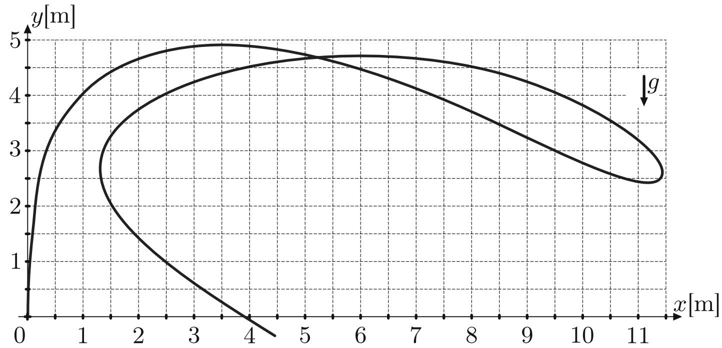
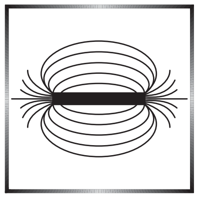


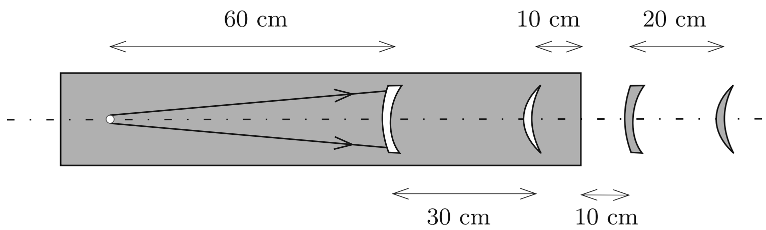
4. ábra. A vízsugár alakja egy adott időpillanatban



Fizika feladatok megoldása

P. 5075. *Az* ábra *szerinti elrendezésben közös optikai tengelyen, egymással párhuzamosan négy vékony lencse helyezkedik el. Mindegyik lencse határfelületének görbületi sugara* 5 cm, *illetve* 10 cm. *Kettő közülük* $n = 1{,}5$ *törésmutatójú üvegben lévő levegőlencse, kettő pedig ugyanilyen törésmutatójú üveglencse.*

Az üvegben, az optikai tengelyen, a domborúan homorú lencsétől 60 cm*-re egy pontszerű fényforrás van. A lencse másik oldalán, tőle* 30 cm *távolságra helyezkedik el a homorúan domború levegőlencse. Ettől* 10 cm *távolságra van az üveget határoló sík felület, amely merőleges az optikai tengelyre. A sík felülettől* 10 cm*-re található az üvegből készült domborúan homorú lencse, a negyedik (homorúan domború) lencse pedig a harmadiktól* 20 cm*-re van.*



A négy lencse hová képezi le a pontszerű fényforrást?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Az $r = \pm 5$ cm és $R = \pm 10$ cm görbületi sugarú lencsék fókusztávolsága az

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$$

összefüggés szerint balról jobbra rendre +30 cm, −30 cm, −20 cm és +20 cm. (A relatív törésmutató a levegőben lévő üveglencsék esetében a megadott $n = 1{,}5$ érték, az üvegben lévő levegőlencséknél pedig $n' = 1/n = 2/3$.)

A fényforrás az első (gyűjtő)lencse kétszeres fókusztávolságú pontjában helyezkedik el, így a kép is ugyanilyen távol, a második (szóró)lencse jobb oldali fókuszpontjában jönne létre (ha nem lenne ott a második lencse). A második lencse a fókuszpontja felé tartó fénysugarakat az optikai tengellyel párhuzamosan engedi tovább, így azok az üvegből irányváltoztatás nélkül kilépve ugyancsak párhuzamosan esnek a harmadik lencsére. Ez a lencse úgy szórja a fényt, mintha a bal oldali fókuszpontjából érkeznének a sugarak. Mivel ez a pont a negyedik (gyűjtő)lencse kétszeres fókusztávolságú pontja, a keletkező kép a jobb oldali kétszeres fókusztávolságú pontban, vagyis a lencsétől 40 cm távolságban alakul ki.

