A, B, E köréírt körének a középpontja, és a kör sugara 1 cm.





b) Voltaképpen ugyanazt csináljuk, mint két dimenzióban. Jelöljük a kocka C „fölötti" csúcsát F-fel, és toljuk el a térben a szabályos gúlánkat az $\overrightarrow{FC}$ vektorral. Ekkor a gúla képe az eltolás után az $ABCDO$ szabályos gúla lesz (ahol $O=E'$ az E pont eltolt képe). Mivel $ABCDO$ a megfelelő szabályos gúla képe, ezért $AO=BO=CO=DO=1$, míg $O=E'$ miatt $EO=1$, azaz az O pont egyenlő távolságra van A, B, C, D, E pontoktól, vagyis ezen pontok köréírható gömbjének a középpontja, és a gömb sugara 1 cm.

Megjegyzés. A feladat megoldható számolással is, de mi nem ezt az utat követtük.

2. *Egy* 2019 *mezőből álló játéktáblánk van a következő* ábra *szerint:*

1	2	3	4	5	1	2	...

(*Az* $1,2,3,4,5$ *számok vannak rajta ciklikusan, összesen* 2019 *hosszan.*) *Az* 1*-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.*

a) *Összesen hányra lépünk rá a mezők közül?* (*4 pont*)

b) *Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá?* (*3 pont*)

c) *A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az* 1 *és* 5 *közötti d szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első d; míg ha a dobás hatos, akkor az első* 1*-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező közül várhatóan hány mezőt látogatunk meg?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Megvizsgálva az első pár lépést azt kapjuk, hogy az első tizenegy mező közül rendre az $1\Rightarrow 2\Rightarrow 4\Rightarrow 3$ (ez már a második 3-as) $\Rightarrow 1$ (ez már a harmadik 1-es) lépünk. Mivel innen ciklikusan ismétlődnek a mezők, tíz egymás utáni mezőből pontosan 4-re lépünk rá. $2019=201\cdot 10+9$, azaz lesz 201 darab teljes ciklusunk, valamint további 9 mezőnk. Az utolsó 9 mező közül 4-re lépünk rá, így összesen $201\cdot 4+4=808$ mezőre lépünk rá.

b) Egy teljes ciklusban a meg nem látogatott mezők összege: $3+5+1+2+4+5=20$, míg az utolsó 9 mező közül (hiányzik egy 5-ös a teljes ciklushoz) a meg nem látogatottak összege csak 15. Azaz azon mezők összege, amire nem lépünk rá: $201\cdot 20+15=4035$.

c) A módosított szabályok szerint $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ eséllyel az első 1-es mezőröl indulok, míg az első 2-es, ..., 5-ös mezőről indulás esélye $\frac{1}{6}$. Az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es mezőről indulva rendre ugyanazt az $1,2,4,3$ ciklust kapjuk, csak az elején, illetve a végén különböznek. Ez alapján $1,2,3,4$-gyel kezdve az első 100 mező közül rendre 40, 39, 40, 38 mezőre lépünk rá; míg az első 5-ösből indulva pontosan az 5-ösöket látogatjuk meg, így összesen 20 darab mezőt. Innen a meglátogatott mezők várható száma:

$$\frac{2\cdot 40+39+40+38+20}{6}=\frac{217}{6}\approx 36{,}17.$$

3. *Piszkos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy* 100 *literes hordóban tiszta alkoholt visz magával. Fred a hordóból minden éjfélkor megiszik* 5 *liter löttyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykerekét eltekeri* 30°*-kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlnak. Ha a hordó alkoholtartalma* 50% *alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.*

a) Az indulás után hanyadik éjfélkor józanodik ki Fred? (*4 pont*)

Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 *óra* 59*-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan* 10 000 *kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó* 8 *csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője* 6 *csomóval. (*1 *csomó sebesség megegyezik* $1{,}85\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$*-val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjfélén balra tekeri* 30°*-kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Piszkos Fred továbbá minden éjfélkor képes a hajó aktuális sebességét* 10%*-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).*

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást? (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat szövege alapján az indulás időpontjában $a_0 = 1$ (azaz 100%) a hordó alkoholtartalma. Mivel minden újabb időpontban elfogy 5 liter lötty, amit 5 liter 0%-os alkoholtartalmú vízzel pótoltak, így n nap múlva a hordó alkoholtartalma: $a_n = 0{,}95^n$. A kapitány akkor józanodik ki, ha $a_n < 0{,}5$ lesz. A megfelelő egyenletet megoldva: $0{,}95^n = 0{,}5 \Rightarrow n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$; mivel a $0{,}95^x$ függvény szigorúan monoton csökken ez azt jelenti, hogy $a_{13} > 0{,}5$, de $a_{14} < 0{,}5$, azaz Fred pontosan az indulás után két héttel józanodik ki.

b) Először számoljuk ki, hogy az egyenletes sebességgel pontosan a cél irányába mozgó Watson mennyi idő alatt éri el a Rejtő-fokot.

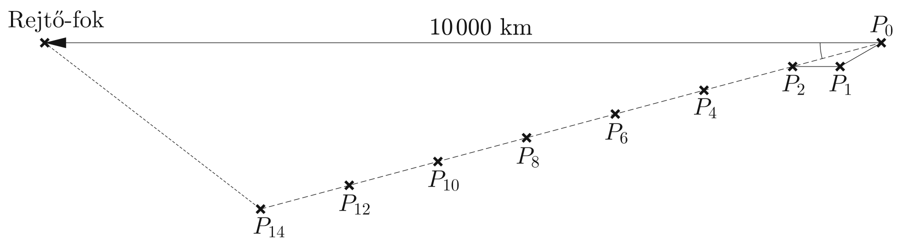
$$v_w = 8 \cdot 1{,}85\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 14{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \Rightarrow t_w = \frac{10\,000\ \mathrm{km}}{14{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 675{,}68\ \mathrm{h} \approx 28\ \text{nap és}\ 3{,}68\ \mathrm{h}$$

alatt ér célba.

Most lássuk mit csinált eközben Fred. Fred sebessége kezdetben

$$v_F = 6 \cdot 1{,}85\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 11{,}1 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \Rightarrow s = 11{,}1 \cdot 24 = 266{,}4\ \text{km-t}$$

tesz meg 1 nap alatt Piszkos Fred. Használjuk a következő *ábra* jelöléseit.



Jelölje $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{14}$ Fred hajójának a pozícióját rendre a startnál, illetve $1, 2, \ldots$ és 14 nap múlva. Mivel a párosadik napokon balra, a páratlanadik napokon jobbra fordítja el a kormányt Fred, ezért minden második nap pontosan nyugat felé halad a hajó, illetve két ilyen napot „összevonva” egy olyan rombusz két szomszédos oldalán halad végig Fred teknője, amelynek oldalai 266,4 km hosszúak és az általuk bezárt szög 150°. Innen két másodszomszédos éjféli időpont pozíciója között (pl. P_0 és P_2, vagy P_{12} és P_{14} között) a távolság számítható koszinusz-tétellel:

$$P_0P_2^2 = 266{,}4^2 + 266{,}4^2 - 2\cdot 266{,}4\cdot 266{,}4\cdot\cos 150^\circ \approx 264\,859{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0P_2 \approx 514{,}645 \text{ km.}$$

Azaz két hét alatt Fred a starttól $514{,}645\cdot 7 = 3602{,}515$ km-re került és pontosan 15°-kal tért el a nyugati iránytól.

Számítsuk ki egy újabb koszinusz tétellel, mennyi út van még hátra (a pontos irányt hagyjuk meg a Kapitánynak). A hátralévő útra:

$$s_F^2 = 10\,000^2 + 3602{,}515^2 - 2\cdot 10\,000\cdot 3602{,}515\cdot\cos 15^\circ \approx 43\,382\,869 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_F \approx 6586{,}567 \text{ km}$$

út van még hátra két hét után.

Lássuk, mennyi idő alatt teszi meg a józan Fred ezt az utat. Jelöljük b_n-nel a két hét utáni n-edik napon Fred hajója által megtett utat (kilométerben). Ekkor $b_n = 266{,}4\cdot 1{,}1^{n-1}$. Az első n nap során ekkor

$$s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 266{,}4\cdot\frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1} = 2664(1{,}1^n - 1) = 2664\cdot 1{,}1^n - 2664 \text{ km-t}$$

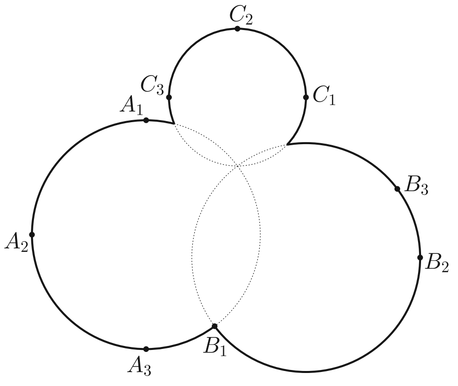
tesz meg. Azt keressük, hogy mikor lesz $s_n = 6586{,}567$.

$$s_n = 2664\cdot 1{,}1^n - 2664 = 6586{,}567 \Rightarrow 2664\cdot 1{,}1^n = 9250{,}567 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}1^n = \frac{9250{,}567}{2664} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{9250{,}567}{2664}\right)}{\ln 1{,}1} \approx 13{,}061.$$

Mivel az $1{,}1^x$ függvény szigorúan monoton növő, ezért ez azt jelenti, hogy (kijózanodása után) 13 nap alatt még nem ér célba Fred, de a 14-dik, vagyis összességében a 28-dik napon már eléri a Rejtő-fokot.

Azaz Piszkos Fred nyeri a fogadást (és így a hordó rumot), hiszen körülbelül egy nappal korábban ér a célba, mint Watson.



4. *Az ábra egy park térképét ábrázolja. A parkot három körvonal határolja; a körök rendre az $A_1(-2;3)$, $A_2(-7;-2)$, $A_3(-2;-7)$, illetve a $B_1(1;-6)$, $B_2(10;-3)$, $B_3(9;0)$, valamint a $C_1(5;4)$, $C_2(2;7)$, $C_3(-1;4)$ pontok által meghatározott körök köréírt körei.*

a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek. *(4 pont)*

b) Igazoljuk, hogy az A_3, B_1, B_2, valamint a B_3, C_1, C_2, illetve a C_3, A_1, A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek. *(3 pont)*

c) A park építésze egy „különleges" helyre kutat szeretne fúratni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont? *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Az ábra alapján úgy tűnik, hogy a háromszögek olyan háromszögek, ahol a 2-es indexű csúcs szöge derékszög, míg a másik két csúcsot összekötő átfogó egyben a kör átmérője is. Ezt fogjuk igazolni.

Az A_1, A_3 pontok távolsága 10, az O_A felezőpontjuk koordinátái: $O_A(-2;-2)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van A_2-től, azaz ez a háromszög egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 5.

Hasonlóan a C_1, C_3 pontok távolsága 6, az O_C felezőpontjuk koordinátái: $O_C(2;4)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 3 távolságra van C_2-től, azaz ez a háromszög is egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 3.

Míg a B_1, B_3 pontok távolsága Pitagorasz tételével: $\sqrt{8^2+6^2}=10$, az O_B felezőpontjuk koordinátái: $O_B(5;-3)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van B_2-től, azaz ez a háromszög is derékszögű háromszög (de nem egyenlőszárú), és a köréírt kör sugara 5.

b) Azt fogjuk használni, hogy ha a P, Q, R pontokra igaz az, hogy $\overrightarrow{PQ}=c\cdot\overrightarrow{PR}$ valamely c valós számra, akkor a három pont egy egyenesre esik.

Az A_3, B_1, B_2 pontokra: $\overrightarrow{A_3B_1}=(3;1)$, míg $\overrightarrow{A_3B_2}=(12;4)=4\cdot\overrightarrow{A_3B_1}$, azaz A_3, B_1, B_2 valóban egy egyenesre esnek.

A B_3, C_1, C_2 pontokra: $\overrightarrow{B_3C_1}=(-4;4)$, míg $\overrightarrow{B_3C_2}=(-7;7)=\frac{7}{4}\cdot\overrightarrow{B_3C_1}$, azaz a B_3, C_1, C_2 pontok is egy egyenesre esnek.

A C_3, A_1, A_2 pontokra: $\overrightarrow{C_3A_1}=(-1;-1)$, míg $\overrightarrow{C_3A_2}=(-6;-6)=6\cdot\overrightarrow{C_3A_1}$, azaz a C_3, A_1, A_2 pontok is egy egyenesre esnek.

c) Az *a)* pont alapján a körök egyenletei rendre: $k_A:\ (x+2)^2+(y+2)^2=25$; $k_B:\ (x-5)^2+(y+3)^2=25$; $k_C:\ (x-2)^2+(y-4)^2=9$.

Számítsuk ki k_A és k_B metszéspontjait. Ezekre a metszéspontokra igaz:

$$(x+2)^2+(y+2)^2=(x-5)^2+(y+3)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2+4y+4=x^2-10x+25+y^2+6y+9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x-26=2y \Rightarrow y=7x-13.$$

Ezt a (hatványvonal) egyenletet visszahelyettesítve mondjuk k_A egyenletébe kapjuk:

$$(x+2)^2+(7x-11)^2=25 \Rightarrow x^2+4x+4+49x^2-154x+121-25=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50x^2-150x+100=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0.$$

Innen a k_A és k_B körök metszéspontjai: $(1;-6)$ és $(2;1)$.

Ha ezek közül bármelyik rajta van a harmadik körön, akkor készen vagyunk. Vizsgáljuk meg, hogy a $(2;1)$ pont koordinátái teljesítik-e a harmadik köregyenletet. $(2-2)^2+(1-4)^2=0^2+(-3)^2=9$, azaz ez a metszéspont rajta van a k_C körön is (a másik metszéspont nincs rajta).

Ezzel megvagyunk, a három kör valóban egy közös pontban, a $(2;1)$ pontban metszi egymást.

II. rész

5. *a) Adjuk meg a* $h(x)=\cos 2x-\sin 2x+2\sin^2 x+1$ *függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény?* (*6 pont*)

b) Legyen $f(x)=x^2-2x+2$, *míg a* $g_n(x)$ *a következőképpen definiált függvény-sorozat:*

$$g_1(x)=f(x); \quad g_n(x)=f\big(g_{n-1}(x)\big) \text{ (ha } n\geqslant 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ *tizedesvessző utáni első* 100 *számjegyét.* (*10 pont*)

Megoldás. *a)* A duplaszögek addíciós képleteivel:

$$\begin{aligned} h(x)&=\cos 2x-\sin 2x+2\sin^2 x+1=\\ &=\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x+2\sin^2 x+1=\\ &=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+1=(\cos x-\sin x)^2+1. \end{aligned}$$

Mivel $(\cos x-\sin x)^2\geqslant 0$, ezért $h(x)\geqslant 1$ és ezt az 1 minimumértéket $h(x)$ fel is veszi mindenütt, ahol $\cos x=\sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x=1$, azaz a minimum helyei: $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Maximum ott lehet, ahol a $j(x)=\cos x-\sin x$ különbségnek pozitív maximuma, vagy negatív minimuma van. Deriváljuk a $j(x)$ függvényt:

$$j'(x)=-\sin x-\cos x,$$
$$j'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=-\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

„Minden” esetben $j''(x) = -\cos x + \sin x \neq 0$, azaz ezek valódi szélsőértékei $j(x)$-nek, és mivel ezeken a helyeken $\left|j(x)\right| = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, ezért minden ilyen helyre $(\cos x - \sin x)^2 + 1 = j^2(x) + 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 3$.

Azaz $h(x)$ maximuma 3 és a maximumának helyei: $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Írjuk fel $f(x)$-t $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ alakban, és vizsgáljuk meg a $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$ függvények értékeit $x = \frac{3}{2}$-nél.

$$g_1\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2^{2^1}} + 1$$

(ezt ne is alakítsuk tovább);

$$g_2\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(g_1\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{4} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{1}{2^{2^2}} + 1;$$

$$g_3\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(g_2\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{16} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{256} + 1 = \frac{1}{2^{2^3}} + 1.$$

Mivel

$$f\left(\frac{1}{2^{2^n}} + 1\right) = \left(\frac{1}{2^{2^n}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\left(2^{2^n}\right)^2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2^{2^n \cdot 2}} + 1 = \frac{1}{2^{2^{n+1}}} + 1,$$

ezért adódik, hogy $g_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^n}} + 1$, azaz $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1$.

