(privát) számpárok mérete határozza meg, ami már teljesen független az e, d, N számok előállításának módjától, azaz itt a futási időben változás nem várható.

Megjegyzendő végül, hogy ha a prímtesztelésnél a nagyon nagy valószínűséggel helyes eredmény helyett a biztosan jó válaszhoz ragaszkodunk, akkor immár ez az igény is kielégíthető – az algoritmus bonyolultságának növekedése árán. Mindezt Agrawal, Kayal és Saxena 2002-ben publikált eredménye biztosítja.

1 *millió alatti Carmichael-számok* (43 db)

Hex	**Dec**	**Prímfelbontás**	**Hex**	**Dec**	**Prímfelbontás**
231	561	$3\cdot 11\cdot 17$	3DAB9	252 601	$41\cdot 61\cdot 101$
451	1105	$5\cdot 13\cdot 17$	44011	278 545	$5\cdot 17\cdot 29\cdot 113$
6C1	1729	$7\cdot 13\cdot 19$	47E09	294 409	$37\cdot 73\cdot 109$
9A1	2465	$5\cdot 17\cdot 29$	4CDC5	314 821	$13\cdot 61\cdot 397$
B05	2821	$7\cdot 13\cdot 31$	51949	334 153	$19\cdot 43\cdot 409$
19C9	6601	$7\cdot 23\cdot 41$	53251	340 561	$13\cdot 17\cdot 23\cdot 67$
22CF	8911	$7\cdot 19\cdot 67$	61699	399 001	$31\cdot 61\cdot 211$
2959	10 585	$5\cdot 29\cdot 73$	641B9	410 041	$41\cdot 73\cdot 137$
3DE1	15 841	$7\cdot 31\cdot 73$	6DA29	449 065	$5\cdot 19\cdot 29\cdot 163$
729D	29 341	$13\cdot 37\cdot 61$	775B1	488 881	$37\cdot 73\cdot 181$
A051	41 041	$7\cdot 11\cdot 13\cdot 41$	7D1CD	512 461	$31\cdot 61\cdot 271$
B641	46 657	$13\cdot 37\cdot 97$	819C1	530 881	$13\cdot 97\cdot 421$
CD99	52 633	$7\cdot 73\cdot 103$	86F11	552 721	$13\cdot 17\cdot 41\cdot 61$
F519	62 745	$3\cdot 5\cdot 47\cdot 89$	A04D9	656 601	$3\cdot 11\cdot 101\cdot 197$
F9E5	63 973	$7\cdot 13\cdot 19\cdot 37$	A0D71	658 801	$11\cdot 13\cdot 17\cdot 271$
12661	75 361	$11\cdot 13\cdot 17\cdot 31$	A3951	670 033	$7\cdot 13\cdot 37\cdot 199$
18AED	101 101	$7\cdot 11\cdot 13\cdot 101$	B6C71	748 657	$7\cdot 13\cdot 19\cdot 433$
1C4D1	115 921	$13\cdot 37\cdot 241$	C97B1	825 265	$5\cdot 7\cdot 17\cdot 19\cdot 73$
1ED09	126 217	$7\cdot 13\cdot 19\cdot 73$	CCA39	838 201	$7\cdot 13\cdot 61\cdot 151$
27A61	162 401	$17\cdot 41\cdot 233$	D0369	852 841	$11\cdot 31\cdot 41\cdot 61$
2A031	172 081	$7\cdot 13\cdot 31\cdot 61$	F3901	997 633	$7\cdot 13\cdot 19\cdot 577$
2E02D	188 461	$7\cdot 13\cdot 19\cdot 109$			

Kiss Gábor

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Dani kerékpárversenyre készül. Először hegynek felfelé, utána vízszintes terepen, majd lejtőn lefelé hajtja a biciklit, ezután visszafelé ugyanezen az útvonalon hajt végig. Lejtőn lefelé 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, vízszintes terepen 40 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, míg hegynek felfelé 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

állandó sebességgel képes haladni. Az odafele utat 1,75 óra alatt, míg a visszafele utat 2,25 óra alatt tette meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok, ha oda-vissza összesen 130 km-t biciklizett?

(Közben sehol sem állt meg, a visszafordulás időveszteség nélkül zajlódik le.) (*13 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Meg tudunk úgy adni végtelen sok prímet, hogy bármely kettő összege ne legyen prím.

B: Ha az a_n^2 sorozat konvergens, akkor a_n is konvergens.

