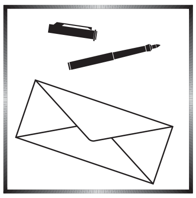
ratlan fokú csúcs. Így mindkét komponensre igaz, hogy vagy 2. típusú, vagy csak annyit kell róla belátni, hogy nem izolált teljes gráf. Tegyük fel indirekt módon, hogy mégis teljes gráf keletkezik.

i) Ha az 1./*a*)/*ii*) módon keletkezik a teljes gráf, akkor ezen cseresznye helyett azzal lépve, amelynek a közepe az eredeti közepe, egyik vége az eredeti egyik vége, és a másik vége a keletkező teljes gráf egyik csúcsa, a komponens nem szakadna ketté; tehát nem a 2. részben lennénk.

ii) Ha az 1./*b*) módon keletkezik a teljes gráf, akkor az eredeti cseresznye helyett azzal lépve, amelynek a közepe az eredeti egyik vége, egyik vége az eredeti közepe, a másik vége pedig a keletkező teljes gráfban van, a komponens nem szakadna ketté, és ekkor sem a 2. részben vagyunk.

Tehát egyik keletkező komponens nem lehet teljes gráf, vagyis 2. vagy 3. típusú.

Beláttuk tehát, hogy ha tudunk lépni, akkor tudunk úgy lépni, hogy minden komponens beleessen a fent felsorolt 3 kategória egyikébe, viszont csak akkor nem tudunk lépni, ha csak 1. és 2. típusú komponensek maradtak. Mivel minden lépésben az élek száma eggyel csökken, és kezdetben csak véges sok él volt, ezért csak véges sokat tudunk így lépni, vagyis előbb-utóbb a fent leírt állapotba jutunk, ami a feladat által leírt állapot. Tehát a feladat által meghatározott állapotba biztosan el tudunk jutni.



Térbe kilépő bizonyítások I.

Projektív geometriai tételek

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

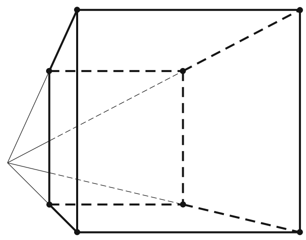
Az első részben olyan tételeket fogunk vizsgálni, amelyekben csak pontok, egyenesek és ezek illeszkedései szerepelnek, esetleg még egy kör vagy kúpszelet is. Gyakorlott versenyzők számára ezek a tételek jól ismertek, gyakran használjuk versenyfeladatok megoldásához is.

Vetítés az ablaküvegre

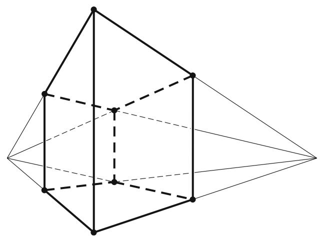
Klasszikus ábrázolási módszer, hogy a helyszínt egy üveglapon (ablakon) át nézzük, és az üvegre rajzoljuk rá a tárgyak körvonalait. Valójában a tárgyakat egy pontból – a szemünkből – vetítjük az ablak síkjára. Az ablakkeret a végtelen nagy képből vág ki egy téglalap alakú részletet.

Az ablakkal párhuzamos egyenesek vetületei az ablakon is párhuzamos egyenesek; speciálisan, ha az ablak függőleges irányú, akkor a függőleges egyenesek a képen is függőlegesek. Az ablak síkjával nem párhuzamos egyenesek képei viszont csak félegyenesek (mert nem látjuk a hátunk mögé eső részüket). Az egymással párhuzamos, de az ablakot döfő egyenesek képei egy pontból induló félegyenesek; a közös végpont az üvegen az a pont, ahol a szemünkön keresztül húzott párhuzamos döfi az ablak síkját. Ez a közös „iránypont" az adott irányú „végtelen távoli" vagy „ideális" pont képe.