Vizsgáljuk csak $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$-t.

$$0 < \frac{1}{2^{2^{2019}}} < \frac{1}{2^{2019}} < \frac{1}{2^{334}} < \frac{1}{10^{100}}$$

(ez utóbbi $1024 = 2^{10} > 10^3 = 1000$ miatt igaz); azaz $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$, és így $\frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1 = g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első száz jegye mind 0.

6. *Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal* (A, B, C, D, E, F, G, H) *ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat” a következő táblázat tartalmazza:*

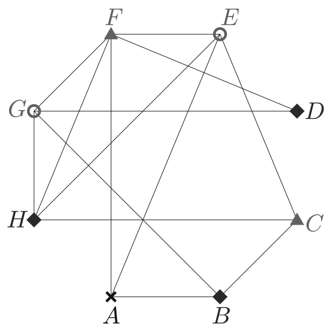
Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Rajzoljuk meg a feladat gráfját (két vegyianyag-kódot akkor kötünk össze, ha a két palack nem szállítható együtt).



Színezzük ki a gráf csúcsait úgy, hogy bármely két olyan csúcs, amit él köt össze, különböző színt kapjon. Megmutatjuk, hogy bármely ilyen színezéshez legalább négy szín kell (azaz a gráf csúcs-kromatikus száma 4), ami azt jelenti, hogy legalább négy kamion kell a palackok szállításához.

Indirekt tegyük fel, hogy a gráf csúcsai 3 színnel jól színezhetőek. Ekkor a teljes 3-klikket alkotó F, G, H csúcsoknál ezt a három színt fel is kell használnunk. Legyen F, G, H színe rendre zöld, piros és kék; (innen fonalasan) $\Rightarrow$ E színe csak piros, D színe csak kék, C színe csak zöld, B színe csak kék lehet (mert mindegyiknek van másik két színű szomszédja). Ekkor viszont A csúcsnak lesz piros (E), kék (B) és zöld (F) színű szomszédja is, vagyis A megszínezéséhez szükséges egy negyedik szín is. Ezzel igazoltuk, hogy a gráf csúcs-kromatikus száma legalább 4; 4 színnel pedig (mondjuk A-t sárgának választva) a csúcsok jól színezhetőek.

Az eddigiek alapján a szállításhoz legalább 4 kamion kell (az azonos színekkel jelölt palackok kerülnek egy kamionba). Egy lehetséges szétosztás:

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion
A	B, H, D	C, F	E, G

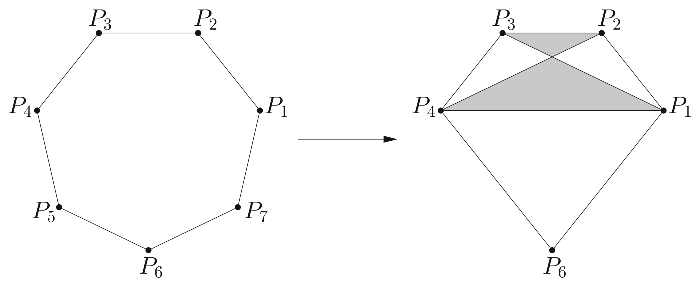
b) Mivel 40 palack van, ezért minimum 10 kamion kell. Ez viszont elég is, ahogyan a következő táblázat mutatja (*nagyon sok különböző megoldás lehet*).

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion	5. kamion
$AAAH$	$BBBB$	$CCCC$	$AACD$	$DDDD$
6. kamion	7. kamion	8. kamion	9. kamion	10. kamion
$BEEF$	$EEEG$	$FFFF$	$GGGG$	$HHHH$

c) A feladat gráfjában 14 él van (a táblázatbeli bejegyzések száma 28, de a szimmetria miatt ez 14 párt jelent); azaz pontosan 14 pár olyan palack van, amik nem kerülhetnek össze. Innen a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{\text{„kedvező” párok száma}}{\text{összes párok száma}} = \frac{14}{\binom{8}{2}} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

7. *Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő* (P_1, P_2, P_3, P_4, P_6) *csúcsai* (*lásd* jobb oldali ábra).



A cég 10 000 *darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni:* 10 000 *centiméternyi vonal megrajzolása* 50 *euróba kerül, míg* 10 000 cm^2*-nyi terület besatírozása* 200 *euróba.*

a) *Mennyi lesz a* 10 000 *kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala* 2 cm *hosszú?* (*10 pont*)

b) *A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt* 5 *összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a szabályos hétszög kétféle átlójának a hosszát. Koszinusztétellel:

$$P_1P_3^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{900^\circ}{7} \approx 12{,}988 \Rightarrow P_1P_3 \approx 3{,}604,$$

míg

$$P_1P_4^2 = 2^2 + P_1P_3^2 - 2 \cdot 2 \cdot P_1P_3 \cdot \cos\left(\frac{900^\circ}{7} \cdot \frac{4}{5}\right) \approx 20{,}196 \Rightarrow P_1P_4 \approx 4{,}494.$$

Innen a vonalak megrajzolásának költsége:

$$\approx (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3{,}604 + 4{,}494) \cdot 50 = 24{,}91 \cdot 50 = 1245{,}5 \text{ euró.}$$

Kiszámoljuk a satírozott részek területeit is. A P_1P_3 és P_2P_4 metszéspontját jelöljük O-val. P_2P_3O olyan egyenlőszárú háromszög, melynek P_2P_3 alapja 2 cm hosszú, míg alapján fekvő szögei nagysága: $\frac{180^\circ}{7}$, innen az alaphoz tartozó m magasságra: $\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = m \approx 0{,}4816$ és így

$$T_{P_2P_3O} \approx \frac{2 \cdot 0{,}4816}{2} = 0{,}4816.$$

A P_1P_4O háromszög pedig hasonló P_2P_3O-hoz, és a hasonlóság aránya éppen $\lambda = \frac{P_1P_4}{P_2P_3} \approx \frac{4{,}494}{2} = 2{,}247$, innen $T_{P_1P_4O} \approx 2{,}247^2 \cdot 0{,}4816 \approx 2{,}4314$. Innen a satírozás költsége: $\approx (0{,}4816 + 2{,}4314) \cdot 200 = 582{,}6$ euró.

Azaz a nyomdai összköltség hozzávetőlegesen: $1245{,}5 + 582{,}6 = 1828{,}1$ euró.

b) Jelöljük lentről felfele a részeket R_1, R_2, R_3, R_4, R_5-tel (R_2 az az egyetlen rész, amelynek 3 szomszédja van, az R_3, R_4 részek az egybevágó kisebb háromszögek.)

– R_2 kitöltésére 3 lehetőségünk van.

– Ha ekkor R_3 és R_4 színe különböző (ez kétféleképpen lehetséges), akkor R_5 színénél nincs választási lehetőségünk, ugyanazt a színt kapja R_5, mint R_2; viszont R_1-re két különböző színt is választhatunk. Az esetek száma itt $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$.

– Ha azonban R_3 és R_4 színe azonos (ez is kétféleképpen lehetséges), akkor eddig csak két színt használtunk fel, azaz vagy R_1, vagy R_5 (vagy mindkettő) színe a harmadik szín kell, hogy legyen. Ha csak R_1 kapja a harmadik színt, akkor R_5 színe egyértelmű, hasonlóan ha csak R_5 kapja a harmadik színt, akkor R_1 színe egyértelmű, és az is egyértelmű eset, ha mindkét területet a harmadik színnel színezem (ez így összesen háromféle lehetséges színezés); azaz ezen az ágon $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ lehetséges eset van.

Összesen tehát $12 + 18 = 30$-féleképp lehet kiszínezni az emblémát.

8. *Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:*

- *Az akvárium térfogata* 1 m^3 *kell, hogy legyen;*
- *az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya* $1:2$;
- *a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára* 90 *euró négyzetméterenként;*
- *az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere* 120 *euróba kerül.*

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz? (*16 pont*)

Megoldás. Jelöljük az akvárium alaplapjának oldalait $x, 2x$-szel (a 2. feltétel alapján), míg a magasságát y-nal. Ekkor a feltételek alapján $V = 2x^2y = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \frac{1}{2x^2}$. Az anyagköltségfüggvényt $f(x,y)$-nak nevezve pedig teljesül:

$$f(x,y) = 2x^2 \cdot 120 + 2(2xy) \cdot 90 + 2(xy) \cdot 90 = 240x^2 + 540xy.$$

Ennek a költségfüggvénynek szeretnénk a (lokális) szélsőértékeit megtalálni.

$f(x,y)$-ba behelyettesítve $y = \frac{1}{2x^2}$-t a költségfüggvény már csak x-től függ: $f(x) = 240x^2 + \frac{270}{x}$.

$$f'(x) = 480x - \frac{270}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 480x = \frac{270}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{270}{480} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{48}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{6}} \approx 0{,}8255.$$

Vizsgáljuk meg $f(x)$ második deriváltját is: $f''(x) = 480 + \frac{540}{x^2} > 0$, azaz a függvénynek a kapott helyen valóban lokális minimuma van. Számoljuk ki y-t:

$$y = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2 \cdot \dfrac{9}{4\sqrt[3]{36}}} = \frac{2\sqrt[3]{36}}{9} \approx 0{,}7338.$$

Azt kaptuk, hogy az optimális akvárium alapélei, illetve magassága (méterben): $x \approx 0{,}8255$; $2x \approx 1{,}651$; $y \approx 0{,}7338$ és ekkor a (minimális) anyagköltség: $f(x,y) \approx$ $\approx 490{,}6$ euró.

9. *Hány olyan $0 < \frac{a}{b} < 1$ és $0 < \frac{c}{d} < 1$ $(a,b,c,d \in \mathbb{N}^+)$ nem egyszerűsíthető közönséges tört van, hogy az*

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a + b + c + d = 100$? (*16 pont*)

Megoldás. Mivel $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ 0 és 1 közé esik, azért $1 < \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) < 4$, azaz a szorzat csak 2, vagy 3 lehet. A két esetet külön vizsgáljuk.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) = 2 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{2b}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{2b}{a+b} - 1 = \frac{b-a}{a+b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetőek, akkor $c = b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön, ráadásul a-nak és b-nek különböző paritásúnak kell lennie (mert különben c és d is páros, és így $\frac{c}{d}$ egyszerűsíthető lenne).

Mivel $a+b+c+d = 100 \Rightarrow a+b+b-a+a+b = a+3b = 100 \Rightarrow a = 100-3b$. Innen ha b páratlan, akkor $a = 100-3b$ is páratlan; míg ha b páros, akkor a is páros. Ekkor viszont (bármelyik esetben) $c = b - a$ és $d = b + a$ is páros ellentmondásban azzal, hogy a $\frac{c}{d}$ tört nem egyszerűsíthető. Azaz ezen az ágon nem kapunk megoldást.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) = 3 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{3b}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3b}{a+b} - 1 = \frac{2b-a}{a+b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetőek, akkor $c = 2b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön.

Mivel $a+b+c+d = 100 \Rightarrow a+b+2b-a+a+b = a+4b = 100 \Rightarrow b = 25 - \frac{a}{4}$. Innen a 4-gyel osztható szám, míg b nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora (az eddigiek alapján). A lehetőségeket a, b-re (és a számolt c, d-re) soroljuk fel egy táblázatban.

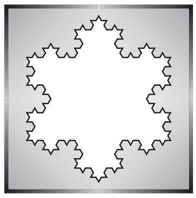
a	b	$c = 2b - a$	$d = b + a$	
4	24	44	28	a törtek egyszerűsíthetőek
8	23	38	31	$c > d$ így $c/d > 1$
12	22	32	34	a törtek egyszerűsíthetőek
16	21	26	37	ez megoldás
20	20	20	40	a törtek egyszerűsíthetőek, illetve $a \not< b$

Vagyis azt kaptuk, hogy az egyetlen megoldás: $a=16$, $b=21$, $c=26$, $d=37$.

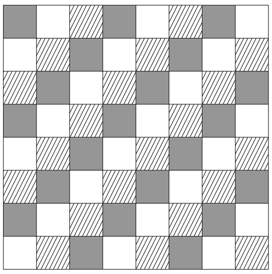
Ezt leellenőrizve (a,b illetve c,d valóban relatív prímek)

$$\left(1+\frac{16}{21}\right)\left(1+\frac{26}{37}\right)=\left(\frac{37}{21}\right)\left(\frac{63}{37}\right)=\frac{63}{21}=3.$$

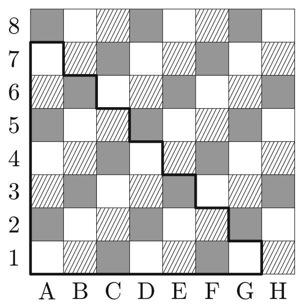
Sztranyák Attila
Budapest



C gyakorlat megoldása



C. 1517. *Egy sakktábla mezőit három színnel színeztük az* ábrán *látható módon. A táblán véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt, majd azzal véletlenszerűen (de szabályosan) egyet lépünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a huszár a kiinduló mezővel azonos színű helyre érkezik?*



I. megoldás. Jelöljük a sakktábla mezőit az *ábrán* látható módon. Mivel a huszárt véletlenszerűen helyezzük el a táblán, ezért egy mező kiválasztásának a valószínűsége $\frac{1}{64}$. A továbbiaknak minden mezőre kiszámoljuk az egy lépésben vele azonos színű mezőre való lépés valószínűségét. A kapott valószínűségek összegét $\frac{1}{64}$-gyel szorozva kapjuk meg a keresett valószínűséget.

A színezett tábla tengelyesen szimmetrikus a H1–A8 átlóra nézve, ezért csak a vastag vonallal határolt mezőkhöz tartozó valószínűségek összegét számoljuk ki, majd az eredmény kétszereséhez hozzáadjuk a H1–A8 átló mezőihez tartozó valószínűségeket.

A „megfelelő” lépés minden esetben a kiinduló mezővel azonos színű mezőre lépést jelenti. Az első négy átlószerűség mezőit részletesen indoklom, a többi esetben csak a valószínűségeket adom meg úgy, hogy a tört számlálójában a megfelelő lépések, míg nevezőjében a lehetséges lépések száma áll.

1.) A1: 2 lehetséges és 0 megfelelő lépés, a keresett valószínűség így 0.

2.) B1–A2: A B1 és az A2 mező esetén is 3 lehetséges és 1 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$. A B1–A2 „átlóhoz” tartozó mezők valószínűségének összege $\frac{2}{3}$.

3.) C1–A3: Mindhárom mező esetén 4 lehetséges és 2 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. A C1–A3 „átlóhoz" tartozó mezők valószínűségének összege $\frac{3}{2}$.

4.) D1–A4: a D1 és az A4 mező esetén 4 lehetséges és 2 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, míg a C2 és B3 mező esetén 6 lehetséges és 3 megfelelő lépés van, a keresett valószínűség $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. A D1–A4 „átlóhoz" tartozó valószínűségek összege $\frac{4}{2}=2$.

5.) Az E1–A5 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=\frac{5}{2}.$$

6.) Az F1–A6 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=3.$$

7.) A G1–A7 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{3}=\frac{23}{6}.$$

8.) A H1–A8 átlóhoz tartozó valószínűségek összege:

$$\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{4}+\frac{2}{2}=5.$$

Tehát az egyes mezőkhöz tartozó valószínűségek összege:

$$2\cdot\left(0+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{23}{6}\right)+5=2\cdot\frac{27}{2}+5=32.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen elhelyezett huszár a kiinduló mezővel azonos színű mezőre lép $\frac{1}{64}\cdot 32=\frac{1}{2}$.

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szakközépiskola, 12. évf.)

II. megoldás (vázlat). Az $\frac{1}{2}$ eredmény túl szép ahhoz, hogy ne próbáljunk meg ennél elegánsabb megoldást keresni. Ez (mivel bármelyik mező kiválasztásának a valószínűsége $\frac{1}{64}$) olyan szimmetriát sugall, hogy minden megfelelő lépésnek kölcsönösen egyértelműen meg lehet feleltetni egy nem megfelelő lépést. A megfeleltetés a következő: minden lépéshez hozzárendeljük a sakktábla első sorának felezőmerőlegesére vett tükrözéssel kapott lépést.

Megjegyzések. 1. Akik jól oldották meg a feladatot, azok az I. megoldáshoz hasonlóan gondolkoztak. A II. megoldáshoz hasonlóan senki nem dolgozott.

