B. 5059. Legyen valamely pozitív egész c-re $\{a_n\}$ a következő, rekurzív módon definiált sorozat: $a_0 = c$ és $a_{n+1} = \left[a_n + \sqrt{a_n}\right]$, ha $n \geqslant 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat tagja a 2019, akkor a korábbi tagok között nincs négyzetszám, de a későbbi tagok között végtelen sok négyzetszám fordul elő.

(*5 pont*)

B. 5060. Adott a Σ síkon egy k körvonal, és a belsejében egy P pont, amely nem esik egybe k középpontjával. Nevezzük a tér egy Σ-ra nem illeszkedő O pontját *jó vetítő középpontnak,* ha létezik olyan, O-ra nem illeszkedő Σ' sík, hogy a Σ pontjait O-ból Σ'-re vetítve a k kör vetülete szintén körvonal, és ennek a körvonalnak a középpontja P vetülete. Mutassuk meg, hogy a jó vetítő középpontok egy körön vannak.

B. 5061. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt nevezzünk *területtartónak,* ha tetszőleges $a < b < c$ és x esetén az $\big(a; f(a)\big)$, $\big(b; f(b)\big)$ és $\big(c; f(c)\big)$ pontok által meghatározott háromszög területe megegyezik az

$$\big(a + x; f(a + x)\big), \quad \big(b + x; f(b + x)\big) \text{ és } \big(c + x; f(c + x)\big)$$

pontok által meghatározott háromszög területével.

Mely folytonos f függvények területtartóak?

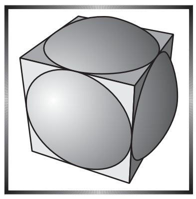
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (761–763.)



A. 761. Legyen $n \geqslant 3$ pozitív egész szám. Pozitív egészek egy S halmazát *jónak* nevezzük, ha S elemeinek száma n, S egyik eleme sem osztható n-nel és az S halmaz elemeinek összege sem osztható n-nel. Legyen d az a legkisebb pozitív egész szám, melyre létezik olyan jó S halmaz, melynek pontosan d darab nemüres részhalmazában osztható n-nel a részhalmaz elemeinek összege. Határozzuk meg d-t (n függvényében).

Javasolta: *Aleksandar Makelov* (Burgas, Bulgaria) és
Nikolai Beluhov (Stara Zagora, Bulgaria)

A. 762. A Négyszögletű Kerek Erdőben n különböző (pontszerű) fa található, semelyik három nem esik egyenesre. Mikkamakka az erdőről fényképeket készít, melyeken az összes fa látható (úgy, hogy a képeken a fák nem lehetnek egymás mögött). Legfeljebb hány különböző sorrendben szerepelhetnek a fák a készített képeken?

Javasolta: *Mészáros Gábor* (Sunnyvale, Kalifornia)

A. 763. Legyen $k \geqslant 2$ egész szám. n darab golyó tömegét szeretnénk kideríteni. Egy mérés során két golyót választhatunk, és elárulják nekünk a két választott golyó tömegének az összegét. Tudjuk, hogy a kapott válaszok között legfeljebb k hibás lehet. Jelölje $f_k(n)$ a legkisebb számot, melyre igaz, hogy $f_k(n)$ méréssel biztosan ki tudjuk találni a golyók tömegét (a méréseket nem kell előre eldönteni). Bizonyítandó, hogy léteznek olyan a_k és b_k számok, melyekre teljesül, hogy $\left|f_k(n) - a_k n\right| \leqslant b_k$.

Javasolta: *Surányi László* (Budapest) és *Virág Bálint* (Toronto)

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 493. Négyzet alakú mezőkből álló játéktereken, például táblás játékoknál vagy szimulációs programokban (lásd mintázatképződés, **I. 256.** feladat) a szomszédság meghatározása lényeges.

	1	2	3	4	5	6
1				1		
2		1		1		1
3						
4			1	1		
5			1			
6						

Legyen adott egy $N \times N$ $(5 \leqslant N \leqslant 100)$ négyzetből álló játéktábla, amelynek minden mezője vagy üres, vagy egy bábut tartalmaz. A szomszédos mezők oldalaikkal vagy sarkaikkal érintkeznek, illetve a játéktér túlsó szélén vagy átellenes sarkán vannak. Két különböző mező T távolságban $(1 \leqslant T \leqslant N/2)$ szomszédos, ha legföljebb T mezőn keresztül el lehet jutni az egyik mezőről a másikra. Például egy 6×6-os táblán a $(2;2)$ mező 2 távolságú szomszédjai az *ábrán* szürke színezésűek.

Készítsünk programot `i493` néven, amely egy játéktábla pillanatnyi állása mellett megadja K darab kiválasztott mező T távolságú szomszédságában lévő mezőkön található bábuk számának összegét.