Különösen műszaki rajzokon fordul elő, hogy csak néhány, esetleg csak háromféle irányt használunk. Attól függően, hogy a fő irányok közül hány (nem) párhuzamos a kép síkjával, beszélhetünk egy, kettő vagy három iránypontos perspektíváról (*1., 2.* és *3. ábra*).

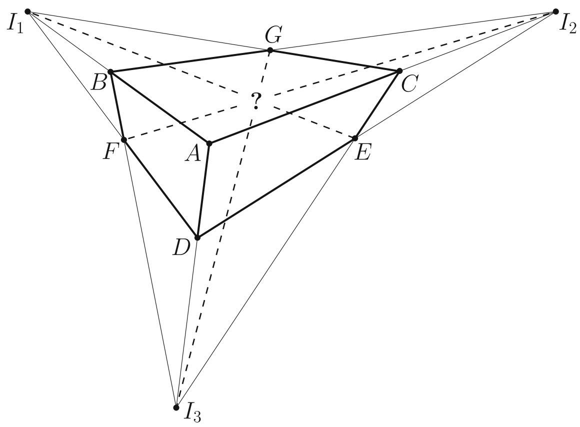


1. ábra. Egy iránypontos perspektíva



2. ábra. Két iránypontos perspektíva

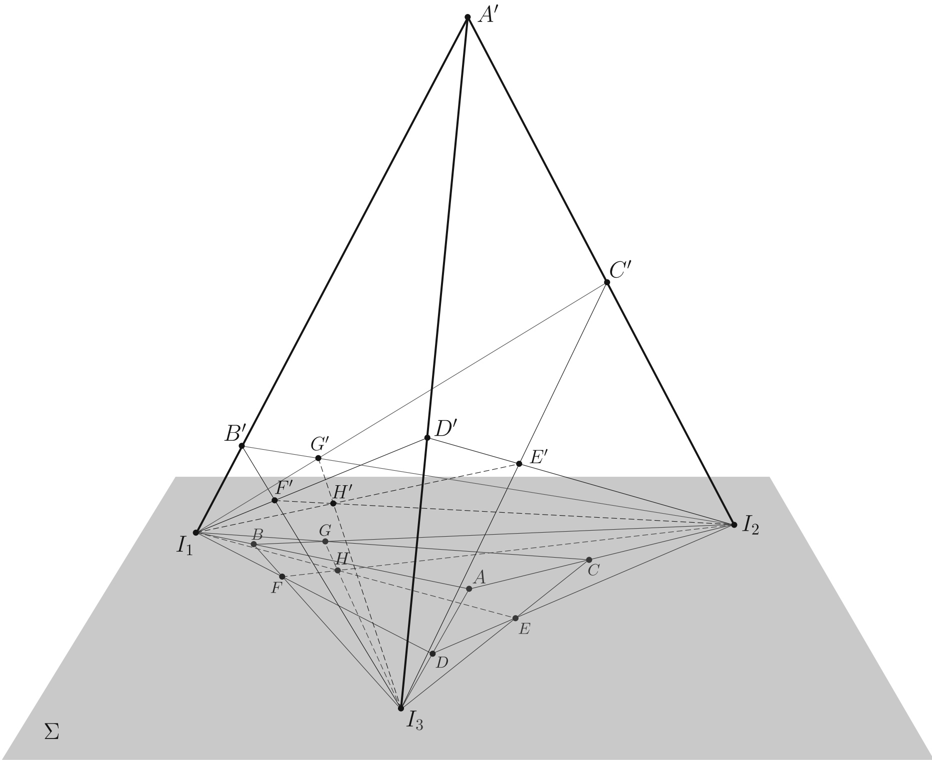
A rajzórán persze nem meresztjük a szemünket az ablaküvegen keresztül a szomszéd háztömbre; sokkal egyszerűbbnek tűnik, hogy valahogy felvesszük az iránypontokat és néhány további pontot, és vonalzóval elkezdjük összekötögetni. Képzeljük el, hogy a 3. ábrán látható rajzrészletet készítettük el.