2. A leggyakoribb hiba annak feltételezése volt, hogy minden lépés azonos valószínűségű, és ennek megfelelően a keresett valószínűség a kedvező lépések és az összes lépés

számának hányadosa. Ez a feltételezés azonban nyilván nem teljesül, hiszen – mivel a bábut kezdetben bármelyik mezőre $\frac{1}{64}$ valószínűséggel helyezzük le – azok a lépések valószínűbbek, melyek olyan mezőről indulnak ki, ahonnan kevesebb huszár lépés lehetséges. Emellett igen gyakori volt még a számolási hibák elkövetése (például valamelyik mező esetén a kedvező lépés valószínűségének elszámolása).

63 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Adravecz Balázs, Debreczeni Tibor, Demcsák Ágnes, Facskó Vince, Falvay Júlia, Hordós Adél Zita, Kis Károly, Kis-Tóth Janka, Kovács Bence, Limpek Balázs, Mészáros Márton, Molnár István, Német Franciska, Pásti Bence, Székelyhidi Klára, Szigeti Donát, Wagner Dávid Barnabás. 4 pontos 6, 3 pontos 14, 2 pontos 11, 1 pontos 5, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5004. *$2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb hány olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül legalább az egyikkel?*

(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. A $2n$ egymást követő egész szám halmazát jelölje $\mathcal{H}$. A $\mathcal{H}$ elemei között legfeljebb egy lehet osztható $2n$-nel, hiszen két ilyen szám különbsége legalább $2n$, míg $\mathcal{H}$ legnagyobb és legkisebb elemének különbsége csupán $2n-1$. Hasonló okból az $n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ számoknak legfeljebb két többszörösük lehet $\mathcal{H}$-ban, mivel három ilyen többszörös közül a legnagyobb és legkisebb különbsége legalább $2(n+1) > 2n-1$.

A továbbiakban n paritása szerint két esetet különítünk el egymástól.

1. eset: n páros. Ekkor az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül $\frac{n}{2}$ páros és ugyanennyi páratlan. Ha – a $2n$ kivételével – ezek közül mindegyik k-nak két többszöröse van $\mathcal{H}$-ban, akkor ezek „szomszédos” többszörösök (ik és $(i+1)k$), így a páratlanoknak egy páratlan és egy páros többszöröse, a párosaknak pedig két páros többszöröse található $\mathcal{H}$-ban. Ez (a $2n$ egyetlen $\mathcal{H}$-beli többszörösét is beszámítva $2\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2}+1 = n+\frac{n}{2}-1$ páros és) $\frac{n}{2}$ páratlan többszöröst jelentene $\mathcal{H}$-ban; mivel azonban $\mathcal{H}$-nak pontosan n páros és n páratlan eleme van, ebben az esetben legfeljebb $n+\frac{n}{2}$ lehet a $\mathcal{H}$-ba eső többszörösök száma. Ez a korlát el is érhető: legyen $\mathcal{H} = \{n+1, n+2, \ldots, 3n\}$, ekkor $(n+1)$-től $2n$-ig mindegyik szám osztható az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok közül valamelyikkel, mégpedig saját magával. A többiek közül pedig az $\frac{n}{2}$ darab páros szám: $2n+2 = 2(n+1)$, $2n+4 = 2(n+2)$, …, $3n = 2\left(\frac{3n}{2}\right)$ osztható rendre $n+1$-gyel, $n+2$-vel, …, $n+\frac{n}{2}$-vel.

2. eset: n páratlan. Az előző esethez hasonlóan, most $\left(\frac{n+1}{2}\text{ páros és}\right)$ $\frac{n-1}{2}$ páratlan szám van az $n+1$, $n+2$, …, $2n$ számok között. Így a $\mathcal{H}$-ba eső páratlan többszöröseik száma $\frac{n-1}{2}$, ezért a $\mathcal{H}$-ban található többszörösök száma legfeljebb n (a $\mathcal{H}$ páros elemeinek a száma) $+\frac{n-1}{2}$. Az $n+\frac{n-1}{2}$ korlát elérhető, ha például (ismét) a $\mathcal{H}=\{n+1,n+2,\dots,3n\}$ választással élünk. Ekkor ugyanis az $n+1$, $n+2$, $\dots$, $2n$ számok saját magukkal, az $\frac{n-1}{2}$ darab páros szám pedig: $2n+2=2(n+1)$, $2n+4=2(n+2)$, $\dots$, $3n-1=2\left(\frac{3n-1}{2}\right)=2\left(n+\frac{n-1}{2}\right)$ saját magának a felével osztható.

Tehát $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb $n+\left[\frac{n}{2}\right]$ olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, $\dots$, $2n$ számok valamelyikével.

Nyárfádi Patrik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

47 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Bokor Endre, Csaplár Viktor, Dobák Dániel, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffy Ágoston, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Kovács Tamás, Kun Ágoston, Mátravölgyi Bence, Nagy Nándor, Nyárfádi Patrik, Rareş Polenciuc, Soós Máté, Telek Zsigmond, Terjék András József, Tóth Ábel, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 3 pontos 8, 2 pontos 5, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 1, nem számítunk a versenybe 1 dolgozatot.

B. 5035. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $n\geqslant 8$ csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor több, mint*

$$\frac{(n-5)^4}{64}$$

egyszínű, négy hosszú kör keletkezik.

(*6 pont*) *Pálfi Máté* (Budapest) javaslata nyomán

Megoldás. *Elnevezés:* Az $\binom{n}{k}$ kifejezésben n-re olykor számlálóként, k-ra pedig nevezőként hivatkozunk. Szükségünk lesz a következő becslésre: Legyenek a, b, y pozitív egész számok, melyekre $a>b$; ekkor: $\binom{a}{y}+\binom{b}{y}\geqslant\binom{a-1}{y}+\binom{b+1}{y}$.

Bizonyítás: ekvivalens átalakításokat hajtunk végre a bizonyítandó egyenlőtlenségen. Szorozzuk mindkét oldalt $(y!)^2$-nel:

$$a(a-1)(a-2)\dots(a-y+1)+b(b-1)(b-2)\dots(b-y+1)\geqslant$$
$$\geqslant(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-y)+(b+1)b(b-1)\dots(b-y+2).$$

Vonjuk ki a jobb oldalt és emeljünk ki:

$$\big(a-(a-y)\big)(a-1)(a-2)\dots(a-y+1)+$$
$$+\big((b-y+1)-(b+1)\big)b(b-1)\dots(b-y+2)\geqslant 0.$$

Végezzük el a kivonást és adjuk hozzá a negatív tagot:

$$y(a-1)(a-2)\dots(a-y+1)\geqslant yb(b-1)\dots(b-y+2).$$

Ez pedig egyenesen következik abból, hogy $a>b$, mert mindkét oldalon y pozitív szám szorzata áll, és a bal oldalon lévők páronként nagyobbak vagy egyenlők, mint a jobb oldalon lévők. Ezzel a lemmával a későbbiekben olyan összegeket tudunk alulról becsülni, ahol a binomiális tagok „számlálójában” lévő tagok összege adott. Fontos megjegyezni, hogy amit beláttunk 1-re (amennyivel „közelebb vittük egymáshoz” a két számlálót), az tetszőleges pozitív valós számra igaz, ez látszik a bizonyítás menetéből. Tehát valójában a számlálók átlagával tudunk alulról becsülni, és ez akárhány tagra igaz.

A feladat állításának bizonyítása: Vegyünk egy tetszőleges n pontú teljes gráfot. Legyen az élek színe kék és lila, és tegyük fel, hogy kékből van több vagy ugyanannyi, mint lilából. Legyen a kék élek száma $\frac{nk}{2}$ (itt k nem feltétlenül egész szám, de ez nem baj, és már most tudjuk, hogy $k \leqslant \frac{n-1}{2}$), az a lényeg, hogy egy csúcsból átlagosan k darab kék él indul ki. Ha egy csúcsból kiindul x kék él, akkor az a csúcs $\binom{x}{2}$ kék cseresznyének a gyökere (egy cseresznye egy kettő hosszú út, és gyökere az élek közös végpontja). Legyen a gráf i-edik csúcsából kiinduló kék élek száma A_i. Ekkor a gráfban van $\binom{A_1}{2} + \binom{A_2}{2} + \ldots + \binom{A_n}{2}$ kék cseresznye, ahol $A_1 + A_2 + \ldots A_n = nk$. Most alkalmazzuk a lemmát az $y = 2$ esetre, és megkapjuk, hogy van a gráfban legalább $n\binom{k}{2}$ kék cseresznye, hiszen mind az n számlálóba behelyettesítettük k-t, a számlálók átlagát. Ezt osszuk el az élek számával, és megkapjuk, hogy egy élen átlagosan

$$\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}$$

cseresznye fekszik (egy cseresznye azon az élen fekszik, ami hiányzik a három pont által meghatározott háromszögből). Persze lehetséges, hogy néhány élen több, néhányon pedig kevesebb cseresznye fekszik, azonban a következő lépésből és a lemmából látni fogjuk, hogy akkor kapunk alsó becslést, ha az átlaggal számolunk. Szintén a lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2}$$

4 hosszú kék kör fekszik átlagosan egy élen mint a 4 hosszú kör „átlóján”. Ezt az élek számával beszorozva megkapjuk a 4 hosszú kék körök számát. Azonban így minden 4 hosszú kék kört kétszer számoltunk (mindkét átlójánál), ezért ezt el kell osztani 2-vel. Ebből azt kapjuk, hogy legalább

$$\binom{\frac{2\binom{k}{2}}{n-1}}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

4 hosszú kék kör van a gráfban. Teljesen megegyező gondolatmenettel kaphatjuk, hogy lila körből legalább

$$\binom{\frac{2\binom{n-1-k}{2}}{n-1}}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

darab van, hiszen az egy csúcsból kiinduló lila élek átlagos száma $n-1-k$. Konstans szorzótól eltekintve ezek is fix összegű számlálók azonos nevezőjű binomiális kifejezéseinek összegei, tehát alulról becsülhetjük az átlaggal: k és $n-1-k$ átlaga éppen $\frac{n-1}{2}$, ezt behelyettesítve becsülhetjük a 4 hosszú körök számát:

$$2\cdot\binom{\frac{2\binom{\frac{n-1}{2}}{2}}{\frac{n-1}{2}}}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Ezt ekvivalens átalakítások sorozatával szebb alakra hozhatjuk:

$$\frac{n(n-1)(n-3)(n-7)}{64}.$$

Ez $n\geqslant 9$ esetén nagyobb a bizonyítandónál, hiszen $n(n-7)>(n-5)^2$ és $(n-1)>$ $>(n-5)$, valamint $(n-3)>(n-5)$ mind teljesül $n\geqslant 9$-re. Ha $n=8$, akkor pedig $8\cdot 7\cdot 5\cdot 1>64$. Ezzel a bizonyítandót beláttuk.

Várkonyi Zsombor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

10 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 4 versenyző: Füredi Erik Benjámin, Hegedűs Dániel, Várkonyi Zsombor, Weisz Máté. 3 pontos 2, 0 pontos 4 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (639–643.)

K. 639. Egy buszon 53 utas van, férfiak és nők, illetve kislányok és kisfiúk. A nők száma háromszor annyi, mint a kisfiúké, és 10-zel több, mint a kislányoké. Tudjuk továbbá, hogy a férfiak és kisfiúk száma összesen 15. Hány férfi, nő, kisfiú és kislány utazik a buszon?

K. 640. Egy 5-re végződő kétjegyű számot úgy is négyzetre emelhetünk, hogy a tízesek helyén álló számjegyet megszorozzuk a nála 1-gyel nagyobb számmal, és a szorzat után 25-öt írunk. Indokoljuk meg a módszer helyességét.

K. 641. Egy konvex négyszög belsejében felveszünk valamennyi pontot. A felvett pontokat egymással és a négyszög csúcsaival úgy kötjük össze egyenes szakaszokkal, hogy az összekötő szakaszoknak a négyszög belsejében ne legyen metszéspontja, és a szakaszok a négyszöget kis háromszögekre és ötszögekre bontsák. (Minden belső pont valamely háromszög vagy ötszög csúcsa.) Előfordulhat-e, hogy a négyszöget pontosan 2019 síkidomra bontottuk fel?

K. 642. Adjuk meg az összes pozitív egész x és y számot, melyekre teljesül, hogy $x^2 - y^2 = 2019$.

K. 643. Az

$$\frac{a6bc}{de3fg}$$

törtben a 0 kivételével minden számjegy pontosan egyszer szerepel. Mit jelölhetnek az egyes betűk, ha a tört értéke $\frac{1}{2}$?

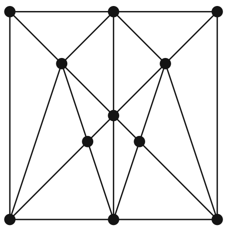
❄

Beküldési határidő: 2020. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1574–1580.)

Feladatok 10. évfolyamig



C. 1574. Az *ábrán* látható metszéspontokra ráírtunk minden egész számot 0-tól 10-ig. Ezt követően minden kis háromszögbe beírjuk a csúcsain található számok összegét. Mekkora az így kapott 14 szám összegének lehető legnagyobb, illetve legkisebb értéke?

C. 1575. Határozzuk meg az összes olyan, p, q pozitív prímekből álló számpárt, amelyre $2pq + 2p - q = q^2 - 8$.

Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

Feladatok mindenkinek

C. 1576. Adott az O középpontú, egységsugarú kör, valamint a P pont úgy, hogy $OP = 2$. Tekintsük az egyik P-n átmenő szelőt, ami a kört az M és N pontokban metszi úgy, hogy az NP szakasz felezőpontja M. Igazoljuk, hogy az OMN háromszög területe kisebb, mint $\frac{1}{2}$.

C. 1577. Egy növekvő, végtelen számtani sorozatról tudjuk, hogy közvetlen egymás utáni tagjai a tízes számrendszerbeli két, illetve háromjegyű

$$\overline{ab},\ \overline{abc},\ \overline{cab}$$

számok (a megadott sorrendben). Hány tagja van ennek a számsorozatnak 1552 és 2020 között?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1578. Két egybevágó téglalap úgy helyezkedik el, hogy a kerületük nyolc pontban metszi egymást. Mutassuk meg, hogy a két téglalap közös részének területe nagyobb a területük felénél.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1579. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x-11)^{\log_2(x-10)}=(x-11)^{\log_{\frac{1}{2}}(x-11)}.$$

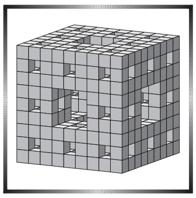
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1580. Bori véletlenszerűen elhelyez 10 pénzérmét egy sorban az asztalra. Egy lépésben mindig egyszerre két szomszédos érmét fordít át a másik oldalára. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Bori nem tudja elérni, hogy valahány lépés után minden érmén a „fej” legyen felül?

❄

Beküldési határidő: 2020. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5062–5069.)

B. 5062. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

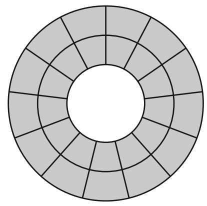
$$x[x]+y[y]=1,$$
$$[x]+[y]=1.$$

(*3 pont*) (*MI&Q*)

B. 5063. Az ABC háromszögben $BC < AC$ és az $ACB\sphericalangle$ derékszög. A BC átmérőjű kört az A-ból húzott érintők a C és D pontban érintik. Az AD érintő egyenese a BC egyenest az E pontban metszi. A BC szakasz felezőpontja O. Bizonyítsuk be, hogy a DEO háromszög területe megegyezik az AEB háromszög területével.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5064. Az *ábrán* látható 26 mezőből álló „tábla" hányféleképpen fedhető 13 „dominóval"? Egy-egy dominó két szomszédos mezőt fed le. (Az egymásba forgatható megoldásokat különbözőnek tekintjük.)



(*4 pont*)

B. 5065. A hegyesszögű ABC háromszög köré írt kör középpontja O, az O pont tükörképe a BC, CA és AB oldalakra rendre O_A, O_B, illetve O_C. Mutassuk meg, hogy az AO_A, BO_B és CO_C egyenesek egy ponton mennek át.

(*4 pont*)

B. 5066. Harminc diák a „Tautologika" nevű tantárgyból vizsgázik. A diákok egy teremben ülnek, és a tanár egyetlen kérdést tesz fel nekik: „Az itt ülő 30 diákból összesen hányan fognak megbukni ezen a vizsgán?" A diákoknak sorban egy-egy számot kell mondani. Minden egyes válasz elhangzása után a tanár azonnal kihirdeti az eredményt is, ami „megfelelt" vagy „megbukott" lehet.

