II. megoldás. Könnyen látható, hogy ha x, y, z megoldás, akkor $|x|$, $|y|$, $|z|$ is megoldás. Az is világos, hogy ha valamelyik ismeretlen értéke 0, akkor a többié is; pl. $x=0$ esetén $y=xz=0=xy=z$. A pozitív megoldásokat keresve szorozzuk össze a három egyenletet; kapjuk, hogy $(xy)(xz)(yz)=zyx$, azaz $(xyz)^2=xyz$, ezért ilyenkor $xyz=1$. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $x\geqslant y\geqslant z$. Ekkor viszont $x\geqslant 1\geqslant z$ miatt $x=yz\leqslant y$, így $x=y$. Hasonlóan $z=xy\geqslant y$ szerint $y=z$, tehát $x=y=z=1$ az egyetlen pozitív megoldás. A többi nemnulla megoldás ettől előjelekben különbözhet csak, mégpedig úgy, hogy az egyik ismeretlen 1, a másik kettő pedig -1.

Megjegyzések. 1. Többen – a netes megoldáshoz hasonlóan – a három egyenletet összeszorozták, és az így kapott $(xyz)^2=xyz$ egyenletből jutottak eredményre. Sokan pedig a szimmetriát kihasználva az $x=\pm1$, $y=\pm1$ és $z=\pm1$ lehetőségeket vizsgálták, az eseteket leszűkítve annak segítségével, hogy csak páros darab negatív szám lehet a változók között.

2. Nagyon sokan úgy osztottak valamelyik változóval, hogy nem kötötték ki, hogy az nem lehet 0. Közülük legtöbben így nem kapták meg az $x=y=z=0$ megoldást, sokan pedig csak úgy odaírták, hogy az is megoldás. Többen csak egész számokra oldották meg a feladatot, holott ez nem volt benne a feladat szövegében.

328 dolgozat érkezett. 5 pontos 123, 4 pontos 33, 3 pontos 54, 2 pontos 29, 1 pontos 45, 0 pontos 30 dolgozat. Nem versenyszerű 4, nem számítunk a versenybe 10 dolgozatot.

Matematika feladatok megoldása

B. 4984. *Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész x számhoz található olyan pozitív egész y, amelyre x^3+y^3+1 osztható az $x+y+1$ számmal. Van-e olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok ilyen tulajdonságú y létezik?*

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

I. megoldás. Az $x=1$-re nyilván $y=1$ megfelelő. Ha $x>1$ és páratlan, akkor legyen $y=x-1$; ekkor

$$x+y+1=2x\mid 2x^3-3(x-1)x=x^3+(x-1)^3+1=x^3+y^3+1.$$

Végül, ha x páros, akkor legyen $y=x+1$. Ekkor

$$\begin{aligned}x+y+1&=x+(x+1)+1=\\&=2(x+1)\mid(x+1)(2x^2+x+2)=2x^3+3x^2+3x+2=\\&=x^3+(x+1)^3+1=x^3+y^3+1.\end{aligned}$$

Legyen ezután x tetszőleges pozitív egész. Mivel

$$x^3+y^3+1=(x+y+1)\big(y^2-(x+1)y+(x+1)^2\big)+x^3+1-(x+1)^3,$$

azért $x+y+1 \mid x^3+y^3+1$ esetén $x+y+1 \mid x^3+1-(x+1)^3$. Az utóbbi egész szám semmilyen pozitív egész x-re nem lehet 0 (hiszen két szomszédos pozitív köbszám különbsége nagyobb, mint 1), ezért csak véges sok osztója van. Tehát nincs olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok megfelelő y tartozna.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság miatt

$$(x+1)+y \mid (x+1)^3+y^3=(x^3+y^3+1)+(3x^2+3x).$$

Így y pontosan akkor teljesíti a feladat feltételét, ha $3x^2+3x=3x(x+1)$ osztható $x+y+1$-gyel. Ez pedig teljesül, ha $y=2x-1$, hiszen akkor

$$x+y+1=3x \mid 3x(x+1).$$

Az is látszik, hogy a 0-tól különböző $3x(x+1)$-nek csak véges sok osztója van, ezért $x+y+1$ csak véges sok megfelelő értéket vehet fel, tehát y is.