3. ábra. Három iránypontos perspektíva

Ha ez a rajz egy valódi téglatest képe, akkor az I_1E, I_2F és I_3G egyenesek egy ponton, a téglatest nyolcadik csúcsának képén mennek át. Ha viszont csak úgy, találomra vettünk fel pontokat és húztunk egyeneseket, nem lehetünk biztosak ebben. Márpedig nem szeretnénk megszégyenülve pironkodni, főleg nem a rajztanár előtt. („Látod, kisfiam, ha nem csaltál volna, az a három egyenes egy ponton menne át …!") Szerencsére a vetítést visszafelé is el tudjuk végezni, és ki tudunk találni valamilyen térbeli alakzatot, amelynek a rajzrészletünk a vetülete. Azt is meg lehetne próbálni, hogy „valódi" párhuzamosokat találjunk a térben, de erre nem lesz szükség.

Jelöljük Σ-val a rajzunk síkját. Vegyünk fel a térben egy új A' pontot, ami nincs a Σ síkban, de az Σ-ra való merőleges vetülete éppen az A pont. Az I_1A, I_2A és I_3A szakaszokon legyen rendre B', C', illetve D' az a belső pont, amelynek merőleges vetülete Σ-ra B, C, illetve D. Az I_1I_2A' háromszögben az I_1C' és I_2B' Ceva-szakaszok[1] metszéspontja legyen G'. Mivel az I_1C' és I_2B' merőleges vetülete Σ-n I_1C és I_2B, ugyanez igaz a metszéspontjaikra: a G' merőleges vetülete Σ-n a G pont. Hasonlóan, legyen I_1D' és I_3B' metszéspontja F', és legyen I_2D' és I_3C' metszéspontja E'; ezek vetülete Σ-n F, illetve E (*4. ábra*).



4. ábra. Térbeli rekonstrukció a három iránypontos perspektívából

Most tekintsük az I_1I_2D', I_1I_3C', és I_2I_3B' háromszögek síkjait, jelölje ezeket Σ_{12}, Σ_{13}, illetve Σ_{23}. A Σ_{12} és Σ_{13} síkoknak I_1 és E' is közös pontja, tehát a két

[1]Olyan szakaszok, amelyek a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal egyik pontjával kötik össze.

sík metszésvonala az I_1E' egyenes. Hasonlóan, Σ_{12} és Σ_{23} metszésvonala az I_2F', Σ_{13} és Σ_{23} metszésvonala az I_3G' egyenes.

Az I_1I_2D' háromszögben az I_1E' és I_2F' Ceva-szakaszok a háromszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat jelöljük H'-vel. Mivel I_1E' az Σ_{12} és Σ_{13}, I_2F' pedig az Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszete, a metszéspont mindhárom síknak közös pontja. Ezért a H' ponton a Σ_{13} és Σ_{23} síkok metszésvonala, az I_3G' egyenes is átmegy. Ha a H' pont Σ-ra való vetületét elnevezzük H-nak, akkor azt kaptuk, hogy I_1E, I_2F, I_3G egyenesek egy ponton, H-n mennek át.

Három sík, három egyenes

Az előző bizonyítás fő lépését érdemes általánosabban is végiggondolni és kimondani. A következő tényt nagyon gyakran alkalmazhatjuk térbe kilépő bizonyításokban.

Lemma.[2] *Ha adott három egyenes úgy, hogy közülük bármelyik kettő egy síkban van (tehát metszik egymást vagy párhuzamosak), de a három egyenes együtt nincs egy síkban, akkor a három egyenes vagy egy ponton megy át, vagy pedig párhuzamosak egymással.*

A Lemma bizonyítása. Jelölje a három egyenest e_1, e_2 és e_3, és legyen $i = 1, 2, 3$ esetén $\Sigma_{i,i+1}$ az e_i és az e_{i+1} egyenesek síkja. (Szokás szerint ciklikusan indexelünk: e_4 azonos e_1-gyel, és e_5 azonos e_2-vel.)