A hallgatói önkormányzat elérte, hogy a vizsga után egy szakfelügyelő ellenőrizze az eredményeket. Ha van olyan diák, aki helyesen válaszolt, de mégis megbukott, a vizsga összes eredményét érvénytelenítik, és mindenki „megfelelt" minősítést kap.

Van-e a diákoknak olyan stratégiája, ami biztosítja, hogy mindegyikük átmenjen a vizsgán?

(*5 pont*) (*Orosz feladat*)

B. 5067. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának felezőpontja F, az F-re illeszkedő e egyenes felezi ABC kerületét. Az e egyenes a BC és CA oldalegyeneseket rendre D és E pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy az AB-re F-ben állított merőleges, a BC-re D-ben állított merőleges, és a CA-ra E-ben állított merőleges egyenesek egy pontban metszik egymást.

(*5 pont*)

B. 5068. Tegyük fel, hogy p egy legfeljebb 1998-adfokú polinom, melyre a $p(1), p(2), \ldots, p(2000)$ értékek az $1, 2, \ldots, 2000$ számok egy permutációja. Következik-e ebből, hogy a $p(1)$ és $p(2000)$ számok az 1 és 2000 valamelyik sorrendben?

(*6 pont*)

B. 5069. Az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye AC. Az AB oldalra B-ben, és a CD oldalra D-ben állított merőlegesek metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy $AMD\sphericalangle = BMC\sphericalangle$.

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2020. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (764–766.)

A. 764. Egy sokszög egy átlóját *szépnek* nevezzük, ha végig a sokszög belsejében vagy végig a sokszögön kívül halad. Legyen P egy olyan n-szög, amelynek semelyik három csúcsa nem esik egy egyenesre. Bizonyítandó, hogy P-nek legalább $\frac{3}{2}(n-3)$ szép átlója van.

Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest) és *Szűcs Gábor* (Szikszó)

A. 765. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$f(x)f(y)-f(x-1)-f(y+1)=f(xy)+2x-2y-4.$$

Javasolta: *Dobák Dániel* (Budapest)

A. 766. Legyen H egy olyan háromszög, amelyben mindhárom oldal és a körülírt kör sugara is egész hosszúságú. Bizonyítandó, hogy

a) H-ban a beírt kör sugarának hossza egész;

b) H kerületének hossza osztható néggyel;

c) H mindhárom oldalának hossza páros.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgaria)

❄

Beküldési határidő: 2020. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 496. A processzorok bitműveletek segítségével sokszor gazdaságosabban és gyorsabban végzik el két egész szám szorzását, mint más módon. Tízes számrendszerben egy szám végére 0-t írva annak 10-szeresét kapjuk, míg kettes számrendszerben az eredeti szám 2-szeresét. Ha tehát egy bináris számot eltolunk 3-mal a nagyobb helyiértékek felé, miközben a szám végére három 0-át írunk, akkor egy 8-cal történő szorzást végzünk. Ha a kapott értékhez még hozzáadjuk az eredeti számot, akkor valójában 9-cel szorzunk.

Ezek alapján minden egész számmal történő szorzás megvalósítható bizonyos számú eltolás, a közben kapott értékek tárolása, és valahány összeadás segítségével. Például az $x\cdot 29$ fölírható

$$x\cdot(28+1)=x\cdot(2\cdot 14+1)=x\cdot(2\cdot 2\cdot 7+1)=x\cdot\big(2\cdot 2\cdot(6+1)+1\big)=$$

$$=x\cdot\big(2\cdot 2\cdot(2\cdot 3+1)+1\big)=x\cdot\Big(2\cdot 2\cdot\big(2\cdot(2+1)+1\big)+1\Big)$$

alakban. Ha ezt fölbontjuk, akkor az $x\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+x\cdot 2\cdot 2\cdot 2+x\cdot 2\cdot 2+x$ kifejezést kapjuk, ahol csak 2-vel való szorzás (tehát eltolás), illetve összeadás szerepel.

Tegyük föl, hogy a részeredmények tárolásához elegendő hely áll rendelkezésre. Adjuk meg, hogy ezzel a módszerrel végezve hány eltolás és hány összeadás szükséges egy adott számmal történő szorzás elvégzéséhez. A 29-cel való szorzáshoz például ki kell számítanunk az $x\cdot 2$, $x\cdot 2\cdot 2$, $x\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, $x\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ értékét, amelyekhez összesen 4 eltolás szükséges, és ezután kell még három összeadás.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be a szorzót (pozitív egész), majd írja ki a standard kimenet egyetlen sorába elsőként az eltolások számát, majd szóközzel elválasztva az összeadások számát.

Beküldendő egy `i496.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 497 (É). Ebben a feladatban azt vizsgáljuk, hogy egy adott gimnáziumba jelentkező tanulók milyen eredményt értek el a felvételi vizsgán az adott városban felvételiző összes tanuló eredményéhez viszonyítva.

A felvételi vizsga írásban, két tantárgyból történik: magyarból és matematikából. Mindkét tantárgyból legfeljebb 50 pont szerezhető.

Rendelkezésünkre áll egy táblázat, amelynek első oszlopa a lehetséges pontszámokat tartalmazza 0-tól 50-ig. A mellette lévő négy oszlop pedig rendre megmutatja, hogy hány tanuló ért el ennyi pontot magyarból a városban, illetve az adott iskolában; valamint matematikából a városban, illetve az adott iskolában.

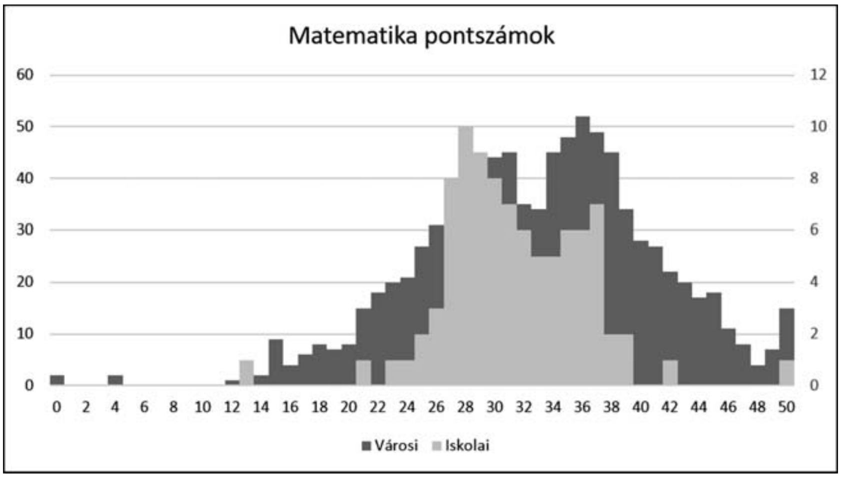
1. Töltsük be a táblázatkezelő program egyik munkalapjára az A1 cellától kezdve a `felv.txt` adatfájlt, majd mentsük a munkafüzetet `elemzes` néven a program alapértelmezett formátumában.
2. Határozzuk meg a K5:L5 tartományban, hogy hány tanuló írt felvételi dolgozatot magyarból és matematikából az adott városban, illetve az K8:L8 tartományban azt, hogy közülük hány tanuló jelentkezett az adott iskolába.
3. Határozzuk meg a K6:L6, illetve a K9:L9 tartományban a tanulók átlagos pontszámát az egyes tantárgyakból a város összes tanulója, illetve az adott iskolába jelentkező tanulók esetén. Az eredményeket két tizedesjegyre formázva jelenítsük meg.
4. Mennyivel nagyobb az adott iskolába jelentkező tanulók átlagos pontszáma, mint a város összes tanulójáé? Az eredményt képlettel írassuk tantárgyanként a K11:L11 tartományba.
5. Határozzuk meg tantárgyanként a város valamennyi felvételizője, illetve az adott iskolába jelentkező tanulók esetén is tantárgyanként, hogy melyik pontszám volt a leggyakoribb. Az eredményt képlettel adjuk meg a K7:L7, illetve a K10:L10 tartomány celláiban.
6. Szeretnénk megvizsgálni, hogy mely pontszámok fordulnak elő nagyobb gyakorisággal az adott iskolába jelentkező tanulók esetén, mint a város összes felvételizője esetén. Feltételes formázás alkalmazásával emeljük ki

   a) a C4:D54 tartományban halványpiros háttérrel az azokhoz a pontszámokhoz tartozó sorokat, amelyekben a pontszámok relatív gyakorisága magyarból nagyobb volt az adott iskolába jelentkező tanulók esetén, mint a város összes tanulója esetén;

   b) a G4:H54 tartományban halványzöld háttérrel az azokhoz a pontszámokhoz tartozó sorokat, amelyekben a pontszámok relatív gyakorisága matematikából nagyobb volt az adott iskolába jelentkező tanulók esetén, mint a város összes tanulója esetén.
7. Az iskola igazgatója 5 pontos sávonként is szeretné összehasonlítani az eredményeket, de csak azok az adatok érdeklik, amelyek 20 pontnál nagyobbak. Az egyes sávok alsó és felső határát az I18:J23 tartomány tartalmazza. Másolható képlet segítségével határozzuk meg a K18:K23 tartomány celláiban, hogy a tanulók hány százaléka esik az adott sávba a városban magyar felvételi vizsgát írt tanulók esetén. Hasonló módon végezzük el a számítást az adott iskolába jelentkező tanulók esetén is az L18:L23 tartományban, valamint a matematika tantárgyra vonatkozóan is az M17:N23 tartományban. *Ügyeljünk arra, hogy csak a 20 pontot meghaladó tanulók képezik a mintát!*
8. Ábrázoljuk csoportosított oszlopdiagramon a tanulók iskolai és városi matematika pontszámának megoszlását úgy, hogy az oszlopok érjenek össze. Az iskolai adatok áttekinthetőbb elrendezéséhez alkalmazzunk második értéktengelyt. A diagram címe *„Matematika pontszámok”* legyen.
9. Formázzuk meg az I4:L11 tartományt a mintának megfelelően!

		Magyar	Matematika
Városi	tanuló	900	900
	átlag	36,67	32,96
	leggyakoribb	41	36
Iskolai	tanuló	92	92
	leggyakoribb	39,48	31,32
	csúcs	41	28
Eltérés	átlag	2,81	-1,64

		Magyar		Matematika	
		Városi	Iskolai	Városi	Iskolai
21	25	4%	1%	12%	5%
26	30	11%	2%	22%	42%
31	35	20%	11%	24%	32%
36	40	30%	36%	24%	19%
41	45	27%	42%	12%	1%
46	50	8%	8%	5%	1%



Beküldendő egy tömörített `i497.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

I. 498 (É). Egy szabadstrand vízibicikli-kölcsönzőjében kölcsönzéskor rögzítik a kölcsönző nevét (lehet becenév is), az elvitt jármű azonosítóját (A, B, C, D, E, F, G), az elvitel óráját és percét, valamint a visszahozatal óráját és percét. Például:

```
Anti;A;10;1;10;58
Malacka;A;11;12;11;20
Joci;A;12;5;14;15
Manci;B;10;5;11;4
```

Egy időpontban csak egy jármű indulhat vagy érkezhet. A járművekért minden megkezdett fél óra után 1500 Ft-ot kell fizetni. A kölcsönzés idejébe az első és az utolsó perc is beleszámít.

Az adatokat a – weblapunkról letölthető – `vizdat.csv` nevű, pontosvesszővel tagolt szöveges állomány tartalmazza. Feltételezhetjük, hogy a napi kölcsönzések száma nem haladja meg a 100-at.

Készítsünk programot `i498` néven a következő feladatok megoldására. A program futása során a képernyőre való kiíráskor utaljunk a feladat sorszámára.

1. Olvassuk be a `vizdat.csv` fájlból és tároljuk el a napi kölcsönzések adatait.
2. Kérjünk be egy nevet és írassuk ki, hogy az illető aznap mettől meddig vette igénybe a kölcsönző szolgáltatásait. Elképzelhető, hogy az illető többször is kölcsönzött aznap, ebben az esetben minden kölcsönzés adatát írassuk ki. Ha aznap egyszer sem kölcsönzött, akkor a Nem volt ilyen nevű kölcsönző! szöveg jelenjen meg.
3. Kérjünk be egy időpontot az óra és a perc megadásával, majd írassuk ki a képernyőre, hogy ekkor mely járművek voltak vízen, és azokat kik kölcsönözték ki.
4. Határozzuk meg a napi bevétel összegét, és írassuk ki a képernyőre.
5. Melyik járművet hányszor kölcsönözték ki aznap? A választ a minta szerinti elrendezésben írassuk ki a képernyőre:

```
A - 3
B - 3
C - 2
...
```

6. Melyik jármű után fizették a legnagyobb kölcsönzési díjat? Írassuk ki a képernyőre órában megadva a fizetett időt és a jármű azonosítóját. (Vegyük figyelembe, hogy minden megkezdett fél óra után a teljes fél órát ki kell fizetni.) Ha több ilyen jármű volt, mindegyik azonosítója jelenjen meg.
7. Néhány strandoló nem tudott járművet kölcsönözni, mert éppen az összeset elvitték. Mikor volt ilyen időszak? Jelenítsük meg valamennyi időtartamot a képernyőn kezdés óra, kezdés perc, vége óra, vége perc formátumban.
8. Sajnos az F jelű járművet napközben valaki használat közben megrongálta. Készítsünk egy szöveges állományt, amely tartalmazza a lehetséges elkövetőket

és azt, hogy mettől meddig volt náluk a jármű. Az adatokat a következő formában írassuk a `fjarmu.txt` fájlba:

```
10:15-10:55 : Zigler
10:42-11:10 : Csacsa
11:16-11:40 : Bandi
11:52-12:02 : Joci
...
```

Beküldendő egy `i498.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 40. Egy nap N matematikus moziba megy. A moziban M darab szék van egy sorban (1-től M-ig megszámozva). Mindannyian egy sorban ülnek le. Mindenki megmondja, hogy minimum melyik sorszámú székre és maximum melyik sorszámú székre hajlandó leülni. Nincs olyan szék, ahova ketten is leülhetnének. Azért, hogy kényelmesen elférjenek, megpróbálnak a lehető legtávolabb leülni egymástól. Még pontosabban: arra törekednek, hogy a két egymáshoz legközelebb ülő matematikus távolsága (a székek számának különbsége) a lehető legnagyobb legyen. Adjuk meg, hogy mekkora ez a legnagyobb távolság.

Bemenet: az első sor tartalmazza N és M értékét. A következő N sor mindegyike egy a_i, b_i számpárt tartalmaz, ami azt jelenti, hogy az i-edik matematikus olyan székre szeretne leülni, amelynek száma legalább a_i és legfeljebb b_i. *Kimenet:* a program adjon meg egyetlen számot, két legközelebbi matematikus maximális távolságát.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`4 18` `2 4 / 10 11 / 15 17 / 6 9`	`4`

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant M \leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $2 \leqslant N \leqslant 10^2$.

Beküldendő egy `is40.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 139. Adott N darab pozitív egész szám. Adjuk meg, hogy hány olyan számpár van közöttük, amelyek tagjai relatív prímek.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N értékét. A második sor tartalmazza szóközökkel elválasztva az N darab pozitív egészet.

Kimenet: egyetlen sor, mely a relatív prím számpárok számát tartalmazza.

Példa:

Bemenet	Kimenet
5 31 88 41 72 9	8

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 50\,000$, $1 \leqslant \text{számok} \leqslant 500\,000$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `s139.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. január 10.

❄

ERICSSON-DÍJ 2020

Felhívás díjazandó tanárok ajánlására

Beérkezési határidő: 2020. február 10. (éjfél)

Az Ericsson Magyarország 2020-ban ismét 8 kiváló pedagógust díjaz összesen 3 200 000 forinttal, így ebben az esztendőben is minden díjjal 400 000 forint jutalom jár. Az elmúlt 21 év során 226 tanító, matematika- vagy fizikatanár kapta meg az Ericsson-díjat.

