B. 5036. Az M pontból két érintőt húztunk egy O középpontú derékszögű hiperbolához. Az egyik érintő a hiperbola egyik aszimptotáját a P, a másik érintő a másik aszimptotát a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy az OM egyenes felezi a PQ szakaszt.

(*5 pont*)

B. 5037. Adott egy P poliéder. A P-t feldaraboljuk a $P_1, \ldots, P_k$ poliéderekre, valamint a $Q_1, \ldots, Q_k$ poliéderekre is úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek egybevágóak. Mutassuk meg, hogy kijelölhetünk P belsejében néhány pontot úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek belsejébe ugyanannyi (legalább egy) pont esik. (Minden poliéder helyzete rögzített a térben.)

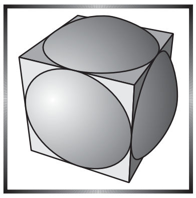
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (752–754.)



A. 752. Legyenek k, s és n pozitív egész számok úgy, hogy $s < (2k+1)^2$, és legyen R a sík azon (x, y) rácspontjainak halmaza, amelyre $1 \leqslant x, y \leqslant n$. Az R pontrácson a következő eljárást végezzük el. Kezdetben R egy pontját zöldre, a többi pontját fehérre színezzük. Ezután minden lépésben kiválasztunk egy $2k \times 2k$ rácspontból álló S négyzetet, amelynek középpontja zöld, és legalább s fehér pontot tartalmaz, majd az S-beli fehér pontok közül valamelyik s pont színét zöldre változtatjuk. Ezt a lépést addig ismételgetjük, amíg csak található megfelelő S négyzet.

Azt mondjuk, hogy az s szám *k-ritka,* ha létezik olyan C pozitív valós szám, hogy bármely n, bármely kiinduló zöld pont, és a fenti lépések bármely szabályos sorozata után a zöld pontok száma nem lehet nagyobb, mint Cn.

Fejezzük ki a legkisebb k-ritka egész s számot k függvényében.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Sztara Zagora, Bulgária)

A. 753. Legyen a egész szám, és legyen p az $a^3 + a^2 - 4a + 1$ egy prímosztója. Mutassuk meg, hogy van olyan b egész szám, amelyre $p \equiv b^3 \pmod{13}$.

A. 754. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög belső pontja, és legyen Q a P izogonális konjugáltja. Legyen L, M és N a körülírt kör rövidebbik BC, CA, illetve AB ívének felezőpontja. Legyen X_A az LQ félegyenes és a PBC kör metszéspontja, X_B az MQ félegyenes és a PCA kör metszéspontja, és X_C az NQ félegyenes és a PAB kör metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a P, X_A, X_B és X_C pontok egy körön vannak vagy egybeesnek.

Javasolta: *Gustavo Cruz* (São Paulo)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 484. A Hanoi tornyai nevű játék rendkívül egyszerű. Három rúddal és N darab különböző méretű koronggal játszható. Kezdetben az egyik rúdon N korong helyezkedik el, alul a legnagyobb, majd fölötte rendre a kisebbek. Ekkor a másik két rúd üres. A játék szabályai szerint az egyik rúdról egy másikra kell átrakni a korongokat úgy, hogy minden lépésben egy korongot lehet áttenni, de nagyobb korong nem tehető kisebb korongra.

Peti is elkezdte játszani a játékot, de nem ért a végére. A játékot egy ilyen állapotban találjuk meg. Készítsünk programot, amely megad egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel ez az állapot előállítható.

A program standard bemenetének első sorában annak a rúdnak a sorszáma szerepel, amelyen kezdetben az összes korong volt. A következő sorban három szám, az egyes rudakon található korongok száma van. A következő három sorban az adott rúdon található korongok mérete szerepel csökkenő sorrendben. A kimenet első sora egyetlen számot tartalmaz, az állapot eléréséhez szükséges lépések L számát. A következő L sor mindegyikében két szám található, egymástól pontosan egy szóközzel elválasztva. Az első szám megadja a rudat amelyről, a második pedig azt a rudat, amelyre átkerül a felső korong. Feltételezhetjük, hogy Peti legfeljebb 10 koronggal játszik.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**

`2`
`2 2 0`
`3 2 / 4 1 /`
	`6`
	`2 1 / 2 3 / 1 3 / 2 1 / 3 2 / 3 1`