C. 1549. Az AB szakasz felezőpontja legyen F, továbbá legyen az AF szakasz egy tetszőleges pontja Z. F-ben merőlegest állítunk AB-re és felmérjük rá az $FX = FA$ távolságot. B-ben is merőlegest állítunk AB-re és felmérjük rá a $BY = AZ$ távolságot úgy, hogy X és Y az AB egyenesének egyazon oldalán legyenek. Mekkora lehet az XZY szög?

Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

C. 1550. Oldjuk meg az

$$n \cdot (1! + 2! + 3! + \ldots + n!) = (n + 1)!$$

egyenletet a pozitív egész számok halmazán.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1551. Adott az ABC háromszög, melyről a következőket tudjuk: AD és BE súlyvonalának hossza 3 cm, illetve 6 cm, a háromszög területe pedig $3\sqrt{15}$ cm^2. Határozzuk meg a harmadik súlyvonal hosszát, ha tudjuk, hogy ez a másik kettőtől különbözik.

C. 1552. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$ és $0 < b < 1$, akkor

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1.$$

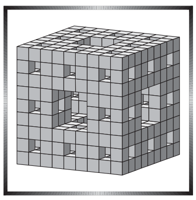
Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5030–5037.)



B. 5030. Mutassuk meg, hogy minden 1-nél nagyobb egész felírható 1-nél nagyobb, $2^p \cdot 3^q$ alakú számok összegeként úgy, hogy az összegnek nincs két olyan tagja, melyek egyike a másiknak osztója. (Például $23 = 9 + 8 + 6$, $11 = 9 + 2$ vagy $12 = 12$.)

(*4 pont*) *Erdős Pál* feladata

B. 5031. Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának D-n túli meghosszabbításán vegyük fel az F pontot. A BF szakasz a CD oldalt a G, az AC átlót pedig az E pontban metszi. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}.$$

(*3 pont*)

B. 5032. Mi a mértani helye egy egyenlő szárú háromszög belsejében azoknak a pontoknak, amelyeknek a száraktól mért távolságaik mértani közepe az alaptól mért távolsággal egyenlő?

(*4 pont*)

B. 5033. Az $\binom{n+1}{2}$ darab $a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,n},a_{2,1},a_{2,2},\ldots,a_{2,n-1},\ldots,a_{k,1},\ldots,a_{k,n+1-k},\ldots,a_{n,1}$ számot n-edrendű fordított Pascal-piramisnak hívjuk, ha tetszőleges $2\leqslant k\leqslant n$ és $1\leqslant j\leqslant n+1-k$ esetén $a_{k,j}=a_{k-1,j}+a_{k-1,j+1}$. Egy példa 3-adrendű fordított Pascal-piramisra:

$$\begin{array}{ccccc} & & a_{3,1}=2 & & \\ & a_{2,1}=1 & & a_{2,2}=1 & \\ a_{1,1}=-2 & & a_{1,2}=3 & & a_{1,3}=-2 \end{array}$$

Jelentse s_k a piramis k-adik sorában lévő számok összegét, azaz

$$s_k=a_{k,1}+a_{k,2}+\ \ldots+a_{k,n+1-k}.$$

Egy piramis jelváltó a k-adik ($k>1$) sorában, ha $s_{k-1}\cdot s_k<0$. Adott n esetén legfeljebb mekkora lehet a k értéke, ha egy n-edrendű piramis jelváltó a $2.,3.,\ldots,k$-adik sorában, de a $(k+1)$-edik sorában már nem? (A fenti példában $k=2$, mert $s_1\cdot s_2=-2<0$, de már $s_2\cdot s_3=4>0$.)

(*5 pont*)

B. 5034. Bizonyítandó, hogy ha egy konvex négyszög szögei α, β, γ, δ, és egyik sem derékszög, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\delta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta).$$

(*3 pont*) *Surányi János* feladata

B. 5035. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n\geqslant 8$ csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor több, mint

$$\frac{(n-5)^4}{64}$$

egyszínű, négy hosszú kör keletkezik.

(*6 pont*) *Pálfi Máté* (Budapest) javaslata nyomán

B. 5036. Az M pontból két érintőt húztunk egy O középpontú derékszögű hiperbolához. Az egyik érintő a hiperbola egyik aszimptotáját a P, a másik érintő a másik aszimptotát a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy az OM egyenes felezi a PQ szakaszt.

(*5 pont*)

B. 5037. Adott egy P poliéder. A P-t feldaraboljuk a $P_1, \dots, P_k$ poliéderekre, valamint a $Q_1, \dots, Q_k$ poliéderekre is úgy, hogy minden $i = 1, \dots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek egybevágóak. Mutassuk meg, hogy kijelölhetünk P belsejében néhány pontot úgy, hogy minden $i = 1, \dots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek belsejébe ugyanannyi (legalább egy) pont esik. (Minden poliéder helyzete rögzített a térben.)

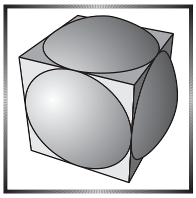
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (752–754.)



A. 752. Legyenek k, s és n pozitív egész számok úgy, hogy $s < (2k+1)^2$, és legyen R a sík azon (x, y) rácspontjainak halmaza, amelyre $1 \leqslant x, y \leqslant n$. Az R pontrácson a következő eljárást végezzük el. Kezdetben R egy pontját zöldre, a többi pontját fehérre színezzük. Ezután minden lépésben kiválasztunk egy $2k \times 2k$ rácspontból álló S négyzetet, amelynek középpontja zöld, és legalább s fehér pontot tartalmaz, majd az S-beli fehér pontok közül valamelyik s pont színét zöldre változtatjuk. Ezt a lépést addig ismételgetjük, amíg csak található megfelelő S négyzet.

Azt mondjuk, hogy az s szám *k-ritka,* ha létezik olyan C pozitív valós szám, hogy bármely n, bármely kiinduló zöld pont, és a fenti lépések bármely szabályos sorozata után a zöld pontok száma nem lehet nagyobb, mint Cn.

Fejezzük ki a legkisebb k-ritka egész s számot k függvényében.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Sztara Zagora, Bulgária)

A. 753. Legyen a egész szám, és legyen p az $a^3 + a^2 - 4a + 1$ egy prímosztója. Mutassuk meg, hogy van olyan b egész szám, amelyre $p \equiv b^3 \pmod{13}$.