Ajtai Boglárka (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Használjuk fel az $x^3+y^3+1=(x+y+1)(x^2-xy-x+y^2-y+1)+3xy$ azonosságot. A feladat feltétele ekkor $x+y+1 \mid 3xy$. A véges sok megfelelő tulajdonságú y létezése abból is következik, hogy ha (adott x mellett) $y>3x^2+2x-1$, akkor $3xy>3xy-y+3x^2+2x-1=(x+y+1)(3x-1)$ szerint $\frac{3xy}{x+y+1}>3x-1$, másrészt a nyilvánvalóan teljesülő $y<x+y+1$ egyenlőtlenség miatt $\frac{3xy}{x+y+1}<3x$. Így ilyenkor $\frac{3xy}{x+y+1}$ két szomszédos egész szám közé esik, tehát nem lehet egész.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

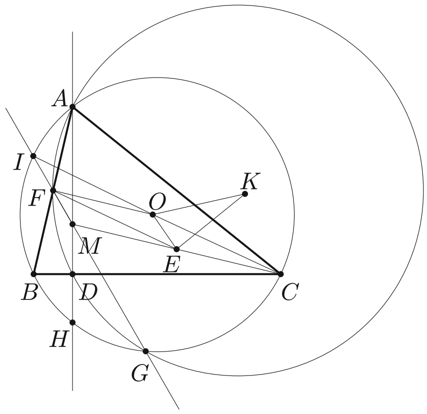
95 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 26, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4987. *Az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja pedig M, az A csúcsból induló magasság talppontja D, az AB oldal felezőpontja F. Az F pontból kiinduló és az M ponton átmenő félegyenes az ABC háromszög körülírt körét a G-ben metszi.*

a) Bizonyítsuk be, hogy az A, F, D, és G pontok egy körön vannak.

b) Jelöljük a fenti kör középpontját K-val, a CM szakasz felezőpontját E-vel. Igazoljuk, hogy $EK=OK$.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



Megoldás. *a*) Legyenek I és H rendre az M pont tükörképei az F és D pontokra. Közismert, hogy ekkor I és H rajta vannak az ABC háromszög köré írt körön. A húrtétel szerint $IM\cdot MG = HM\cdot MA$ (az M pontnak az ABC háromszög körülírt körére vonatkozó hatványa), ezért

$$2FM\cdot MG = 2DM\cdot MA,$$

vagyis $FM\cdot MG = DM\cdot MA$. Ebből a húrtétel megfordítása miatt következik, hogy $AFDG$ húrnégyszög.

b) F-re középpontosan tükrözve az AMF háromszöget a BIF háromszöget kapjuk, így $DAB\sphericalangle = MAF\sphericalangle = IBF\sphericalangle = IBA\sphericalangle$. Így $IBC\sphericalangle = IBA\sphericalangle + ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle + ABD = 90^\circ$. Tehát IC az $AIBHCG$ kör átmérője a Thalész-tétel megfordítása miatt, vagyis O felezi IC-t. Ekkor a Thalész-tétel szerint $IGC\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $MGC\sphericalangle = 90^\circ$, és ezzel – ismét a Thalesz-tétel megfordítását alkalmazva – kapjuk, hogy G rajta van az MC átmérőjű körön, melynek középpontja E. Így $EM = EG = EC$. AZ OEF az MIC háromszög középvonal-háromszöge, ugyanis O felezi az IC, E az MC, F pedig az MI szakaszt. Ezért $OE \parallel IM \parallel FG$, továbbá $OF = EM = EG$. Tehát $OEGF$ trapéz, melynek szárai egyenlő hosszúak, vagyis húrtrapéz. Így FG felezőmerőlegese megegyezik OE felezőmerőlegesével, hiszen ez a trapéz szimmetriatengelye. Mivel K az $AFDG$ kör középpontja, rajta kell lennie FG felezőmerőlegesén, ekkor viszont rajta van OE felezőmerőlegesén is. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy $EK = OK$.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 23 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Csaplár Viktor, Csertán András, Dobák Dániel, Fekete Richárd, Fülöp Anna Tácia, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Mátravölgyi Bence, Nguyen Bich Diep, Rareş Polenciuc, Snehansu Bhowmick, Szabó Dávid, Tálos Zoltán, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 4 pontos 2, 3 pontos 1, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4988. *Egy $(m+2)\times(n+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát". Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk.*

Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m\times n$-es „belseje" egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

(*6 pont*) (*Iráni feladat*)

Megoldás. Először is vegyük észre, hogy ha egy megfelelő kitöltés esetén a táblázat minden elemét (a „szélét", azaz az első és utolsó sort és oszlopot is) megszorozzuk egy konstanssal, akkor az így kapott táblázat is teljesíti a feladat feltételét (azaz minden belső szám a négy szomszédja átlaga). Valamint két megfelelő kitöltés összege is megfelelő kitöltés (az összegzést itt is elvégezve a táblázat szélén is).

Másodszor azt látjuk be, hogy bármely megfelelő kitöltés esetében a legnagyobb abszolút értékű tag csak a táblázat szélén szerepelhet – kivéve, ha a táblázat minden tagja azonos (beleértve a széleket is). Tegyük fel, hogy a táblázat belsejében van egy érték, mely a legnagyobb abszolút értékkel rendelkezik. Ez a szám csak úgy lehet a négy szomszédja átlaga, ha mind a négy szám megegyezik vele. Ugyanez igaz erre a négy szomszédra, azok összesen 8 darab (hacsak nem értünk már ki a szélre) szomszédjára, és így tovább, mindegyik érintett számból minden irányban továbbhaladva, egészen addig, amíg a teljes táblázatot le nem fedtük, a szélekkel együtt. Tehát ugyanaz az érték szerepel mindenhol (a széleket is beleértve).

A fentiekből az is látszik, hogy egyetlen megoldás lehet a szélek adott kitöltése esetén, hiszen ha lenne két megoldás, akkor ezek különbségére is teljesülne a feladat követelménye, viszont a különbségnél a széleken csupa nulla van. Így ennél nagyobb abszolút értékű szám nem szerepelhet a táblázatban, azaz a különbség minden száma nulla, vagyis a két kitöltés azonos.

Végül azt látjuk be, hogy mindig létezik megfelelő kitöltés. Ezt egy viszonylag egyszerű esetre látjuk be, amikor a táblázat szélének egyetlen tagja nem nulla, és ez a tag pont 1. Ha ezt beláttuk, akkor ezen táblázatok lineáris kombinációja a szélek tetszőleges kitöltését megadja, így az ilyen speciális táblázatok megoldásainak fentivel azonos lineáris kombinációja kiadja a megoldást a szélek adott kitöltésére az első pontban belátottak miatt.

Ehhez tegyük azt, hogy először a táblázat belsejébe csupa nullát írunk, ez lesz az A_1 táblázat. A második lépésben minden belső mezőbe a négy szomszédja átlagát írjuk (a széleken lévő értékeket természetesen nem változtatjuk); így kapjuk az A_2 táblázatot. Ugyanezt a lépést ismételgetve kapjuk az A_3, A_4 stb. táblázatokat. Az első lépésben egyetlen szám értéke fog változni, a szélen lévő 1-es érték szomszédja 0-ról $\frac{1}{4}$-re nő, az összes többi érték marad 0. Teljes indukcióval látszik, hogy egy lépés során a táblázat egyetlen értéke sem csökkenhet (hiszen az előző lépésben sem csökkent egyetlen érték sem, és nem kisebb számok átlaga sem lesz kisebb a korábbi átlagnál). Azt is tudjuk, hogy ezen táblázatok egyetlen belső számának értéke sem lehet soha 1, vagy annál több (a megoldás második pontja miatt). Azaz az egymás utáni táblázatok minden adott helyen lévő értéke egy monoton növő, korlátos sorozatot alkot, ami így konvergens lesz. És mivel a határértékek átlaga megegyezik az átlag határértékével, így az $A_1, A_2, \ldots$ táblázatok határértéke a speciális feladat megoldása lesz.