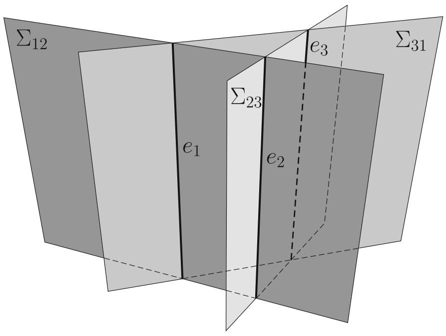
Először is vegyük észre, hogy az e_1 egyenes nem lehet a Σ_{23} síkban – mert akkor akkor mindhárom egyenes ebben a síkban lenne –, ezért e_1 biztosan különbözik e_2-től és e_3-tól. Ugyanígy láthatjuk, hogy e_2 és e_3 egymástól is különbözik. Két különböző egyenesre legfeljebb csak egyféle sík illeszthető, ezért a Σ_{12}, Σ_{23} és Σ_{31} síkok egyértelműen meghatározottak. Mivel a három egyenes nincs egy síkban, a Σ_{12}, Σ_{23} és Σ_{31} síkok különbözők. A $\Sigma_{i+2,i}$ és $\Sigma_{i,i+1}$ metszésvonala az e_i egyenes mindegyik i indexre.

Két, egy síkban fekvő egyenes vagy párhuzamos, vagy metszi egymást. Ha a három egyenes párhuzamos akkor kész vagyunk, a Lemma állítása teljesül (*5. ábra*). Ellenkező esetben a három közül valamelyik két egyenes, mondjuk e_1 és e_2 metszi egymást egy P pontban. A P az e_1 egyenesen van, ami viszont a Σ_{12} és Σ_{31} síkok metszete. Ugyanígy a P ponton az e_2 egyenes is átmegy, ami a Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszésvonala. A P pont tehát mindhárom síkra illeszkedik; emiatt P közös pontja a Σ_{23} és Σ_{31} síkoknak; akkor viszont ezek metszésvonala, a harmadik, e_3 egyenes is átmegy P-n (*6. ábra*).

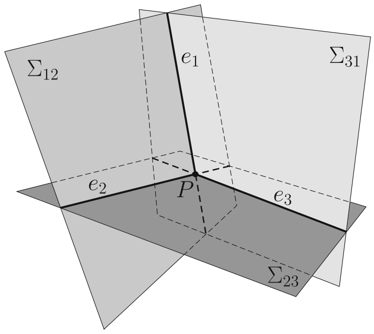
Két klasszikus projektív geometriai tétel

A Lemma alkalmazására két példát mutatunk.

[2]A görög „$\lambda\acute{\eta}\mu\mu\alpha$" szó jelentése *kapott valami, például ajándék, profit vagy korrupt pénz.* Matematikában olyan állítást, tételt jelent, ami nem önmagában érdekes, hanem más tételek bizonyításához használjuk fel. A „lemma" helyett a „segédtétel" vagy „segédállítás" szavakat is írhatnánk.



5. ábra. e_1, e_2, e_3 párhuzamosak



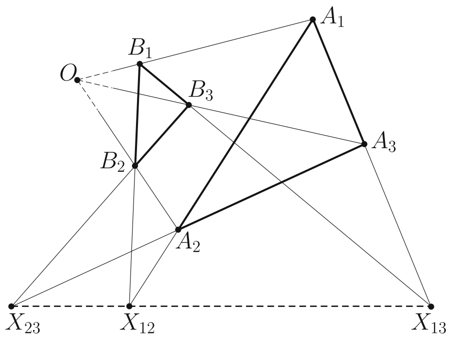
6. ábra. e_1, e_2, e_3 metszőek

Desargues[3] tétele: *Legyen $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ két háromszög a síkon, amelyek csúcsai és oldalegyenesei is különbözők. Legyen az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek metszéspontja X_{12}, az A_1A_3 és B_1B_3 egyenesek metszéspontja X_{13}, és az A_2A_3 és B_2B_3 egyenesek metszéspontja X_{23}. A következő két állítás ekvivalens:*

(*a*) *A két háromszög megfelelő csúcsait összekötő A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.*

(*b*) *A két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai, vagyis az X_{12}, X_{13} és X_{23} pontok egy egyenesre esnek* (7. ábra).