C: Ha öt különböző természetes szám összege osztható öttel, akkor öttel osztva különböző maradékot adnak.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. *a*) Döntsük el, hogy az implikáció asszociatív művelet-e, azaz tetszőleges A; B; C kijelentések esetén fennáll-e, hogy $(A \to B) \to C = A \to (B \to C)$. (*4 pont*)

b) Határozzuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát a derékszögű koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira igaz, hogy $PA^2 + PB^2 = 22$, ahol $A(1;2)$ és $B(3;0)$.

(*8 pont*)

4. Legyen A a $2^x + 2^{1-x} \leqslant 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig az alábbi két függvény értékkészletének közös része:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(2019\pi x) \quad \text{és} \quad g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

a) Határozzuk meg az A halmazt. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg a megadott függvények értékkészletét és a B halmazt. (*7 pont*)

c) Hány eleme van az $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ halmaznak, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli? (*2 pont*)

II. rész

5. *a*) Egyik este Anna, Bea, Csilla, Dóra és Emese elmentek vacsorázni a közeli pizzázóba. Mindannyian másféle pizzát rendeltek. A pincér még új, így a rendelt ételeket véletlenszerűen osztotta ki a lányoknak (de azokat hozta ki, amiket rendeltek). Jelölje X azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hányan kapták a saját rendelésüket. Határozzuk meg X várható értékét. (*8 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$2^n - 1 = m^2. \qquad (8\ pont)$$

6. *a*) Egy derékszögű háromszög beírt és köré írt körének sugarát jelölje r és R. Mekkorák a háromszög oldalai, ha tudjuk, hogy $r+R=31$ és $rR=150$? (*8 pont*)

b) Egy szabályos ötszög mindegyik oldalát kiszínezzük három adott szín valamelyikével. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha forgatással egymásba vihetők? (*8 pont*)

7. *a*) A lappföldi Mikulásnak két rénszarvasa van: Vágta és Éppenhogycsak. Ha valamelyik nap Vágta egyedül x sebességgel $(x>1)$ húzná a szánt, akkor Éppenhogycsakot melléfogva az még $1/x$ sebességet tud hozzáadni. A Mikulás már öreg, emiatt ijedős. Minél gyorsabban megy a szán, annál többször fogja vissza az állatokat. A precíz mérések szerint, ha Vágta x sebességgel húzná a szánt, akkor ez éppen $\ln x$ sebességcsökkenést eredményez. Egyszer egy ellenőrzésnél azzal vádolják meg a Mikulást, hogy lassan hajtott. Lappföldön a lassúhajtás határa 7/4. Meg tudja-e védeni magát a Mikulás?

(Használjuk fel, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.) (*9 pont*)

b) A sakk egy érdekes változata az ún. Fischer random sakk, melyet Robert Fischer amerikai világbajnok hozott létre 1996-ban. A lényegi eltérés a tisztek (király (K), vezér (V), 2 bástya (B), 2 huszár (H), 2 futó (F)) elhelyezkedésében rejlik.

Az alapállás szabályai:

- A király a bástyák között foglal helyet.
- A futók ellentétes színű mezőn állnak.

A felsorolt tiszteket az alábbi 1×8-as táblázatba kell elhelyezni (az *ábrán* egy helyes kitöltés látható):

F	H	B	F	H	K	B	V

Az azonos minőségű tisztek között (pl. két huszár stb.) csak a futóknál van megkötés arra, hogy szükségszerűen különböző színen kell állniuk.

Mutassuk meg, hogy 960 megengedett alapállás lehetséges a Fischer random sakkban. (*7 pont*)

8. *a*) Egy tizenkét elemű, egész számokból álló mintából ismerünk hét értéket: 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13. Tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 5 és a minta átlagának szórás sugarú környezete három tizedesjegyre kerekítve $]\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma[\, = \,]3{,}292;8{,}708[$. Határozzuk meg a minta hiányzó öt elemét. (*8 pont*)

b) Egyenlő szárú háromszög szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát. (*8 pont*)

9. *a*) Bence nemrég tanulta az iskolában a szinusztételt és a koszinusztételt. Sajnos rosszul emlékezett rájuk és azokat az alábbi módon jegyezte meg (a jelölések a szokásosak):

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cdot\sin\gamma \quad \text{és} \quad \frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyre igazak a Bence által megtanult összefüggések? (*7 pont*)

b) Határozzuk meg az a; b; c egész paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. $f'(3) = -11$.
2. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.
3. Csúcspontja illeszkedik az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletű egyenesre. (*9 pont*)

Fridrik Richárd
Szeged

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2019–2020-as tanévre (2019 szeptemberétől 2020 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 950 Ft-ért megvásárolható a szerkesztőségben.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2019–2020-as tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás* a KöMaL 2019–2020. évi pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2019 szeptemberétől 2020 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.