Több dolgozat alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

P. 5096. *Egy* 4 cm *sugarú tömör, homogén üveggömb középpontjától* 10 cm*-re van egy* 2 mm *sugarú, világító, kicsiny körlap. A körlap síkja merőleges a kör és a gömb középpontját összekötő egyenesre (az optikai tengelyre). Hol keletkezik és mekkora lesz e körlapnak az üveggömb által előállított képe? (Az üveg törésmutatója* 1,5, *és a képalkotásban csak az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak vesznek részt.)*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Az R sugarú üveggömb ún. vastag lencsének tekinthető, amelynek fókusztávolságára általános esetben érvényes::

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{n-1}{n}\frac{d}{R_1R_2}\right).$$

Esetünkben (gömblencsénél) $R_1 = R_2 = R = 4$ cm, $d = 2R = 8$ cm és $n = 1{,}5$, vagyis

$$f = \frac{nR}{2(n-1)} = 6 \text{ cm}.$$

A vastag lencsékre akkor érvényes a leképezési törvény szokásos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

alakja, ha a t tárgytávolságot és a k képtávolságot az ún. fősíkoktól mérjük. A gömblencse fősíkjai a gömb középpontján áthaladó síkok (lásd pl. *Vermes Miklós* cikkét a KöMaL 1967. évi 11. számában; `http://db.komal.hu/scan/1967/11/`).

Jelen esetben $t = 10$ cm, így a képtávolság

$$k = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{t}\right)^{-1} = \frac{tf}{t-f} = 15 \text{ cm},$$

és a nagyítás

$$N = \frac{k}{t} = 1{,}5.$$

A kicsiny, világító körlap képe tehát az üveggömb középpontjától 15 cm-nyire, a gömb szélétől 11 cm távolságban jön létre, és a kép 3 mm sugarú körlap lesz.

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 10. évf.)

20 dolgozat érkezett. Helyes Andorfi István, Bonifert Balázs, Fülöp Sámuel Sihombing, Mácsai Dániel, Olosz Adél, Sal Dávid, Tiefenbeck Flórián és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

P. 5110. *A Föld körül keringő két mesterséges hold pályájának fél nagytengelye ugyanakkora. A holdak pálya menti sebességeinek aránya a perigeumban (földközelpontban)* $\frac{3}{2}$, *és az itt nagyobb sebességű hold pályájának excentricitása* 0,5.

Határozzuk meg pálya menti sebességük arányát az apogeumban (földtávolpontban), és számítsuk ki a másik mesterséges hold pályájának excentricitását!

(*6 pont*) *Csillagászati versenyfeladat nyomán*

Megoldás. Az általános sebességképlet ellipszispályán való keringés esetén:

$$v = \sqrt{\gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

ahol γ és M konstansok, a a fél nagytengely (ami a két műholdnál ugyanakkora), r pedig a vezérsugár pillanatnyi nagysága.

Megjegyzés. A fenti képlet megtalálható a „Négyjegyű függvénytáblázatokban", de könnyen levezethető az energiamegmaradás törvényéből és a Newton-féle mozgásegyenletből, ha felhasználjuk az ellipszis görbületi sugarának formuláját pl. a perigeumban.

Ezek szerint a két mesterséges hold sebességének aránya tetszőleges r_1 és r_2 vezérsugaraknál:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}}{\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}}}.$$

Perigeumban

$$r_{1,2} = a - c_{1,2} = a(1 - e_{1,2}),$$

apogeumban

$$r_{1,2} = a + c_{1,2} = a(1 + e_{1,2}),$$

ahol $e = c/a$ a kérdéses pálya (numerikus) excentricitása.

Tudjuk, hogy $e_1 = \frac{1}{2}$, így a perigeumban

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{\frac{2}{1-e_1} - 1}{\frac{2}{1-e_2} - 1} = \frac{3}{\frac{2}{1-e_2} - 1}.$$

Ebből megkapjuk a másik pálya excentricitását:

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{1-e_2} - 1 \quad\Rightarrow\quad 1-e_2 = \frac{2}{\frac{4}{3}+1} = \frac{6}{7} \quad\Rightarrow\quad e_2 = \frac{1}{7},$$

valamint a sebességek arányát az apogeumban:

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \sqrt{\frac{\frac{2}{1+e_1}-1}{\frac{2}{1+e_2}-1}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{7}{4}-1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 3 dolgozat.