A tétel bizonyítása azon múlik, hogy ez a tíz pontból és tíz egyenesből álló elrendezés egy térbeli geometriai alakzat vetülete (8. ábra).

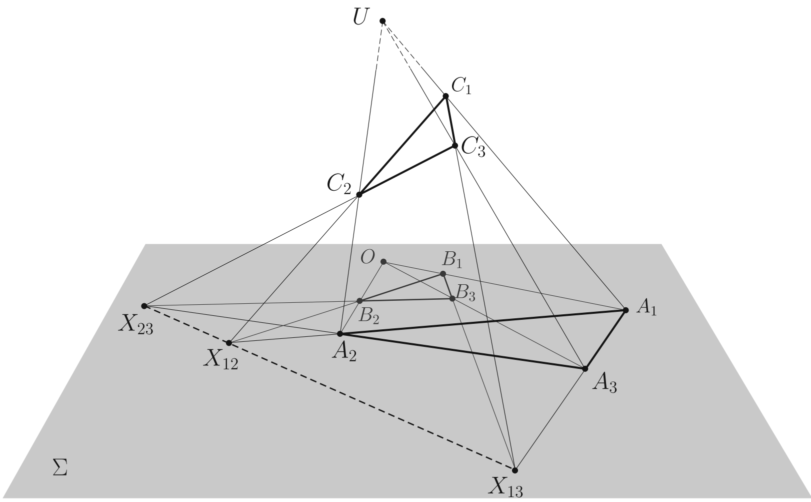


7. ábra. A Desargues-tétel

Az $(a) \Rightarrow (b)$ irány bizonyítása: Az ábra síkját most is jelöljük Σ-val. Ha az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek az O ponton mennek át, akkor vegyünk fel a térben egy U pontot, amelynek merőleges vetülete a Σ síkon O. Az UA_1, UA_2 és UA_3 egyeneseken legyen C_1, C_2, illetve C_3 az a pont, amelynek vetülete B_1, B_2, illetve B_3. Ha A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 párhuzamosak, akkor vegyünk a térben, az A_1, A_2, A_3 pontokon keresztül három, egymással párhuzamos egyenest, amelyek merőleges vetülete éppen A_1B_1, A_2B_2, illetve A_3B_3, és ezeken vegyük fel azokat a C_1, C_2, illetve C_3 pontokat, amelynek vetülete B_1, B_2, illetve B_3.

Alkalmazzuk most a Lemmát az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egyenesekre. Az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek a Σ síkban fekszenek; a C_1C_2 a B_1B_2-n keresztül Σ-ra állított merőleges síkban, végül az A_1A_2 és C_1C_2 egyenesek az A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek síkjában vannak. A C_i pontok nem lehetnek a Σ síkban, mert akkor a teljes A_1C_1 egyenes, és vele az U pont is Σ-ban lenne. A Lemma feltételei teljesülnek: az A_1A_2,

[3]Gérard Desargues francia matematikus és építész, 1591–1662.



8. ábra. A Desargues-tétel bizonyítása

B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van, de a három egyenes együtt nincs egy síkban. Ezért a három egyenes egy ponton megy át; mivel A_1A_2 és B_1B_2 az X_{12} pontban metszi egymást, ez azt jelenti, hogy a C_1C_2 egyenes is átmegy az X_{12} ponton. Az indexek permutálásával ugyanígy láthatjuk, hogy a C_{13} egyenes átmegy átmegy X_{13}-on, illetve C_{23} átmegy átmegy X_{23}-on.

