lyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

A végeremény közzététele

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2020. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2020. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2020. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 4989. *Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F. Jelölje a háromszög súlypontját S. Tegyük fel, hogy az AFS, BDS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög szabályos.*

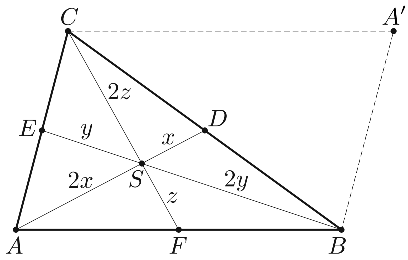
(*6 pont*)

Megoldás. Tükrözzük az A csúcsot a D pontra, a tükörképet jelölje A'. Mivel AA' és BC a D pontban felezik egymást, ezért $ABA'C$ paralelogramma.

A paralelogramma-tételt felírva kapjuk, hogy

$$AA'^2 + BC^2 = AB^2 + BA'^2 + A'C^2 + CA'^2.$$

A háromszög oldalait és súlyvonalait a szokásos módon jelölve és kihasználva, hogy $AB = CA'$ és $BA' = AC$ kapjuk, hogy



$$(2s_a)^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2,$$

$$4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$s_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}}.$$

Hasonló a képlet s_b-re és s_c-re. A képletekből látható, hogy ha egy oldal legalább akkora, mint egy másik, akkor a hozzá tartozó súlyvonal legfeljebb akkora, mint a másikhoz tartozó. Az is következik, hogy ha az a-hoz és b-hez tartozó súlyvonal hossza egyenlő, akkor $a = b$, hiszen felírva a képletet a két súlyvonalra, és egyenlővé téve őket, majd négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy $a^2 = b^2$.

Legyen az a-hoz tartozó súlyvonal hossza $3x$, a b-hez tartozó $3y$, a c-hez tartozó pedig $3z$. A súlypont harmadolja a súlyvonal háromszögbe eső szakaszát, tehát az egyes háromszögek kerületeit fel tudjuk írni ezeknek a szakaszoknak a segítségével.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy a-nál nincs hosszabb oldal. Ezután két esetet különböztetünk meg: $b \geqslant c$ és $b \leqslant c$.

Kezdjük az első esettel. Ekkor tehát $a \geqslant b \geqslant c$. Ennek alapján $x \leqslant y \leqslant z$. Tudjuk, hogy az AFS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Az AFS háromszög kerülete $\frac{c}{2} + z + 2x$, a CES háromszögé pedig $\frac{b}{2} + y + 2z$. Tudjuk továbbá, hogy

$$\frac{c}{2} \leqslant \frac{b}{2}, \quad z \leqslant z, \quad x \leqslant y, \quad x \leqslant z.$$

Ezt a négy egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy AFS kerülete legfeljebb akkora, mint CES kerülete. Viszont a feladat szövege szerint ezek egyenlőek, ami pedig csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségben az egyenlőség esete teljesül. Tehát $\frac{c}{2} = \frac{b}{2}$, vagyis $c = b$; és $x = y$, vagyis a második bekezdés értelmében ekkor $a = b$. Tehát $a = b = c$, a háromszög szabályos.

A másik eset nagyon hasonló. Ekkor $a \geqslant c \geqslant b$, emiatt $x \leqslant z \leqslant y$. Ebben az esetben a feladat szövege alapján az AFS háromszög kerülete $\left(\frac{c}{2} + 2x + z\right)$ megegyezik a BDS háromszög kerületével $\left(\frac{a}{2} + x + 2y\right)$. Felírva, majd összeadva az

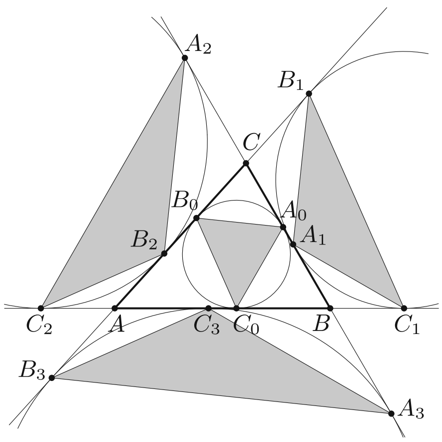
$$\frac{a}{2} \geqslant \frac{c}{2}, \quad x \geqslant x, \quad y \geqslant x, \quad y \geqslant z$$

egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy BDS kerülete legalább akkora, mint AFS kerülete, és egyenlőség csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségnél az egyenlőség esete áll fenn. Ekkor pedig $a=c$; és $y=z$, amiből következik, hogy $b=c$. Tehát $a=b=c$, vagyis a háromszög szabályos.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy ha a feltétel igaz, akkor a háromszög biztosan szabályos.

Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

46 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 19 versenyző: Baski Bence, Bursics András, Dobák Dániel, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Kitschner Bernadett, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Soós Máté, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Terjék András József, Török Mátyás, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 6, 4 pontos 4, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.