P. 5124. *a) Vízszintes asztallapra két egyforma, tömör hengert helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, harmadik hengert rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a hengerek közötti, illetve a hengerek és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?*

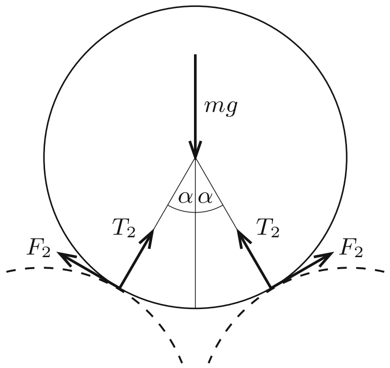
b) Vízszintes asztallapra három egyforma, tömör gömböt helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, negyedik gömböt rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a gömbök közötti, illetve a gömbök és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

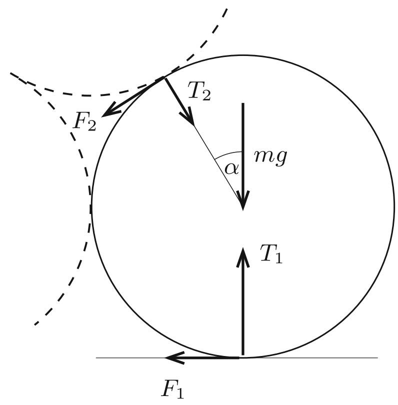
Megoldás. *a*) Legyen a hengerek közötti sugárirányú tartóerő (nyomóerő) T_2, a közöttük fellépő, érintő irányú súrlódási erő $F_2 = T_2\mu_2$; az alsó testek és a talaj között fellépő tartóerő T_1, a súrlódási erő pedig $F_1 = T_1\mu_1$. (Itt μ_1 és μ_2 az alsó és a felső érintkezési pontokhoz tartozó kritikus súrlódási együtthatókat jelöli, vagyis azt az értéket, amelynél még éppen nem csúszik meg egyik henger sem.)

A felső testre ható erőket az *1. ábra,* az egyik alsó testre ható erőket a *2. ábra* mutatja. A hengerek tengelyének merőleges metszete egy szabályos háromszöget alkot, ezért $\alpha = 30°$.

Megjegyzés. Feltételezzük, hogy két alsó henger éppen nem érintkezik egymással, így nem fejtenek ki egymásra erőt. Elvben elképzelhető, hogy ez nem teljesül, mert a két alsó



1. ábra



2. ábra

henger is egymásnak szorul. Belátható, hogy ebben az esetben mindkét súrlódási együtthatónak nagyobbnak kellene lennie, mint az összeszorulás-mentes elrendezésben. Mivel ebben a feladatban a *legkisebb* (az egyensúlyhoz még éppen elegendő) súrlódási együtthatókat keressük, az összeszorulás lehetőségét a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk.

Felírhatjuk, hogy a felső és az alsó testre ható erők függőleges komponensei (külön-külön) egyensúlyban vannak, továbbá az alsó testre ható vízszintes erőkomponensek és a forgatónyomatékok eredője is nulla:

$$mg = 2T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{1}$$

$$mg = T_1 - T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{2}$$

$$\mu_1 T_1 = T_2(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha), \tag{3}$$

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2. \tag{4}$$

Ezekből (algebrai átalakítások után) a

$$\mu_2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin(30^\circ)}{1+\cos(30^\circ)} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}27,$$

$T_1 = 3T_2$, valamint a

$$\mu_1 = \frac{T_2}{T_1}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}09$$

eredményt kapjuk.