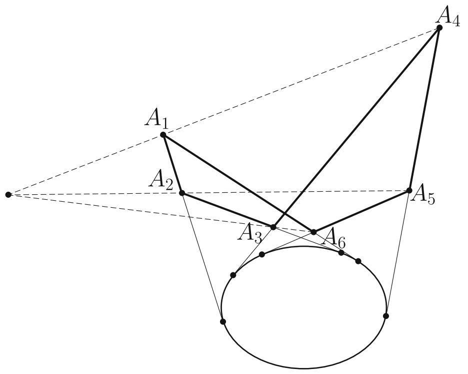
Ezek után az X_{12}, X_{13}, X_{23} pontok mind közös pontjai az $C_1C_2C_3$ és a Σ síknak, ezért egy egyenesen vannak.

A $(b) \Rightarrow (a)$ irány bizonyítása: Ugyanezt a térbeli ábrát építjük fel, csak fordított sorrendben. Az $X_{12}X_{13}X_{23}$ egyenesen keresztül fektessünk egy Σ' síkot, ami különbözik Σ-tól, de nem merőleges rá, és ezen jelöljük ki azokat a C_1, C_2, C_3 pontokat, amelyek Σ-ra eső merőleges vetülete B_1, B_2, illetve B_3. A C_1, C_2, X_{12} pontok közös pontjai az Σ' síknak és a B_1B_2 egyenesen keresztül Σ-ra állított merőleges síknak, ezért egy egyenesre, a két sík metszésvonalára esnek. Ugyanígy látható, hogy C_1, C_3 és X_{13}, valamint C_2, C_3 és X_{23} is egy egyenesre esik.

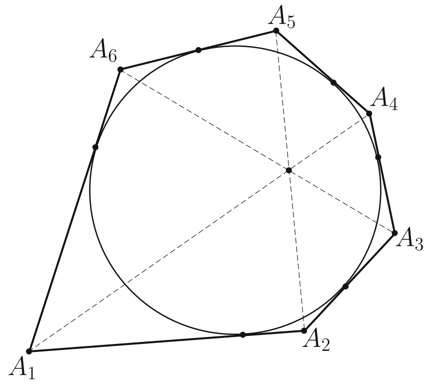
A Lemmát most az A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 egyenesekre alkalmazzuk. Bármely $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ indexpárra az A_iC_i és A_jC_j egyenesek az $A_iC_iX_{ij}$ síkban vannak, tehát a három egyenes közül bármelyik kettő egy síkban van; ugyanakkor az $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ pontok nincsenek egy síkban. A Lemma szerint tehát az A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. A három egyenest visszavetítve Σ-ra látjuk, hogy az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

Brianchon[4] tétele: *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (esetleg hurkolt) hatszög oldalegyenesei érintői egy nem elfajuló kúpszeletnek (kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola), akkor a hatszög szemközti pontjait összekötő A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak* (9. ábra).

[4]Charles Julien Brianchon francia matematikus, 1783–1864.