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, méltassa és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A közel kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1300 fős Kutatás-Fejlesztési Központjával a legjelentősebb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. A díjra esélyes pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása teszi lehetővé, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2020-ban is két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért" díj

Két matematikát és két fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 400 000 forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akik iskolájukban és azon túl is évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért. Élen járnak az innovatív módszerek kidolgozásában és népszerűsítésében. A bírálók figyelembe veszik, ha az ajánlott pedagógus tanítványaival aktívan bekapcsolódott a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, egyéb országos matematika és fizika versenyekbe, lendületes, kezdeményező egyéniségével vagy új technológiák bevezetésével vonzóvá teszi szaktárgyát.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" díj

Két matematikát és két fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 400 000 forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akiknek tanítványai 2010 óta szaktárgyuk legjelentősebb országos vagy nemzetközi versenyein (például: a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS versenyek; a Varga Tamás, Kalmár László, Zrínyi Ilona, Arany Dániel matematikaversenyek; matematika vagy fizika OKTV; Öveges József, Jedlik Ányos, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek, Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén) elnyerték az első öt díj egyikét, illetve nemzetközi matematikai vagy fizikai diákolimpiákon arany-, ezüst-, vagy bronzérmet, vagy dicséretet szereztek.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díj bizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. Az ajánlásnak ki kell emelnie a javasolt személy szakmai és emberi jellemzését, különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Pályázatot csak a különböző kategóriák elektronikus Pályázati adatlapjain nyújthatnak be. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (aktualizálva) kérjük, ismételjék meg! Rátz Tanár Úr Életműdíjas pedagógust kérjük, ne jelöljenek! Ericsson-díjas tanár 8 év elteltével újra felterjeszthető.

A pályázati adatlapok **2020. február 10-én éjfélig (23:59)** lesznek elérhetőek a `https://eth.org.hu/ericsson-dij-2020` weboldalon. A pályázatokat kizárólag online lehet benyújtani. Kérdés esetén a következő e-mail címre írhatnak: `matfund@komal.hu`.

A szakmai bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján részletes indoklást mellékelve javaslatot tesznek a jelöltek sorrendjére, amelynek alapján a MATFUND kuratóriuma 2020. március 13-ig dönt a díjazandók személyéről.

A díjkiosztó ünnepségre 2020. május végén kerül sor az Ericsson Magyarország székházában.

Mérési feladat megoldása

M. 388. *Vizsgáljuk meg, hogy egy (rövidáruboltban kapható) gumiszál (vagy gumiszalag) mennyire követi a lineáris erőtörvényt! Mérjük meg a gumiszál hosszát növekvő és csökkenő terhelés esetén is!*

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Budapest

Megoldás. *Mérési elrendezés és a mérés menete:*

A gumiszál egyik végét egy lépcső szabad oldalához rögzítettük, a másik végét függőlegesen terheltük. A fém mérőszalagot szintén a lépcsőhöz rögzítettük, és a végére tett kis súllyal elértük, hogy az is függőleges legyen. A gumiszál végének terhelését fokozatosan növeltük 50 g-os súlyok segítségével. A ráakasztott súlyokat 50 g-tól 1000 g-ig változtattuk, és minden esetben megmértük a megnyúlt gumiszál hosszát, majd a terheletlen hosszhoz viszonyítva meghatároztuk a megnyúlás mértékét. A terhelést fokozatosan csökkentve is elvégeztük a méréseket.

Négy különböző szélességű (és különböző színű) gumiszalaggal végeztük el a méréseket. Közülük három szalag ránézésre csak a szélességében különbözött, az anyag felépítése, szövése egyformának tűnt. A legszélesebb gumiszalag nemcsak a szélességében, de anyagának minőségében is különbözött a többitől.

A gumiszalagok szélessége:

$$d_{\text{barna}} = 0{,}3\ \text{cm};\quad d_{\text{zöld}} = 0{,}5\ \text{cm};\quad d_{\text{piros}} = 0{,}7\ \text{cm};\quad d_{\text{kék}} = 1{,}3\ \text{cm}.$$

Mérési eredmények

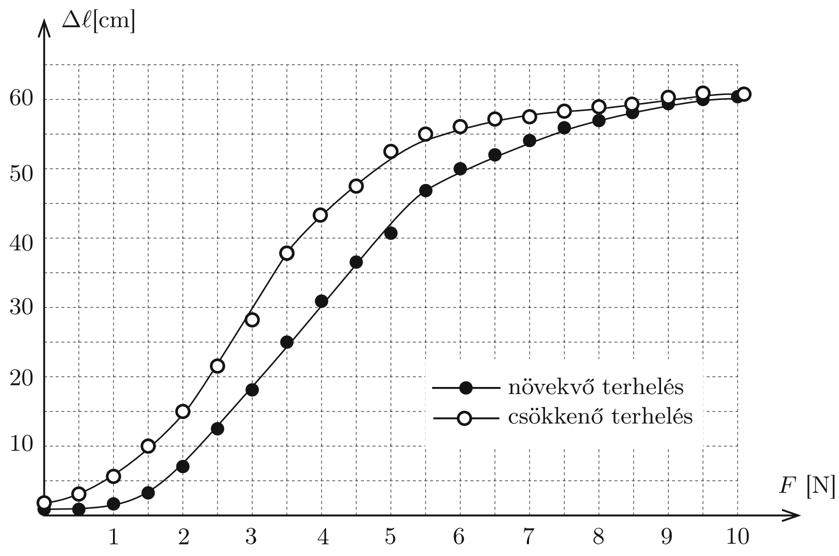
Mindegyik gumiszál terheletlen hossza $\ell_0 = 40$ cm volt. Az alábbiakban a piros gumiszállal végzett mérés eredményét adjuk meg. (A jegyzőkönyv tartalmazta a másik három szálra vonaltozó adatokat is, de ezeket terjedelmi okokból nem közöljük. – *A Szerk.*)

A szalag szélessége a mérés előtt 0,7 cm, a mérés után 0,65 cm volt. A mellékelt *táblázat* és *grafikon* a gumiszalag megnyúlását adja meg a húzóerő függvényében.

tömeg	nyújtóerő	megnyúlás növekvő terhelésre	megnyúlás csökkenő terhelésre
m [g]	F [N]	$\Delta\ell$ [cm]	$\Delta\ell$ [cm]
0	0	0	1,4
50	0,5	0,3	3,1
100	1	1,4	5,7
150	1,5	3,6	10

tömeg	nyújtóerő	megnyúlás növekvő terhelésre	megnyúlás csökkenő terhelésre
m [g]	F [N]	$\Delta\ell$ [cm]	$\Delta\ell$ [cm]
200	2	7,3	15
250	2,5	12,5	21,3
300	3	18,6	28,4
350	3,5	24,9	37
400	4	30,6	43,4
450	4,5	36,9	47
500	5	41,1	52,8
550	5,5	47,4	55,8
600	6	50	56,7
650	6,5	52	57,4
700	7	54,4	58,3
750	7,5	56	58,7
800	8	57,2	59,3
850	8,5	58,4	59,8
900	9	59,1	60,2
950	9,5	60	60,6
1000	10	60,8	60,8

A piros gumiszalag megnyúlása az erő függvényében



Hasonló jellegű adatokat és erő-megnyúlás grafikont kaptunk a másik három gumiszalagnál is.

A mérési eredmények értékelése

A mérési eredmények szerint egyik gumiszál sem követi a Hooke-törvényt. A megnyúlás és az erő kapcsolatát szemléltető görbéken gyakorlatilag *nincsen lineáris szakasz.* A gumiszálak csökkenő terhelés esetén sem nyerik vissza az eredeti hosszukat, hanem a terhelés megszűnte után is marad bennük deformáció. Ezt jól szemlélteti a görbék *hiszterézise.* Megfigyelhető, hogy nagy terheléseknél a gumiszál megnyúlása a terhelés növelésekor alig változik, gyakorlatilag a terheléstől függetlenné válik, azaz a görbék „ellaposodnak”. Jellemző, hogy (közepesen nagy terhelésnél) mindegyik görbén található egy inflexiós pont is. A mérésnél megfigyeltük, hogy a gumiszálak a súlyok ráakasztása után bizonyos ideig (kb. 20-30 másodpercig) folyamatosan nyúlnak, és csak ezután érik el az adott terhelésnek megfelelő „végleges” hosszukat.

A terheléses mérések után mindegyik gumiszálnál többször megmértük a már újra terheletlen hosszat. Azt tapasztaltuk, hogy idővel csökken a maradék megnyúlás mértéke; a gumiszál vagy visszanyeri az eredeti hosszát, vagy csak igen kicsi megnyúlás lesz maradandó a terhelések következményeként.

A gumiszálak a terhelések során elég nagy megnyúlásokat „szenvedtek el”, hiszen a 40 cm-es kezdeti hossz akár 60-70 cm-rel is megnőtt. Arra számítottunk, hogy emiatt a gumiszalagok szélességében is jelentős változást fogunk tapasztalni. A mérések ezt nem igazolták, nagyon kicsit vagy egyáltalán nem változott a szálak szélessége. Talán célravezetőbb lett volna a szálak keresztmetszetének változását vizsgálni, de a kicsiny méretek miatt ezt a felhasznált eszközökkel nem tudtuk megvalósítani.

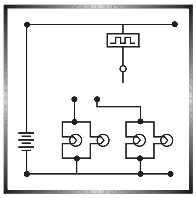
Mérési hibák

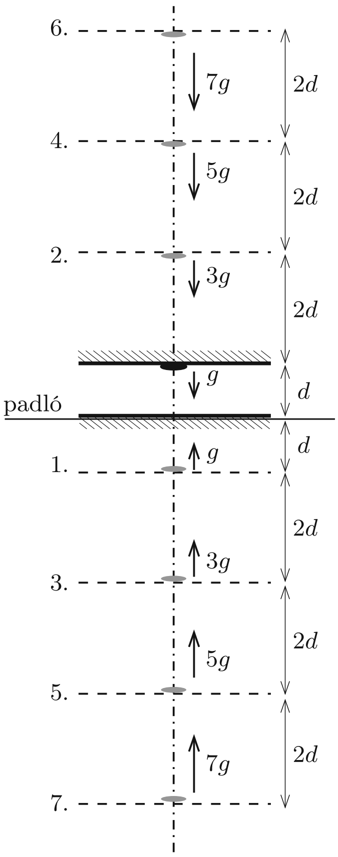
A mérési eljárásban a gumiszálak hosszát csak mm-es pontossággal tudtuk leolvasni. Nehezítette a leolvasást, hogy a gumiszálak csak egy bizonyos idő után nyerték el az adott terheléshez tartozó hosszukat, a kezdeti, hirtelen bekövetkező, nagymértékű alakváltozás után még egy ideig – ugyan sokkal kisebb mértékben – folytatódott a deformáció; emiatt nehéz volt a leolvasás időpontját eldönteni. Szisztematikus hibát jelentett még az is, hogy a mérőeszköz (mérőszalag) beosztása sem pontosan 1 mm, illetve a terhelősúlyok is mutathatnak eltérést a névleges értéküktől.

Fonyi Máté Sándor (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 11. évf.),
Ludányi Levente (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. Teljes értékű 8 mérési jegyzőkönyv. Kicsit hiányos (4–5 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 20 dolgozat.

Fizika gyakorlat megoldása





G. 675. *Egy síktükröt fektetünk a vízszintes padlóra, továbbá felette is elhelyezünk egy vele szembenéző síktükröt, amelynek a közepén egy fekete folt van. A felső tükröt elengedjük, ami így g gyorsulással szabadesésbe kezd. Mekkora és milyen irányú a folt tükörképeinek gyorsulása?*

(*4 pont*)

Megoldás. Amikor a két tükör d távolságra van egymástól, akkor a tükörképek (a tükröződések száma szerint sorszámozva) az *ábrán* látható helyeken találhatók. A képeknek a talajtól mért távolsága és a gyorsulásuk egyenesen arányos egymással, így pl. $a_1 = g$ felfelé, $a_2 = 3g$ lefelé, $a_3 = 3g$ felfelé stb.

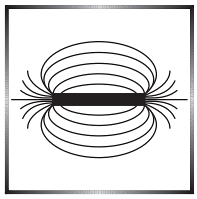
Általában $n \geqslant 1$-re

$$a_{2n-1} = (2n-1)g \qquad \text{felfelé,}$$
$$a_{2n} = (2n+1)g \qquad \text{lefelé.}$$

Csapó Tamás (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 8. évf.) és *Mészáros Emma* (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós K. Ált. Isk., 10. évf.) dolgozata alapján

27 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 9 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5126. *Egy* 20 cm *belső átmérőjű,* 1 m *magas, hőszigetelő anyagból készült, csúszós falú, kör keresztmetszetű, függőlegesen álló, alul zárt, felül nyitott cső belseje* 0 °C*-os jéggel van tele. A cső alját* 335 W *teljesítménnyel melegíteni kezdjük.*

Határozzuk meg, hogy ennek hatására mekkora állandósult sebességgel mozog a jéghenger teteje lefelé!

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

I. megoldás. A feladat szövege alapján mivel a cső tele van jéggel, az edény alját melegítjük és az edény fala hőszigetelő, ezért csak a jég legalja fog elolvadni. Tételezzük fel, hogy a jég olyan szorosan tölti ki a csövet, hogy az olvadás során létrejövő víz nem tud behatolni a jég és a cső fala közé, de a „jégdugó” el tud mozdulni a csúszós falú csőben úgy, hogy a jég alja mindig a víz felszínét éri. Ilyen körülmények között a jéghenger tetejének lefelé mozgása kizárólag abból fog adódni, hogy a víz sűrűsége nagyobb, mint a jég sűrűsége.

A jég olvadáshője $L=335\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$, ezért a másodpercenkénti

$$Q=P\cdot t=335\ \mathrm{W}\cdot 1\ \mathrm{s}=335\ \mathrm{J}$$

hő által elolvasztott jég tömege

$$m=\frac{Q}{L}=\frac{335\ \mathrm{J}}{335\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}}=0{,}001\ \mathrm{kg}=1{,}0\ \mathrm{g}.$$

A 0 °C-os jég sűrűsége $920\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}=0{,}92\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Ezek szerint a jég térfogata másodpercenként

$$V_{\text{jég}}=\frac{1\ \mathrm{g}}{0{,}92\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}=1{,}087\ \mathrm{cm}^3$$

értékkel *csökken,* a keletkezett $1{,}00\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ sűrűségű víz térfogata pedig $V_{\text{víz}}=1\ \mathrm{cm}^3$ értékkel *növekszik.* A csőben lévő jég és víz össztérfogatának csökkenése

$$\Delta V=V_{\text{jég}}-V_{\text{víz}}=0{,}087\ \mathrm{cm}^3.$$

A kör keresztmetszetű cső belső átmérője 20 cm, tehát a keresztmetszet területe

$$A=(10\ \mathrm{cm})^2\cdot\pi=314\ \mathrm{cm}^2.$$

Így a jéghenger tetejének másodpercenkénti süllyedése

$$\Delta s=\frac{\Delta V}{A}=\frac{0{,}087\ \mathrm{cm}^3}{314\ \mathrm{cm}^2}=2{,}77\cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm},$$

vagyis a süllyedés sebessége

$$v=2{,}77\cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}=0{,}017\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}\approx 1{,}0\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}.$$

Jánosik Áron (Győr, Révai M. Gimn. 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tételezzük fel, hogy a jég olvadása közben a keletkező víz behatol a cső és a jég közé, és amikor a víz elég magasra ér, a maradék jég úszni fog a vízben. (Mivel a cső tele van jéggel, a felkúszó víz térfogata igen kicsi, tehát az úszás feltétele nagyon hamar teljesül.) Ettől kezdve a vízszint magassága nem változik, hiszen a jég és a víz össztömege állandó, emiatt a cső aljánál fellépő erő sem változhat. Ez az erő a nyomással, az pedig a víz magasságával arányos.

A jéghenger tetejének süllyedési sebessége a vízszint feletti jégdarab térfogatának csökkenéséből számítható ki. A kalorimetrikus egyenletből következik, hogy másodpercenként 1 g jég olvad meg (lásd az I. megoldást), ez a 314 cm^2 keresztmetszetű cső 0,00347 cm magas darabjának felel meg. A víz feletti jégdarab térfogata a jég teljes térfogatának mintegy 8%-a, ennek magassága tehát másodpercenként $0{,}00347 \cdot 0{,}08 = 2{,}77 \cdot 10^{-4}$ centiméterrel csökken.

A jéghenger tetejének süllyedési sebessége:

$$v = 2{,}77 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \approx 1\ \frac{\mathrm{cm}}{\text{óra}}.$$

Markó Gábor (Győr, Révai M. Gimn. 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

Megjegyzés. Az I. és a II. megoldás eredménye megegyezik, jóllehet különböző feltételezéssel éltek: az egyik esetben a jéghenger „ült” egy egyre magasabbá váló vízhengeren, a másikban pedig „úszott” a változatlan magasságú vízben. Könnyen belátható, hogy az eredmények egyezése nem véletlen.