B. 5010. Egy hegyesszögű ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_0, B_0 és C_0 pontokban érinti. A háromszög három hozzáírt körének érintési pontjai az oldalegyeneseken rendre A_1, B_1 és C_1; A_2, B_2 és C_2; illetve A_3, B_3 és C_3. Az $A_iB_iC_i$ háromszög területét jelölje T_i $(i=0,1,2,3)$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}.$$

(*5 pont*)

Megoldás. Először belátjuk, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszögben a C_0-ból induló m_{C_0}, és az $A_3B_3C_3$ háromszögben a C_3-ból induló m_{C_3} magasságok megegyeznek. Ennek igazolásához tekintsük az *ábrát.*

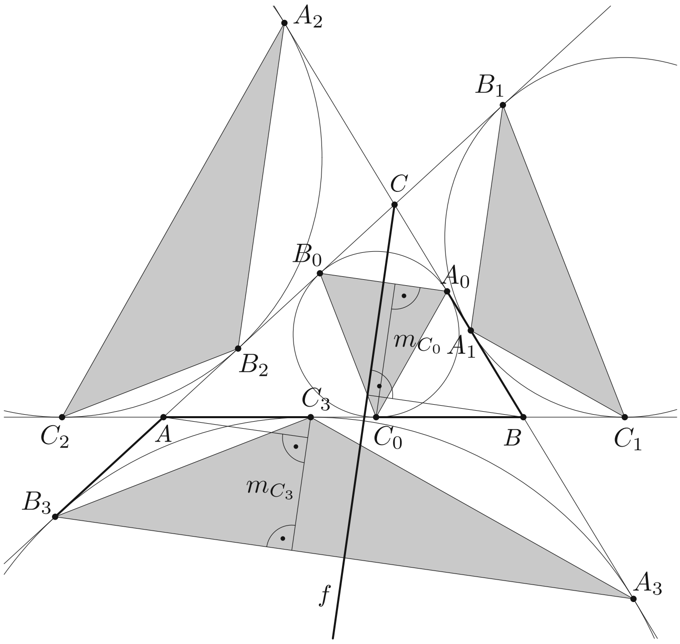
Mivel a külső pontból körhöz húzott érintők hossza megegyezik, ezért $CA_0=CB_0$, illetve $CA_3=CB_3$. Természetesen ebből az is adódik, hogy A_0B_0 és A_3B_3 párhuzamos szakaszok, amelyek közös szakaszfelező merőlegese éppen a C-beli belső szögfelező, jelöljük ezt f-fel.

Az m_{C_0} és m_{C_3} magasságok éppen az f-re vett vetületekkel adhatók meg, ezért jelölje tetszőleges x szakasz f-re vonatkozó merőleges vetületét x^f. Az ábráról leolvasható, hogy $m_{C_0}=(C_0B)^f+(BA_0)^f$, illetve $m_{C_3}=(C_3A)^f+(AB_3)^f$.

Jól ismert, hogy

$$AB_3=AC_3=BC_0=BA_0=s-b,$$

ahol s az ABC háromszög kerületének fele. Ebből egyrészt nyilvánvalóan $(C_3A)^f=(C_0B)^f$, mivel C_3A és C_0B közös egyenesre illeszkedő, egyenlő hosszú szakaszok. Másrészt $(AB_3)^f=(BA_0)^f$ is következik, mivel ez a két szakasz is egyenlő hosszú, és AB_3 f-re vonatkozó tükörképe illeszkedik a BA_0 egyenesre. Ezzel az $m_{C_0}=$



m_{C_3} egyenlőséget beláttuk. Hasonlóan igazolhatók az $m_{B_0} = m_{B_2}$ és $m_{A_0} = m_{A_1}$ összefüggések is (értelemszerű jelölésekkel).

Felhasználva a bizonyított $m_{C_0} = m_{C_3}$ összefüggést, továbbá a párhuzamos szelőszakaszok tételét kapjuk, hogy

$$\frac{T_0}{T_3} = \frac{B_0A_0}{B_3A_3} = \frac{CB_0}{CB_3} = \frac{s-c}{s},$$

s hasonlóan

$$\frac{T_0}{T_2} = \frac{s-b}{s} \quad \text{és} \quad \frac{T_0}{T_1} = \frac{s-a}{s}.$$

Ezeket összegezve

$$\frac{T_0}{T_1} + \frac{T_0}{T_2} + \frac{T_0}{T_3} = \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} + \frac{s-c}{s} = \frac{3s-2s}{s} = 1,$$

ami a bizonyítandóval ekvivalens.

Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 21 versenyző: Apagyi Dávid, Baski Bence, Beke Csongor, Bukva Dávid, Csaplár Viktor, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Stomfai Gergely, Telek Zsigmond, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 4 pontos 3, 3 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.