9. ábra. A Brianchon-tétel

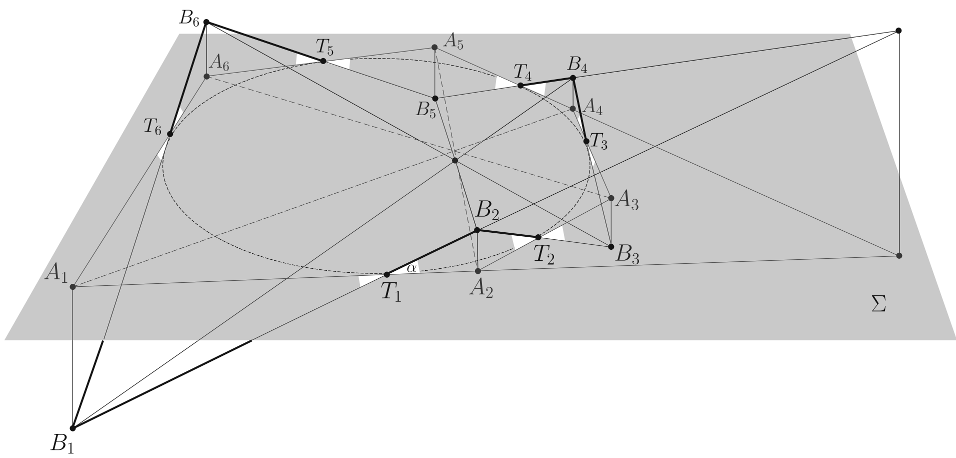


10. ábra. A Brianchon-tétel érintőhatszögben

A tételnek számtalan változatát, speciális és határesetét lehetne felsorolni, az egybeeső oldalegyenesek esetétől a (parabolát érintő) végtelen távoli oldal esetéig. A kedves Olvasónak ajánljuk, hogy valamilyen számítógépes programmal, mint például a GeoGebra, próbáljon minél többféle speciális vagy elfajuló esetet keresni. Itt most nem célunk ezeknek az áttekintése; a tételnek csak az egyik legegyszerűbb esetét fogjuk bizonyítani.

Brianchon tétele, speciális eset: *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszögbe kört lehet írni, akkor a hatszög A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 átlói egy ponton mennek át* (10. ábra).

Bizonyítás a speciális esetre. Az ábra síkját most is Σ-val fogjuk jelölni. A hatszögbe írt kör érintési pontjai legyenek $T_1, \ldots, T_6$ a *11. ábra* szerint. Válasszunk egy α hegyesszöget, és jelöljük ki a térben azokat a $B_1, \ldots, B_6$ pontokat,



11. ábra. A Brianchon-tétel bizonyítása amelyek felváltva Σ két oldalán helyezkednek el, merőleges vetületük a Σ síkon rendre $A_1, \ldots, A_6$, és az $A_iT_iB_i\sphericalangle$ és $A_iT_{i-1}B_i\sphericalangle$ szögek mindegyike α nagyságú. Mivel a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők, mindegyik i indexre $A_iT_i = A_iT_{i-1}$, így az $A_iT_iB_i$ és $A_iT_{i-1}B_i$ derékszögű háromszögek egybevágók, és az $A_iT_iB_i\sphericalangle$ és $A_iT_{i-1}B_i\sphericalangle$ szögek automatikusan egyenlők. (Úgy is mondhatnánk, hogy a hatszög oldalegyeneseit Σ-ra merőlegesen α szöggel megdöntjük, és az így kapott egyeneseknek vesszük a metszéspontjait.)

A Lemmát most a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesekre alkalmazzuk. A B_1B_2 és B_4B_5 egyenesek egymás tükörképei a T_1T_4 szakasz felező merőleges síkjára, ezért egy síkban vannak; ebben a síkban fekszik a B_1B_4 és a B_2B_5 egyenes. Ugyanígy láthatjuk, hogy a B_2B_5 és B_3B_6, illetve a B_3B_6 és B_1B_4 egyenesek egy síkban vannak.

Hátra van még annak ellenőrzése, hogy a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek nem lehetnek egy síkban; ez nyilvánvalónak látszik, de formálisabban is igazolhatjuk: ha a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek valamilyen síkban vannak, akkor ebben a síkban vannak a $B_1, \ldots, B_6$ pontok, a teljes $B_1 \ldots B_6$ töröttvonal, és vele együtt a $T_1, \ldots, T_6$ pontok is. A $T_1, \ldots, T_6$ pontok síkja csak a Σ lehet, de ez nem lehetséges, mert a B_1 pontokat Σ-n kívül vettük fel.

A Lemma feltételei tehát teljesülnek, ezért a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Ugyanez igaz a merőleges vetületeikre, az A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 egyenesekre is. Mivel azonban az A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 átlók közül bármelyik kettő metszi egymást, ez csak úgy lehet, ha a három átló egy ponton megy át.

Ajánlott irodalom

A fenti tételek teljesebb tárgyalásához be kellene vezetnünk a projektív sík és tér „ideális” objektumait, ez most nem volt célunk. Emiatt a tételeket sem mondtuk ki legáltalánosabb formájukban.