Képzeljük el, hogy a jéghenger aljánál egy jól záró tömítés akadályozza meg a víz felkúszását, tehát a folyamat az I. megoldásban leírtak szerint megy végbe. Valamennyi idő, pl. 1 óra alatt a jéghenger teteje 1 cm-t mozdul el lefelé. Ha ekkor a tömítés elromlik, és a víz be tud hatolni a cső fala és a jég közé, a II. megoldásban leírt eset valósul meg. Mivel a jég majdnem teljesen kitölti a cső keresztmetszetét, a behatoló víz térfogata elhanyagolhatóan kicsi, emiatt a jéghenger teteje ugyanolyan magasan marad. A süllyedés sebessége tehát a II. esetben is 1 cm óránként.

(G. P.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 2 dolgozat.

P. 5132. *Gépkocsival útnak indulunk. Az autópálya elejére érve a gépjármű sebességét és az indulástól számított átlagsebességét mérő készülék kijelzőjén* 37 km/h *látható. Ettől kezdve a legnagyobb megengedett sebességgel* (130 km/h) *haladunk.*

a) *Adjuk meg, hogyan változik az átlagsebesség az idő függvényében! Milyen körülmények befolyásolják ezt a függvényt?*

b) *Mennyi idő múlva fogjuk azt látni, hogy az – egész értékre kerekített – átlagsebességünk* 130 km/h?

(*4 pont*) Közli: *Härtlein Károly,* Budapest

Megoldás. *a*) Az autópálya előtti szakaszon a gépkocsi az indulástól számított t_0 idő alatt

$$s_0 = 37\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_0$$

utat tett meg.

Ettől fogva a gépkocsi egyenletesen halad 130 km/h sebességgel, tehát további t_1 idő alatt $s_1 = 130\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_1$ utat tesz meg.

Az indulástól számított átlagsebessége (bármely pillanatban):

$$v_{\text{átlag}} = \frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}} = \frac{s_0 + s_1}{t_0 + t_1} = \left(\frac{37\,t_0}{t_0 + t_1} + \frac{130\,t_1}{t_0 + t_1}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A teljes útra vonatkoztatott átlagsebesség – láthatóan – attól függ, hogy mennyi (t_0) ideig haladtunk az indulásától az autópálya elejéig. (Természetesen azt is mondhatjuk, hogy az átlagsebességünk függ az indulás helye és az autópálya közötti út s_0 hosszától.) Ha $t_1 \gg t_0$, akkor az átlagsebesség állandóan (jó közelítéssel) 130 km/h, ha pedig $t_1 \ll t_0$, akkor az átlagsebesség 37 km/h. Az autópályán egyenletes sebességgel haladva az átlagsebességünk monoton növekszik.

b) Legyen $v_{\text{átlag}} = 129{,}5$ km/h; ez az az érték, amit a készülékünk kerekítve 130 km/h-nak mutat. Az általános képletbe helyettesítve: azt kapjuk, hogy

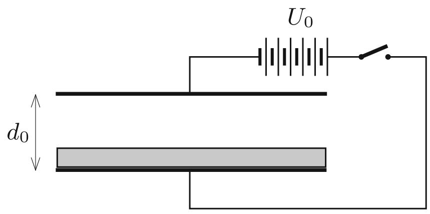
$$129{,}5 = \frac{37\,t_0}{t_0 + t_1} + \frac{130\,t_1}{t_0 + t_1},$$

aminek megoldása $t_1 = 185\,t_0$.

Kardkovács Levente (Budaörs, Illyés Gy. Gimn. és Közg. Szki, 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A kapott képletből leolvasható, hogy a városi forgalomban eltöltött időnél lényegesen hosszabb idő alatt érjük csak el azt a (kerekített) sebességértéket, ami a mindvégig autópályán való haladásnak felelne meg.

35 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 3 dolgozat.



P. 5141. *Az ábrán látható, vákuumban lévő síkkondenzátor lemezei vízszintesek, távolságuk $d_0 = 4$ cm. Az alsó lemezre egy $d_0/4$ vastagságú alumíniumlemezt helyezünk, és a kondenzátorra nagyfeszültséget kapcsolunk.*

a) *Mekkora legyen U_0, hogy a lemez felemelkedjék?*

b) *Adott U telepfeszültségnél mekkora vastagságú alumíniumlemez emelkedhet fel a d_0 lemeztávolságú síkkondenzátor alsó fegyverzetéről?*

c) *Van-e olyan feszültség, amely mellett biztosan megemelkedik az alumíniumlemez, akármekkora (d_0-nál kisebb) a vastagsága?*

(*Feltételezzük, hogy az alumíniumlemez mindvégig vízszintes marad. A kondenzátor fegyverzeteinek mérete sokkal nagyobb d_0-nál, a széleffektusok elhanyagolhatóak.*)

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. *a*) Legyen d a lemez teteje és a kondenzátor felső része közötti távolság (esetünkben $d = \frac{3}{4}d_0 = 3$ cm), a lemez területe pedig A. A kialakuló elektromos tér olyan, mint amilyen egy U_0 feszültséggel feltöltött,

$$C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

kapacitású kondenzátor belsejében lenne. A kondenzátor felső lemezére $Q=CU_0$ töltés kerül, az alumíniumlemez felső oldalára pedig $-Q$. (A lemez belsejében nincs elektromos tér, a kondenzátor alsó lemeze pedig töltetlen.)

Az így kialakuló „új kondenzátor" belsejében $E=U_0/d$ nagyságú, homogénnek tekinthető elektromos tér lesz, ami

$$F=\frac{1}{2}EQ=\frac{CU_0^2}{2d}=\frac{8}{9}\,\frac{AU_0^2\varepsilon_0}{d_0^2}$$

erőt fejt ki az alumíniumlemezre. Ha ez az erő nagyobb, mint a lemez

$$G=mg=\varrho gA(d_0-d)=\frac{1}{4}\varrho gAd_0$$

súlya, akkor a lemez felemelkedik. ($\varrho=2700\ \mathrm{kg/m^3}$ az alumínium sűrűsége.) Ez akkor következik be, ha

$$U_0>\sqrt{\frac{9}{32}\,\frac{\varrho gd_0^3}{\varepsilon_0}}\approx 232\ \mathrm{kV}.$$

b) Legyen most a tápfeszültség U, a lemez vastagsága pedig xd_0. A lemez felemelkedésének feltétele:

$$F=\frac{AU^2\varepsilon_0}{2d_0^2(1-x)^2}>\varrho gAxd_0=G,$$

vagyis adott U esetén akkor emelkedik fel a lemez, ha a vastagságát jellemző x számra érvényes, hogy

$$\frac{\varepsilon_0U^2}{2\varrho gd_0^3}>x(1-x)^2.$$

c) A *b*) részben kapott egyenlőtlenséget a feszültségre rendezve:

$$U>\sqrt{x(1-x)^2}\cdot\sqrt{2\,\frac{\varrho gd_0^3}{\varepsilon_0}}\approx\sqrt{x(1-x)^2}\cdot 620\ \mathrm{kV}.$$

Az $f(x)=\sqrt{x(1-x)^2}$ függvénynek $x^*=\frac{1}{3}$-nál helyi maximuma van, és a legnagyobb függvényérték a fizikailag értelmes $0<x<1$ tartományban

$$f_{\max}=f(x^*)=\sqrt{\frac{4}{27}}\approx 0{,}385.$$

(Ezt differenciálszámítással, grafikus ábrázolással, algebrai átalakítással, esetleg a `https://www.wolframalpha.com/` vagy a geogebra program segítségével láthatjuk be.)

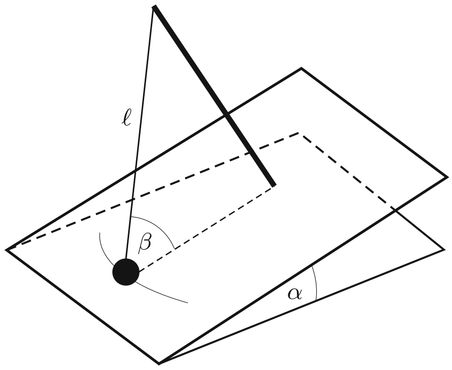
Ezek szerint ha az U feszültség nagyobb, mint

$$U^* = f_{\max} \cdot 620\ \text{kV} \approx 240\ \text{kV},$$

akkor az alumíniumlemez a vastagságától függetlenül biztosan felemelkedik.

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

18 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 8 dolgozat.

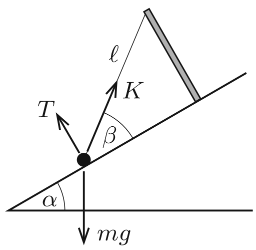


P. 5144. *Egy α hajlásszögű lejtő síkjára merőlegesen tartórudat rögzítünk. A rúd tetejéhez hozzáerősítjük egy ℓ hosszúságú fonálinga felső végpontját. Az inga fonala β szöget zár be a lejtő síkjával.*

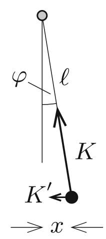
Mekkora az inga kis amplitúdójú lengéseinek periódusideje, ha $\alpha + \beta < 90°$, és a súrlódás elhanyagolható?

(*4 pont*)

Megoldás. Az *1. ábra* az elrendezés oldalnézeti (a tartórúd és az egyensúlyi helyzetű fonál által meghatározott síkra merőleges nézetét) mutatja. Feltüntettük az ingatestre ható erőket: K a fonalat feszítő erő, T a lejtő által kifejtett „tartóerő” és mg az m tömegű ingatestre ható nehézségi erő.



1. ábra



2. ábra

Kis amplitúdójú lengések esetén az ingatest mozgása jó közelítéssel egyenes vonalú (vízszintes irányú) mozgás. Ez az egyenes és az inga fonala által meghatározott sík a lengés síkja. A *2. ábra* a lengés síkjára merőleges irányú „szembenézetet” ábrázolja. Ezen a nézeten leolvasható, hogy amikor az egyensúlyi helyzettől mért szögkitérés φ, vagyis a vízszintes irányú kitérés

$$x = \ell \sin\varphi \approx \ell\varphi,$$

akkor az ingatestet

$$K' = K \sin\varphi = K\frac{x}{\ell} \tag{1}$$

nagyságú erő húzza vissza az egyensúlyi helyzet felé. Az ingatest ténylegesen egy körív mentén mozog, ezt a mozgást azonban közelíthetjük egy egyenes (a kör érintője) menti mozgással.

A kis kitérésű mozgás során az ingatest sebessége mindvégig kicsi, ezért a tartórúd talppontja felé mutató, a sebesség négyzetével arányos a_{cp} centripetális gyorsulást elhanyagolhatjuk. Írjuk fel az oldalnézeti ábrán lejtő irányúnak látszó, a T-re merőleges irányban a mozgásegyenletet:

$$ma_{\mathrm{cp}} = mg\sin\alpha - K\cos\beta\cos\varphi \approx 0,$$

vagyis

$$K \approx mg\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\varphi} \approx mg\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}. \tag{2}$$

(Felhasználtuk, hogy kis kitérések esetén $\cos\varphi \approx 1$.)

Amennyiben (2)-t a vízszintes irányú erő (1) képletébe helyettesítjük, megkapjuk az x kitéréshez tartozó erőt:

$$K' = \frac{mgx}{\ell}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \equiv D\cdot x.$$

Felismerhetjük, hogy ez az erőtörvény megegyezik a $D = \frac{mg}{\ell}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ „rugóállandójú" harmonikus rezgőmozgás erőtörvényével, és emiatt a feladatban szereplő ferde inga periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}}.$$

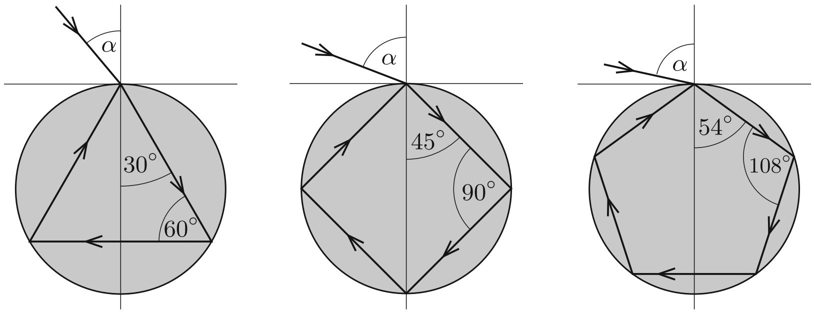
Sepsi Csombor Márton (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

39 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 1 dolgozat.

P. 5149. *Egy fizikatanár röpdolgozatot írat két csoportban. Az egyik csoport feladata a következő: „Mekkora beesési szögű az a vékony fénysugár, ami gömb alakú vízcseppbe lépve szabályos háromszög mentén jár körbe?" A másik csoport ugyanezt a feladatot kapja, de ekkor szabályos négyszög, vagyis egy négyzet oldalélei mentén kell haladnia a fénysugárnak. Feladhatja-e a tanár ugyanezt a példát a pótdolgozatban szabályos ötszöggel? Határozzuk meg a beesési szögeket az egyes esetekben! (A víz törésmutatója $\frac{4}{3}$.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Nevezzük a beesési szöget α-nak, a törési szöget β-nak. Ha a fénysugár szabályos háromszög mentén halad, akkor $\beta = 30^\circ$, négyzetnél $\beta = 45^\circ$, szabályos ötszögnél pedig $\beta = 54^\circ$ (*1. ábra*).



1. ábra

A törési törvény szerint

$$\sin\alpha = n\sin\beta = \frac{4}{3}\sin\beta.$$

Háromszög esetén

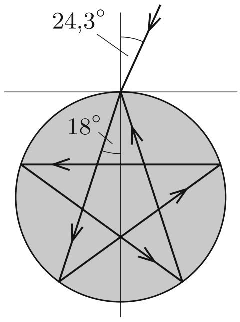
$$\sin\alpha = 0{,}667 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 41{,}8^\circ,$$

négyszögnél

$$\sin\alpha = 0{,}943 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 70{,}5^\circ,$$

az ötszögnél pedig

$$\sin\alpha = 1{,}08 > 1.$$



2. ábra

Mivel $\sin\alpha \leqslant 1$, a fenti egyenletnek nincs megoldása. Ezek szerint *nem lehet* olyan szögben megvilágítani a vízcseppet, hogy abban a fénysugár szabályos ötszöget írjon le.

Páhán Anita Dalma (Budapest, Eötvös József Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A fénysugár haladhat egy szabályos ötszög csúcspontjai között egy csillagötszög élei mentén (*2. ábra*). A beesési szög ilyenkor 24,3°.

Balogh Dávid (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)

44 dolgozat érkezett. Helyes 38 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (2 pont) 2 dolgozat.

P. 5150. *Két teljesen egyforma, $n = 1{,}5$ törésmutatójú üvegből készített síkdomború, vékony lencse közül az egyiknek a sík, a másiknak a domború felületét tesszük tükrözővé. Mekkora az így kapott két leképező eszköz fókusztávolságának aránya?*

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Könnyen belátható, hogy a szorosan egymás mellé helyezett (vékony) optikai eszközök fókusztávolságának reciprokösszege megadja az eredő fókusztávolság reciprokát. Legyen például az első eszköz fókusztávolsága f_1, a másodiké f_2. Az eszköztől t távolságban lévő tárgy képének k_1 távolságára a leképezési törvény szerint fennáll:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{f_1}.$$

Ez a virtuális kép a másik leképező eszköz szempontjából $t_2=-k_1$ tárgytávolságnak felel meg (hiszen a második eszköznek a szokásossal ellentétes oldalán jelenik meg). Ezek szerint

$$-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f_2}.$$

A fenti két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f_{\text{eredő}}}.$$

A feladatban szereplő, egyik oldalán tükröződővé tett lencse tekinthető úgy, mintha három eszköz szerepelne: lencse-tükör-lencse. A síkdomború lencse fókusztávolságának ismert képlete alapján:

$$\frac{1}{f_{\text{lencse}}}=\frac{n-1}{R}=\frac{1}{2R},$$

ahol R a lencse domború oldalának görbületi sugara.