Ezzel bebizonyítottuk az utolsó bizonyítandó állítást, tehát a feladat állítását is igazoltuk.

Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A megoldás mindkét része erősen támaszkodik a valós számok rendezhetőségére (és a rendezés teljességére). Mivel a feladat követelménye csupán a számokkal végzendő alapműveletekről szól, jogosan vetődik fel a kérdés, vajon érvényben marad-e valami a feladat állításából, ha a valós számok helyett egy nem rendezhető test elemeivel töltjük ki a táblázatot.

Ha valós számok helyett komplex számok szerepelnek, akkor a beírt számok valós és képzetes részeivel kapott táblázatokra külön-külön alkalmazható a valós esetre adott bizonyítás, így ebben az esetben a feladat mindkét állítása igaz marad. Második próbálkozásként tekintsük a háromelemű $T=\{0,1,2\}$ testet a modulo 3 összeadás és szorzás műveletével. Mivel T-ben $3=1+1+1=0$, itt négy szám átlaga a számok összegével egyenlő. Tekintsük itt a levágott sarkú 4×3-as táblázatot, aminek szélső soraiban és oszlopaiban minden mezőbe nullát írtunk. A belső két mező mindegyikébe szintén nullát írva megfelelő kitöltést kapunk, de megfelel az a kitöltés is, ha a két belső mezőbe 1-es kerül: ezek mindegyikének három 0 és egy 1-es szomszédja van, amelyek átlaga e számok összege: $0+0+0+1=1$; így ez is egy megfelelő kitöltés, tehát az egyértelműség ekkor nem teljesül.

Továbbra is 4×3-as táblázatot és a T test elemeit használva írjunk az első (külső) sor üres mezőjébe 1-et, a többi szélső sor és oszlop mezőibe pedig nullákat. A középső (belső) oszlop két mezőjébe (az 1-es alá) írandó értékeket jelölje rendre x és y. Az x szomszédai 0, 1, 0 és y lévén $x=0+1+0+y=1+y$ szükséges. Hasonlóan, y szomszédai 0, x, 0 és 0 lévén $y=0+x+0+0=x$-nek is teljesülnie kellene, ezekből viszont $x=1+y=1+x$ következik, ami ellentmondás. Tehát ebben az esetben a táblázatnak nem létezik a feladat követelményeinek megfelelő kitöltése.

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 3 versenyző: Sebestyén Pál Botond, Tóth Balázs, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 3 pontos 6, 2 pontos 3, 1 pontos 10, 0 pontos 1 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1546–1552.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1546. Oldjuk meg az egész számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$(x-8)(x-10)=2^y.$$

(*Amerikai versenyfeladat*)

C. 1547. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög EF oldalának felezőpontját jelölje K. Adjuk meg az $ABCD$ töröttvonalon azt az L pontot, melyre az AKL háromszög területe egyenlő a hatszög területének $\frac{2}{5}$ részével.

Bakos Tibor feladata nyomán

Feladatok mindenkinek

C. 1548. Anna gondol egy 3×3-as négyzet néhány mezőjére. Ezután megmondja Bálintnak minden sorról és oszlopról, hogy hány mező szerepel benne az általa gondoltak közül. Hányféleképpen tud Anna úgy gondolni, hogy az általa adott információkból Bálint ne találhassa ki egyértelműen, melyek voltak a gondolt mezők?