Ha valaki szeretne többet tanulni a projektív geometriáról, annak a következő könyveket ajánlom.

[1] Reiman István: *A geometria és határterületei.* Gondolat, Budapest, 1986.

[2] H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria.* Gondolat, Budapest, 1986.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a 3. ábrán az AG, CE és DF szakaszok egy ponton mennek át.
2. Egy perspektivikus képen, csak egyenes vonalzót használva, hogyan jelölhetünk ki egyenlő szakaszokat egy egyenesen? Hogyan többszörözhetünk, felezhetünk vagy harmadolhatunk egy szakaszt?
3. Vezessük le a Desargues-tételből, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át.
4. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Jól ismert, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-szakaszok egy ponton, a háromszög

Gergonne-pontján mennek át. Gondoljuk meg, hogy ez a tény a Brianchon-tételnek milyen elfajuló esete, és igazoljuk közvetlenül, térbe kilépéssel is.

5. Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre az E, F, G, illetve H pontban érinti. Mutassuk meg, hogy az AC, BD, EG és FH szakaszok egy ponton mennek át.
6. Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ érintőhatszög, legyen az A_1A_3 és A_4A_6 egyenesek metszéspontja P, az A_2A_4 és A_5A_1 egyenesek metszéspontja Q, az A_3A_5 és A_6A_2 egyenesek metszéspontja R. Mutassuk meg, hogy a P, Q és R pontok egy egyenesen vannak.

Kós Géza

EGMO beszámoló

Kis csapatunk vasárnap reggel kezdte meg útját Ukrajna fővárosába, Kijevbe. Az út kellemesen telt és már kora délután a szálláson voltunk. Remek helyen laktunk, gyönyörű kilátással a 9. emeletről. Másnap volt lehetőségünk egy kis városnézésre, főleg Kijev belvárosában. Láttunk néhány nagyon érdekes épületet, tornyokat és arany tetejű kék templomokat. Még egy kisebb galériában is körbe néztünk. Ezen a napon került sor a nyitó ceremóniára is, ami a szokásosnál talán kicsit izgalmasabb volt, mivel megismerkedhettünk néhány hagyományos ukrán hangszerrel, amelyeken ukrán népviseletbe öltözött zenekar játszott.

A harmadik és a negyedik nap főleg a versenyről szólt. Az első négy és fél óra alatt egy algebra, egy kombinatorika és egy geometria, míg a második négy és fél óra alatt egy geometria, egy számelmélet és egy kombinatorika feladaton gondolkozhattunk. Összességében nagyon érdekesnek találtam őket, bár a második feladatsor hossza némileg ijesztő volt elsőlátásra. Talán a legjobban az első nap harmadik feladata tetszett, mivel végre hasznos volt észben tartani a jó tanácsot: „egy életem, egy halálom, az inverziót megpróbálom".

A verseny ötödik napján kirándulni voltunk, egy látogatók számára épített ukrán faluban. Az idegenvezetőnk egy népviseletbe öltözött néni volt, aki sokat mesélt nekünk a faluk mindennapjairól, a szokásokról és ünnepekről. Azt is megtanította, hogyan kell a kendőt szépen felkötni a fejünkre. Egyetlen rossz dolog volt a kirándulásban: az idő. Sajnos nagyon hideg volt, az eső is esett, ami majdnem elvette a kedvünket a kirándulástól. Ezt próbálták vendéglátóink orvosolni néhány hagyományos népi játékkal és ukrán néptánc tanításával. A mozgás némileg felmelegítette megdermedt végtagjainkat és visszagondolva nagyon kellemes napot töltöttünk el a fogvacogtató hideg ellenére.

Mire visszaértünk a szállásra, a feladatok nagy része már ki volt javítva és estére az éremhatárok meghatározása is megtörtént. A magyar csapat 2 bronz-, 1 ezüst- és 1 aranyérmet szerzett és az országok listáján 8. (az európaiak listáján 7.) lett.