Az első esetben, amikor a sík felület a tükröző, a leírtak alapján:

$$\frac{1}{f^{(\mathrm{I})}_{\text{eredő}}}=\frac{1}{f_{\text{lencse}}}+\frac{1}{f_{\text{lencse}}}=\frac{1}{R},\qquad \text{tehát}\qquad f^{(\mathrm{I})}_{\text{eredő}}=R.$$

(A síktükröt nem kell figyelembe venni, mert az nem fókuszál, fókusztávolsága „végtelen nagynak” tekinthető.)

A második esetben az eredő fókusztávolság reciproka:

$$\frac{1}{f^{(\mathrm{II})}_{\text{eredő}}}=\frac{1}{f_{\text{lencse}}}+\frac{1}{f_{\text{tükör}}}+\frac{1}{f_{\text{lencse}}},$$

és mivel $f_{\text{tükör}}=R/2$,

$$\frac{1}{f^{(\mathrm{II})}_{\text{eredő}}}=\frac{1}{2R}+\frac{2}{R}+\frac{1}{2R}=\frac{3}{R},\qquad \text{vagyis}\qquad f^{(\mathrm{II})}_{\text{eredő}}=\frac{R}{3}.$$

A kérdéses arány tehát: $\frac{f^{(\mathrm{I})}_{\text{eredő}}}{f^{(\mathrm{II})}_{\text{eredő}}}=3$.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 391. Puha ceruzával rajzolunk egy papírlapra. Mérjük meg a grafitréteg vastagságát!

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

G. 689. A lánctalpas játékautó lánctalpai két-két olyan kerékre feszülnek ki, amelyek középpontja egymástól 22 cm-re van. Mennyi ideig marad egy-egy láncszem mozdulatlanul a földön, ha a játékautó 4 cm/s sebességgel halad előre? Hogyan függ ez az idő a kerekek sugarától?

(*3 pont*)

G. 690. Az asztalon két teljesen egyforma pohár van színültig töltve vízzel. Az egyik pohárban a víz tetején egy pingponglabda úszik. Melyik pohár nyomja jobban az asztalt?

(*3 pont*)

G. 691. Két azonos hajlásszögű, egymással szemben álló lejtőt rövid, súrlódásmentes szakasz köt össze. Az egyik lejtő annyira síkos, hogy rajta a súrlódás elhanyagolható, a másik lejtő viszont enyhén érdes (vagyis az erre a lejtőre helyezett test gyorsulva csúszik le). Egy kis méretű testet ugyanabból a magasságból először az egyik, másodszor a másik lejtőről indítunk el lökésmentesen. Melyik esetben jut magasabbra a kis test az ellenkező oldalon? Legyen pl. a lejtők hajlásszöge 30°, az érdes lejtőn 0,2 a súrlódási tényező, továbbá a testeket indítsuk 1 méteres magasságból.

(*4 pont*)

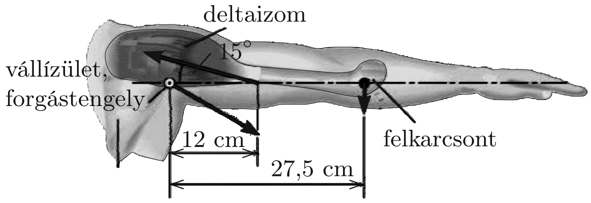
G. 692. Magashegyi túrán a friss hóból készítenek ivóvizet. Felmelegítenek 4 dl vizet $80\,^\circ$C-ra, majd beleraknak 5 darab 8 cm-es átmérőre gyúrt, $0\,^\circ$C hőmérsékletű hógolyót. Így $16\,^\circ$C-os vízhez jutnak. Mekkora a hógolyó sűrűsége?

(*4 pont*)

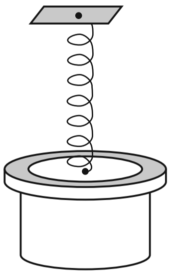
P. 5175. Egy személyautó tengelytávolsága (az első és a hátsó kerekek közötti távolság) 2,6 m, a gépkocsi kerékszélessége (a két első vagy a két hátsó keréknél mérve a futófelületek közepének távolsága az egyenesen haladó autónál) pedig 1,8 m. Frissen behavazott, vízszintes útfelületen egy teljes kört tesz meg az autó. Hány keréknyomot látunk? Mekkora az egyes keréknyomkörök átmérője, ha a legkisebbé 16 m?

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5176. Egy diák vízszintesen kinyújtott karral áll. Karjának tömege 3 kg, és a kar tömegközéppontja éppen a diák könyökénél van, 27,5 cm-re a vállízületétől mint forgástengelytől az *ábrán* látható módon. A diák felkarjának deltaizmában ható erő 15°-os szöget zár be a vízszintessel, és a támadáspontja 12 cm-re van a vállízülettől. Szerkesztés vagy számítás útján állapítsuk meg, hogy milyen nagy erő ébred a diák deltaizmában!



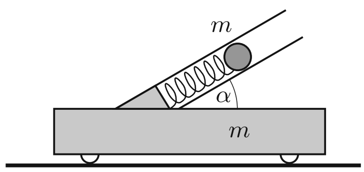
(*4 pont*) *Amerikai feladat*



P. 5177. Egy függőleges helyzetű, 400 N/m direkciós állandójú húzó-nyomó rugóra 50 dkg-os nehezéket akasztottunk. A nehezéken – a rugó csatlakozása körül – egy 10 dkg-os fémgyűrű nyugszik. A gyűrűt és a nehezéket együtt v_0 kezdősebességgel hirtelen elindítjuk lefelé. Közös mozgásuk során, amikor a két test gyorsulása a legnagyobb, a gyűrű súlya az eredeti érték háromszorosa lesz. Az indítástól számítva mennyi idő elteltével válik súlytalanná a gyűrű?

(*4 pont*) Közli: *Kiss Tamás,* Heves

P. 5178. Vízszintes talajon lévő, m tömegű kiskocsira elhanyagolható tömegű, $\alpha = 30°$-os szögben beállított rugós puskát rögzítettünk, amely egy m tömegű lövedéket lő ki két esetben. Az első esetben a kocsi rögzített, a második esetben szabadon mozoghat. A lövedék függőleges irányú emelkedési magassága az első esetben h_1, a második esetben h_2. Határozzuk meg a h_2/h_1 arányt!



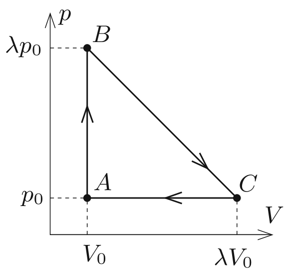
(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5179. Egy m tömegű jégkorong v_1 sebességgel csúszik, majd egy állandó u sebességgel mozgatott ütőről merőlegesen és rugalmasan visszapattan.

a) Mekkora v_2 sebességgel pattan vissza a korong?

b) Mekkora legyen az ütő sebessége, hogy az ütközés után a korong megálljon?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

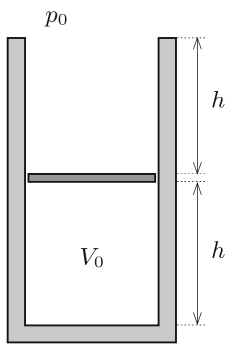


P. 5180. Egyatomos ideális gáz az *ábrán* látható $ABCA$ körfolyamatot végzi. Mekkora a körfolyamat hatásfoka, ha a gáz (kelvinben mért) legmagasabb hőmérséklete kilencszer akkora, mint a legalacsonyabb hőmérséklet?

(Lásd még *Gálfi László: Hőfelvétel vagy hőleadás?* című cikket a KöMaL 2009. évi 4. számában vagy a honlapunkon!)

(*5 pont*) Közli: *Dezsőfi György,* Miskolc

P. 5181. Az *ábrán* látható, felül nyitott tartályban egy vékony, elhanyagolható tömegű dugattyú áll éppen a tartály magasságának felénél. Az elzárt levegő térfogata V_0, a légköri nyomás értéke 76 Hgcm. A dugattyúra lassan higanyt öntünk egészen addig, míg a higanyszint el nem éri a tartály felső szélét. Mennyivel mozdul el a dugattyú? (A tartály és a dugattyú is hőszigetelő; $h = 38$ cm.)



(*4 pont*) Közli: *Berke Martin,* Budapest

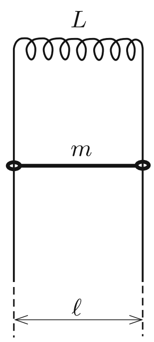
P. 5182. Az autó hátsó ablakának jégtelenítője 13 darab, az üvegbe ragasztott vékony, szinte láthatatlan vezetékből áll. A vezetékek anyagának fajlagos ellenállása $8{,}8\cdot 10^{-7}$ Ωm. A vezetékek egyenként 1,3 m hosszúak, és párhuzamosan vannak kapcsolva a 12 V-os feszültségforrásra. A jégtelenítő 21 g 0 °C-os jeget 2 perc alatt olvaszt meg 0 °C-os vízzé. Tegyük fel, hogy az összes fűtési energia a jég olvasztására fordítódik.

a) Mekkora a vezeték átmérője?

b) Hány perc alatt olvad el az ablakon ugyanekkora mennyiségű, −10 °C-os jég 0 °C-os vízzé?

c) Mekkora az egyes vezetékeken átfolyó áram erőssége?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely



P. 5183. Az *ábrán* látható függőleges sínpár felső végét L induktivitású tekerccsel zártuk. A sínek távolsága ℓ, rajtuk súrlódásmentesen mozoghat egy m tömegű, elhanyagolható ellenállású rúd. A külső mágneses tér $\boldsymbol{B}$ indukcióvektora vízszintes és merőleges a sínek síkjára.

A rudat elengedve

a) legfeljebb mekkora feszültség indukálódik a tekercsben;

b) legfeljebb mekkora lesz az indukált áram erőssége?

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 5184. Egy nagy felbontású optikai rács a merőlegesen ráeső lézersugarat már első rendben 45°-os szögben képes eltéríteni. Mi történik, ha az eltérített lézersugár útjába egy másik, ugyanilyen optikai rácsot helyezünk

a) az eredeti ráccsal párhuzamosan;

b) az eredeti rácsra merőlegesen?

(A két rács rései mindkét esetben párhuzamosak egymással.)

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5185. Egy vízszintes lapon mozgó kis korongra a pillanatnyi sebességével arányos fékezőerő hat. Kétféle kísérletet végzünk vele:

(*i*) Ha meglökjük v_0 sebességgel, akkor a megállásáig 50 cm utat tesz meg.

(*ii*) Amikor a meglökött korong sebessége már $v_0/2$-re csökkent, nekiütközik egy másik, álló korongnak, amelyre ugyancsak a sebességével arányos fékezőerő hat. (Az arányossági tényező mindkét korongnál ugyanakkora.) Az ütközés egyenes és rugalmas. Meglepő módon a két korong egymás mellett áll meg.

a) Mekkora a két korong tömegének aránya?

b) Az ütközés helyétől milyen messze áll meg a két korong?

(*6 pont*) A *Kvant* nyomán

❄

Beküldési határidő: 2020. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 9. December 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 542): **K. 639.** There are 53 passengers in a bus: men, women, girls and boys. The number of women is three times the number of boys, and 10 more than the number of girls. The total number of men and boys is 15. How many men, women, girls and boys are travelling in the bus? **K. 640.** The square of a two-digit number ending in 5 can also be calculated as follows: the digit in the tens' place is multiplied by the number greater by 1, and 25 is written after the product. Explain why this method works. **K. 641.** Some points are selected in the interior of a convex quadrilateral. These points are connected to each other and to the vertices of the quadrilateral with line segments such that the line segments have no intersection inside the quadrilateral, and they divide the quadrilateral into small triangles and pentagons. (Every interior point is a vertex of some triangle or quadrilateral.) Is it possible to divide the quadrilateral into exactly 2019 polygons in this way? **K. 642.** Find all positive integers x and y such that $x^2 - y^2 = 2019$. **K. 643.** In the fraction $\frac{a6bc}{de3fg}$

each digit, except 0, occurs exactly once. What may each letter denote if the value of the fraction is $\frac{1}{2}$?

New exercises for practice – competition C (see page 543): **Exercises up to grade 10: C. 1574.** The points marked in the *figure* are labelled with the integers 0 to 10. Then the sum of the numbers on the vertices is written in each triangular region. What are the largest and the smallest possible values of the sum of the 14 numbers obtained in this way? **C. 1575.** Find all pairs of positive primes p, q for which $2pq+2p-q=q^2-8$. (Proposed by *T. Imre,* Marosvásárhely) **Exercises for everyone: C. 1576.** A unit circle is centred at O, and P is a point such that $OP=2$. Consider a secant through P that intersects the circle at points M and N such that M bisects the line segment NP. Prove that the area of triangle OMN is smaller than $\frac{1}{2}$. **C. 1577.** The two and three digit numbers $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, $\overline{cab}$ (in decimal notation), in this order are three consecutive terms of an increasing, infinite arithmetic sequence. How many terms does this sequence have between 1552 and 2020? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1578.** The circumferences of two congruent rectangles intersect at eight points. Show that the area of the overlapping part of the rectangles is greater than half the area of a rectangle. **Exercises upwards of grade 11: C. 1579.** Find the real solutions of the equation $(x-11)^{\log_2(x-10)}=(x-11)^{\log_{\frac{1}{2}}(x-11)}$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1580.** Barbara places 10 coins on a table in a row at random. In each step, she turns over two adjacent coins. What is the probability that she cannot achieve after a sufficient number of steps, that all coins should have "heads" on top?

New exercises – competition B (see page 544): **B. 5062.** Solve the following simultaneous equations: $x[x]+y[y]=1$, $[x]+[y]=1$. (*3 points*) (*MI&Q*) **B. 5063.** In a triangle ABC, $BC<AC$ and $\angle ACB$ is a right angle. The tangents drawn from point A to the circle of diameter BC touch it at C and D. The line of tangent AD intersects line BC at point E. The midpoint of line segment BC is O. Prove that the area of triangle DEO equals the area of triangle AEB. (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5064.** The "board" in the *figure* consists of 26 fields. In how many different ways is it possible to cover the board with 13 "dominoes"? Each domino covers two adjacent fields. (Solutions obtained from each other by rotation are considered different.) (*4 points*) **B. 5065.** The centre of the circumscribed circle of an acute angled triangle ABC is O, and the reflections of O in sides BC, CA and AB are O_A, O_B, and O_C, respectively. Show that the lines AO_A, BO_B and CO_C are concurrent. (*4 points*) **B. 5066.** Thirty students were taking an exam in a subject called "Tautologics". The students were sitting down in a classroom, and the teacher asked them a single question, "How many of the students sitting in this room are going to fail this exam altogether?" The students had to name a number, one by one, in a row. After each answer, the teacher immediately announced the result which was either "pass" or "fail". When the exam was over, the Student Union requested an inspection by the School District. If it turns out that any student gave the correct answer but still failed the exam, all the results will be cancelled, and everyone will receive a "pass" grade. Is there a strategy for the students to achieve that everyone should pass the exam? (*5 points*) (*Russian problem*) **B. 5067.** The midpoint of side AB of an acute angled triangle ABC is F, and the line e through the point F halves the perimeter of triangle ABC. Line e intersects the lines of sides BC and CA at points D and E, respectively. Show that the perpendiculars drawn to AB at F, to BC at D, and to CA at E are concurrent. (*5 points*) **B. 5068.** Let p be an at most 1998th-degree polynomial such that the values $p(1),p(2),\ldots,p(2000)$ form a permutation of the numbers $1,2,\ldots,2000$. Does

it follow that $p(1)$ and $p(2000)$ are 1 and 2000 in some order? (*6 points*) **B. 5069.** In the quadrilateral $ABCD$, $AB=AD$ and $BC=DC$. Let M be the intersection of the perpendiculars drawn to side AB at B, and side CD at D. Show that $\angle AMD=\angle BMC$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 546): **A. 764.** We call a diagonal of a polygon *nice,* if it is entirely inside the polygon or entirely outside the polygon. Let P be an n-gon with no three of its vertices being on the same line. Prove that P has at least $\frac{3}{2}(n-3)$ nice diagonals. (Proposed by *Bálint Hujter,* Budapest and *Gábor Szűcs,* Szikszó) **A. 765.** Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ which satisfy the following equality for all $x,y\in\mathbb{R}$: $f(x)f(y)-f(x-1)-f(y+1)=f(xy)+2x-2y-4$. (Proposed by *Dániel Dobák,* Budapest) **A. 766.** Let T be any triangle such that its side-lengths a, b, and c and its circumradius R are positive integers. Show that *a*) the inradius r of T is a positive integer; *b*) the perimeter P of T is a multiple of four; and *c*) all three of a, b, and c are even. (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 570)

M. 391. Using a soft graphite pencil, draw marks to a piece of paper. Measure the thickness of the graphite layer.

G. 689. The tracks of a toy tracked vehicle are suspended by two wheels whose centres are at a distance of 22 cm from each other. How long does a chain-link remain at rest on the ground, if the speed of the toy is 4 cm/s? How does this time depend on the radius of the wheel? **G. 690.** There are two alike glasses filled brimful with water on the table. In one of them a ping-pong ball is floating on the surface of the water. Which glass exerts a greater force on the table? **G. 691.** Two inclined planes of the same elevation angle are facing towards each other. They are connected with a short frictionless section. One of the planes is so slippery that friction is negligible on it, whilst the other plane is a bit rough (so an object released on this plane slides down with some acceleration). A small object is released without initial speed from the same height once from one of the planes and next from the other plane. In which case will it go higher up on the other plane? For example let the angle of elevation be 30°, the coefficient of kinetic friction on the rough plane be 0.2, and the object is released from a height of 1 metre. **G. 692.** Mountaineers, when they are climbing mountains, make drinking water from fresh snow. They warm up 4 dl water to $80\,^\circ$C, and then they put 5 snowballs of diameter 8 cm, and of temperature $0\,^\circ$C into it. They gain water at a temperature of $16\,^\circ$C. What is the density of the snowball?