A hengeres testek között legalább 0,27-*nek, az alsó hengerek és az asztal között pedig legalább* 0,09-*nek kell lennie a súrlódási együtthatónak, hogy a testek egyensúlyban maradhassanak.*

b) A fentiekhez hasonlóan tárgyalható a tömör gömbök egyensúlyának feltétele is. A gömbök középpontjai szabályos tetraédert alkotnak, ezért a felső és az alsó gömbök között fellépő erők függőlegessel bezárt szöge $\alpha = 35{,}3^\circ$.

A felső testre három tartóerő és három súrlódási erő hat, ezért az első egyenlet kissé módosul:

$$mg = 3T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha). \tag{1'}$$

A többi egyenlet nem változik (az α változásán kívül):

$$mg = T_1 - T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{2'}$$

$$\mu_1 T_1 = T_2(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha), \tag{3'}$$

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2. \tag{4'}$$

Ezekből következik, hogy $T_1 = 4T_2$, továbbá

$$\mu_2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin(35{,}3^\circ)}{1+\cos(35{,}3^\circ)} = 0{,}32,$$

$$\mu_1 = \frac{\sin 35{,}3^\circ - 0{,}32\cos 35{,}3^\circ}{4} = 0{,}08.$$

Négy egyforma, homogén gömb esetében a gömbök között legalább 0,32-*nek, a gömbök és az asztal között pedig legalább* 0,08-*nak kell lennie a súrlódási együtthatónak, hogy a rendszer egyensúlyban maradhasson.*

Tiefenbeck Flórián (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a három henger esetében a fellépő erők egy síkban hatnak! Ez azt jelenti, hogy az egyensúly feltétele független attól, hogy hengerek vagy gömbök állnak az asztalon. (A gömbök esetében is egy síkban hatnak az erők, és ebben a síkban a hengerek és a gömbök metszete megegyezik.) Ezt felhasználva a feladatban szereplő két konkrét problémát általánosíthatjuk. Legyen n darab ($1 < n \leqslant 5$) egyforma gömb az asztalon olyan módon elhelyezve, hogy mindegyik két másikkal ér össze, és a középpontjaik egy n oldalú szabályos sokszöget alkotnak (kivéve az $n = 2$ esetet, amelynél a középpontok egy egyenesen helyezkednek el). Fontos, hogy bár összeérnek az asztalon lévő gömbök, de nem fejtenek ki egymásra erőt.

A megoldás menete hasonló a fentebb leírtakkal, és a súrlódási együtthatókra adódó eredmény:

$$\mu_{\text{test-test}} \geqslant \frac{1}{2\sin(\pi/n) + \sqrt{4\sin^2(\pi/n) - 1}},$$

$$\mu_{\text{test-asztal}} = \frac{1}{n+1}\,\mu_{\text{test-test}}.$$

Ezekből $n = 2$ esetén megkapjuk az *a*) kérdésnek, $n = 3$ esetén pedig a *b*) kérdésnek megfelelő eredményt.

Máth Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

16 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos 4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 4, hibás dolgozat.

Nemzeti csillagászati verseny és diákolimpiai válogató középiskolásoknak 2019–2020

Érdekel a csillagászat és az űrkutatás, és nem áll tőled távol a fizika és a matematika sem? Hazai vagy határon túli, magyar ajkú középiskolás diákként tanulsz a 2019/20-as tanévben?

Akkor ne habozz – jelentkezz, és érdeklődj fizikatanárodnál!

Vegyél részt az iskolákban lebonyolítandó háromfordulós versenyen, amelyre a felkészülésedet irodalomjegyzékkel, online segédanyagokkal és megoldásokkal ellátott gyakorló feladatsorokkal is segítjük!

Ha bekerülsz a legjobb teljesítményt nyújtó 20-25 diák közé, részt vehetsz tavasszal az országos döntőben, ahol a díjazottakat értékes nyereményekben részesítjük – egyúttal akár a 2020-as, kolumbiai csillagászati és asztrofizikai diákolimpiára készülő 10-12 fős magyar nemzeti keret tagjává is válhatsz.

Jelentkezési határidő (egyben az 1. iskolai forduló időpontja):

2019. október 15. (kedd).

Részletes információk: `http://www.bajaobs.hu/ioaa/`.

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2019. október 11-én

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.