P. 5175. The wheelbase (distance between the axles of the front and the rear wheels) of a car is 2.6 m and its track width is 1.8 m. (The track width is measured as the distance between the centres of the tread areas of the tires of the two front or two rear wheels when the car is moving along a straight line.) The car completes a whole circle on a level road which is covered with fresh snow. How many car tire traces can be observed in the snow? What is the diameter of each circular trace if the diameter of the smallest circle is 16 m? **P. 5176.** A student is standing with horizontally stretched arms. The mass of his arm is 3 kg, and the centre of mass of the arm is exactly at the elbow of the student, which is at a distance of 27.5 cm from the joint at the shoulder of the student about which the arm can be turned, as it is shown in the *figure.* The force exerted in the deltoid muscle of the student encloses an angle of 15° with the horizontal, and its point of application is at a distance of 12 cm from the joint in the shoulder. Using calculation or classical construction, determine the force exerted by the deltoid muscle of the student. **P. 5177.** A 500 g object is attached to a vertical compression-expansion spring of spring constant 400 N/m. On the object – next to the attachment of the spring – there is a 100 g metal ring at rest. The object and the ring is suddenly given an initial downward speed of v_0. During their motion together, when their acceleration is the greatest, the apparent weight of the ring becomes three times as much as its original weight was. How much time elapses from the beginning of their motion until the ring becomes weightless? **P. 5178.** There is a spring gun of negligible mass fixed at an angle of $\alpha = 30^\circ$ to a cart of mass m on the horizontal ground. The spring gun shoots a bullet in two cases. In the first case the cart can move freely, whilst in the other the cart is fixed. The vertical displacement of the bullet in the first case is h_1, and in the second case it is h_2. Determine the ratio h_2/h_1. **P. 5179.** A hockey puck of mass m is sliding at a speed of v_1, and then it bounces back elastically and perpendicularly from an ice hockey stick which was moved at a constant speed of u. *a*) After bouncing back, what is the speed v_2 of the puck? *b*) What should the speed of the stick be in order that after the collision the puck stop? **P. 5180.** A sample of monatomic ideal gas is taken through the cyclic process $ABCA$ shown in the *figure.* What is the efficiency of the cyclic process if the highest temperature of the gas (measured in kelvins) is nine times as big as the lowest temperature of the gas? **P. 5181.** There is a thin negligible-mass piston at exactly the middle of the height of a container which is open at its top and is shown in the *figure.* The volume of the enclosed air is V_0, and the atmospheric pressure is 76 cmHg. Slowly mercury is poured to the piston, until the level of the mercury reaches the rim of the container. How much does the piston move? (The container and the piston are thermal insulators; and we have $h = 38$ cm.) **P. 5182.** The defroster of the rear window of a car consists of 13 very thin, nearly invisible pieces of wire glued into the glass of the window. The resistivity of the material of the wires is $8.8 \cdot 10^{-7}$ Ωm. Each wire is 1.3 m long and they are all connected to the 12 V electric generator of the car in parallel. The defroster melts 21 g 0 °C ice to 0 °C water in 2 minutes. Suppose that all the energy of heating is used to melt the ice. *a*) What is the diameter of the wire? *b*) How long does it take to melt the same amount of ice at a temperature of −10 °C to water at a temperature of 0 °C? *c*) What is the current in each of the wires? **P. 5183.** A coil of inductance L is connected to the top ends of a vertical pair of rails shown in the *figure.* The distance between the rails is ℓ. A small rod of mass m and of negligible resistance can move along the rails without friction. The external magnetic field $\boldsymbol{B}$ is horizontal and perpendicular to the plane of the rails. Releasing the rod *a*) at most what is the induced electromotive force in the coil; *b*) and at most what is the induced current? **P. 5184.** A high-resolution diffraction grating can deflect a laser beam which enters perpendicularly to the grating, such that the angle of the first order maximum is 45°. What happens if another similar diffraction grating is placed into the path of the diffracted beam such that it is *a*) parallel to the original diffraction grating; *b*) perpendicular to the original diffraction grating? (The slits of the gratings are parallel to each other in both cases.) **P. 5185.** A small disc is moving along a horizontal surface. The resistive force exerted on the disc is proportional to the instantaneous speed of the disc. Two experiments are carried out: (*i*) If the disc is pushed and given an initial speed of v_0, then it moves 50 cm until it stops. (*ii*) When the speed of the initially pushed disc decreases to the value of $v_0/2$, the disc collides with another initially standing disc. The resistive force exerted on this other disc is also proportional to the speed of this disc. (The proportionality constant is the same for both discs.) The collision is head-on and elastic. Surprisingly, the two discs stop next to each other. *a*) What is the ratio of the masses of the discs? *b*) How far from the position of the collision did the discs stop?

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 69. évfolyamának tartalomjegyzéke (2019)

Cikkek:

Versenyek:

Közlemények:

Mellékletek:

MATEMATIKA

Cikkek:

Versenyek:

Közlemények:

Nekrológ:

Emelt szintű matematika érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

Helyesbítések: 19., 66

Megoldások:

C gyakorlatok megoldásai:

B feladatok megoldásai:

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

A B pontversenyben kitűzött feladatok:

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok:

Angol nyelvű kivonatok:

INFORMATIKA

Az I pontversenyben kitűzött feladatok:

Az S pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok:

Mindkét pontversenyben kitűzött I/S nehezebb feladatok:

FIZIKA

Cikkek, közlemények:

Versenyek, versenybeszámolók:

Emelt szintű fizika érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

Mérési feladatok megoldásai:

Fizika gyakorlatok megoldásai:

Fizika feladatok megoldásai:

Kitűzött mérési feladatok:

Kitűzött gyakorlatok:

Kitűzött elméleti feladatok:

Angol nyelvű kivonatok:

A pontversenyben megoldott és kitűzött matematika és fizika példák csoportosítása tárgykörök szerint

A példák száma mögött zárójelben az oldalszám olvasható, ha két szám fordul elő, az első a kitűzés, a második a megoldás helyét jelöli. A matematika feladatok felsorolásának sorrendje: A jelű nehezebb feladatok, B feladatok, C gyakorlatok, K gyakorlatok. A fizika feladatok felsorolásának sorrendje: M mérési feladatok, G gyakorlatok, P feladatok.

MATEMATIKA

Aritmetika, algebra (műveletek számokkal, kifejezésekkel, azonosságok):
A. 756 (355); 765 (546); 766 (546); – B. 4994 (158); 5012 (97); 5045 (355); – C. 1480 (21); 1532 (160); 1534 (161); 1540 (226); 1553 (353); 1555 (353); 1562 (415); 1574 (543); 1575 (543); – K. 609 (32); 612 (32); 614 (94); 620 (159); 633 (415); 639 (542); 640 (542); 642 (543); 643 (543).

Számelméleti feladatok (egész számok, prímszámok, oszthatóság, számrendszerek):
A. 738 (35); 744 (98); 746 (163); 751 (229); 753 (291); 761 (485); 766 (546); – B. 4945 (24); 4964 (152); 4984 (284); 5000 (34); 5004 (35, 539); 5007 (96); 5012 (97); 5014 (162); 5021 (163); 5024 (227); 5030 (289); 5037 (291); 5039 (354); 5046 (416); 5054 (484); 5056 (484); – C. 1480 (21); 1520 (33); 1522 (33); 1524 (33, 147); 1528 (95); 1530 (95); 1541 (226); 1543 (226); 1562 (415); 1573 (484); 1575 (543); – K. 611 (32); 612 (32); 616 (94); 618 (94); 619 (159); 621 (160); 624 (352); 631 (415); 636 (482); 637 (482); 642 (543).

Halmazok (ponthalmazok is):
A. 757 (356); – K. 633 (415).

Valószínűség, kombinatorika, statisztika (kiválasztás, leszámolás, binomiális együtthatók):
A. 740 (35); 759 (418); 760 (418); 761 (485); – B. 4942 (88); 4951 (26); 4986 (157); 4998 (34); 5007 (96); 5018 (163); 5022 (227, 481); 5024 (227); 5027 (227); 5029 (228); 5039 (354); 5043 (354); 5045 (355); – C. 1489 (217); 1517 (537); 1518 (33); 1527 (95); 1538 (161); 1548 (288); 1557 (353); 1560 (415); 1566 (416); 1580 (544); – K. 621 (160); 625 (352); 626 (352); 627 (352); 630 (415).

Logikai kérdések (játékok, színezések, táblázatok, sakktábla):
A. 740 (35); 749 (228); 752 (291); 757 (356); 760 (418); 763 (486); – B. 4998 (34); 5035 (290, 540); 5041 (354); 5052 (417); 5066 (545); – C. 1489 (217); 1517 (537); 1548 (288); 1564 (416); 1569 (483); 1580 (544); – K. 613 (32); 622 (160); 629 (414); 634 (482).

Egyenletek (arányosság, százalék):
B. 4983 (224); 4988 (286); – C. 1540 (226); – K. 609 (32); 627 (352).

Speciális egyenletek (egész rész, tört rész, exponenciális, logaritmikus):
C. 1545 (226); 1546 (288); 1550 (289); 1555 (353); 1567 (483); 1575 (543); 1579 (544).

Az összes C gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

1452 (82); 1462 (84); 1480 (21); 1482 (85); 1489 (217); 1497 (283); 1517 (537); 1524 (147).

Az összes B feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

4878 (22); 4915 (87); 4942 (88); 4945 (24); 4947 (148); 4949 (25); 4951 (26); 4953 (27); 4963 (150); 4964 (152); 4970 (221); 4977 (153); 4978 (222); 4980 (92); 4983 (224); 4984 (284); 4986 (157); 4987 (285); 4988 (286); 4989 (348); 4994 (158); 5004 (539); 5010 (350); 5022 (481); 5026 (412); 5035 (540).

FIZIKA

Kinematika:
G. 642 (50); 645 (52); 652 (238); 660 (58, 305); 662 (122, 438); 665 (185); 666 (185); 668 (186); 669 (250, 493); 674 (312); 675 (313, 561); 677 (378); 678 (378); 684 (443); 685 (505); 688 (506); 689 (570); – P. 5112 (186); 5132 (313, 563); 5154 (443); 5175 (570).

Pontmechanika:
G. 658 (58); 664 (123); 691 (570); – M. 382 (302); – P. 5047 (56); 5056 (56); 5058 (240); 5071 (121); 5079 (181); 5088 (246); 5089 (59); 5093 (60); 5094 (60); 5099 (61, 247); 5101 (123); 5102 (123); 5108 (124, 495); 5111 (186, 496); 5113 (186); 5121 (189, 501); 5122 (250); 5123 (251, 440); 5125 (251); 5133 (313); 5134 (313); 5144 (379, 566); 5157 (444); 5160 (444); 5164 (506); 5166 (507); 5177 (571); 5178 (571); 5179 (571); 5185 (573); Áprilisi pótfeladat (253)

Merev testek mechanikája:
G. 655 (239); 686 (506); 386 (249); 387 (312); – P. 5069 (243); 5090 (59, 308); 5114 (186, 497); 5124 (251, 374); 5135 (314); 5136 (314); 5147 (380); 5153 (381); 5155 (444); 5156 (444); 5165 (506); 5169 (507); 5176 (571).

Kötelek, láncok, granulált anyagok mechanikája:
G. 668 (186); – M. 383 (58).

Rugalmasságtan:
G. 680 (379); – M. 388 (378, 558); – P. 5070 (119).

Hangtan:
P. 5071 (121); 5103 (124).

Folyadékok és gázok mechanikája:
G. 661 (122); 673 (312, 494); 679 (378); 681 (442); 690 (570); – M. 381 (300); 385 (185); 389 (442); – P. 5137 (314); 5146 (379); 5147 (380); 5148 (380); 5167 (507); 5181 (572); Eötvös-verseny 2018/1 (169).

Fénytan:
G. 675 (313, 561); 676 (313); – M. 390 (505); – P. 5020 (55); 5075 (371); 5076 (244); 5084 (306); 5085 (184); 5096 (60, 372); 5097 (60, 309); 5098 (60); 5106 (124); 5119 (188); 5130 (253); 5139 (315); 5140 (315); 5149 (380, 567); 5150 (380, 568); 5154 (443); 5162 (445); 5172 (508); 5184 (573).

Hőtan:
G. 667 (186); 670 (250); 671 (250); 682 (443); 687 (506); 692 (570); – M. 384 (122); – P. 5018 (53); 5092 (59); 5104 (124); 5105 (124); 5126 (252, 561); 5127 (252); 5131 (253); 5138 (314, 503); 5148 (380); 5158 (444); 5159 (444); 5168 (507); 5180 (572); 5181 (572); 5182 (572); Eötvös-verseny 2018/2 (171).

Csillagászat, asztrofizika:
G. 664 (123); 676 (313); – P. 5059 (242); 5068 (118); 5098 (60); 5102 (123); 5110 (125, 373); 5115 (187, 498); 5130 (253); 5142 (316); 5143 (379); 5145 (379).

Statisztikus fizika:
P. 5091 (59).

Elektrosztatika:
P. 5108 (124, 495); 5128 (252); 5141 (315, 564); 5151 (380); 5160 (444); 5170 (508).

Magnetosztatika:
P. 5083 (182); 5093 (60); 5094 (60); 5116 (187, 498); 5171 (508).

Elektrodinamika:
P. 5117 (187); 5118 (187, 500); 5129 (253, 503); 5161 (445); 5173 (508); 5183 (572); Eötvös-verseny 2018/3 (173).

Egyenáramú hálózatok:
G. 647 (52); 659 (58); 663 (123, 306); 672 (250); 682 (443); 683 (443); – P. 5095 (60); 5100 (123, 311); 5107 (124); 5159 (444); 5171 (508); 5182 (572).

Atomfizika és magfizika:
P. 5109 (125); 5120 (188); 5152 (381); 5163 (445); 5174 (509).

Egyéb:
G. 655 (239); 657 (58); – M. 391 (570); – P. 5044 (116).

Az összes mérési feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

381 (300); 382 (302); 388 (558).

Az összes gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

642 (50); 645 (52); 647 (52); 652 (238); 655 (239); 660 (305); 662 (438); 663 (306); 669 (493); 673 (494); 675 (561).

Az összes feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

5018 (53); 5020 (55); 5044 (116); 5047 (56); 5056 (56); 5058 (240); 5059 (242); 5068 (118); 5069 (243); 5070 (119); 5071 (121); 5075 (371); 5076 (244); 5079 (181); 5083 (182); 5084 (306); 5085 (184); 5088 (246); 5090 (308); 5096 (372); 5097 (309); 5099 (247); 5100 (311); 5108 (495); 5110 (373); 5111 (496); 5114 (497); 5115 (498); 5116 (498); 5118 (500); 5121 (501); 5123 (440); 5124 (374); 5126 (561); 5129 (503); 5132 (563); 5138 (503); 5141 (564); 5144 (566); 5149 (567); 5150 (568).