

Vegyük észre, hogy minden sorban az  $(a_i, b_i) = a_{n+1}$  (=LNKO) azonosak minden  $i = 0, \dots, n+1$  esetén. (Az  $(n+1)$ -edik sort az egységes jelölés végett szűrtük csak be.)

Az  $ax + by = 1$  diophantoszi egyenlet vizsgálatánál említett 2. következmény (Bézout-lemma) miatt minden sorra igaz, hogy az  $(a_i, b_i) = a_i x_i + b_i y_i$  egyenletnek van  $x_i, y_i$  megoldása. Speciálisan az  $(n+1)$ -edik sornál  $x_{n+1} = 1, y_{n+1} = 0$ .

Megmutatjuk, hogy az  $i$ -edik sor  $x_i, y_i$  együtthatói származtathatók az  $(i+1)$ -edik sor együtthatóiból, azaz hátulról visszafelé indulva az  $x_{n+1}, y_{n+1} = 1, 0$  párból kiszámítható az  $x_0, y_0$  pár, azaz meghatározható az  $(a, b) = ax + by$  diophantoszi egyenlet megoldása.

Tegyük fel, hogy az  $(a_{i+1}, b_{i+1}) = a_{i+1}x_{i+1} + b_{i+1}y_{i+1}$  egyenlet  $x_{i+1}, y_{i+1}$  megoldása már ismert. Ugyanezt az összefüggést az  $i$ -edik sorra alkalmazva  $(a_i, b_i) = a_i x_i + b_i y_i$ . Behelyettesítve a felfelé mutató nyilakkal jelölt egyenlőségeket, valamint felhasználva a sor elemei közötti belső összefüggést:

$$\begin{aligned}(a_i, b_i) &= a_i x_i + b_i y_i = (k_i b_i + r_i) x_i + b_i y_i = (k_i a_{i+1} + b_{i+1}) x_i + a_{i+1} y_i = \\ &= a_{i+1} (k_i x_i + y_i) + b_{i+1} x_i = (a_{i+1}, b_{i+1}).\end{aligned}$$

Az együtthatók egyenlőségéből  $x_{i+1} = k_i x_i + y_i$  és  $y_{i+1} = x_i$ , ahonnan átrendezéssel:

$$\begin{aligned}x_i &= y_{i+1}, \\ y_i &= x_{i+1} - k_i x_i = x_{i+1} - k_i y_{i+1},\end{aligned}$$

vagyis az  $i$ -edik sor együtthatói kiszámíthatók az  $(i+1)$ -edik sor együtthatóiból, tehát az eljárás végén megkapjuk a keresett  $x_0, y_0$  megoldást.

Vegyük észre, hogy az algoritmus alkalmazásakor szükségünk van a  $k_i$  hányadosokra, melyeket az LNKO meghatározásakor veremben kell elhelyezni. Mivel az  $ax \equiv 1 \pmod{n}$  kongruencia megoldása ekvivalens az  $ax - ny = 1$  diophantoszi egyenlet megoldásával, a fenti eljárással az  $a$  modális inverzét is meg tudjuk határozni.

*A cikk folytatása a szeptemberi számban lesz olvasható.*

**Kiss Gábor**

## Megoldásvázlatok a 2019/5. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

### I. rész

1. a) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők.

(3 pont)

b) Oldjuk meg a  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  halmazon a  $\sin(x + 2019\pi) = -\frac{1}{2}$  egyenletet. (8 pont)

**Megoldás.** a) A képzett számok első számjegye háromféle (2, 1 vagy 9), második és harmadik számjegye négyféle (2, 0, 1, vagy 9) lehet, ezért az összes lehetőség száma (az előbbieket szorozva, azaz)  $3 \cdot 4^2 = 48$ . A megadott számjegyekből  $3^2 \cdot 2 = 18$  különböző számjegyekből álló háromjegyű szám képezhető.

Ez a kedvező esetek száma. Így a keresett valószínűség:  $\frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ .

b) I. megoldás. Az addíciós tétel alapján:

$$\sin x \cdot \cos(2019 \cdot \pi) + \cos x \cdot \sin(2019 \cdot \pi) = -\frac{1}{2}.$$

$\sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0 = -\frac{1}{2}$ . Az egyenletet rendezve:  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Ebből  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , vagy  $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . A megadott alaphalmazon csak  $x = \frac{5\pi}{6}$  megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

II. megoldás. A szinusz függvény periodicitása miatt:  $\sin(x + 1009 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin(x + \pi) = -\frac{1}{2}$ . Az egyenletet  $x$ -re megoldva:  $x + \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ebből (az egyik gyök)  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Az egyenletet  $x$ -re megoldva:  $x + \pi = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Ebből (a másik gyök)  $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . A megadott alaphalmazon csak  $x = \frac{5\pi}{6}$  megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

III. megoldás. Az egyenletet  $x$ -re megoldva:  $x + 2019 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ebből az egyik gyök  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Az egyenletet  $x$ -re megoldva:

$$x + 2019 \cdot \pi = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

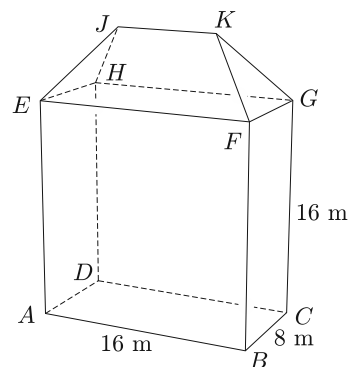
Ebből a másik gyök  $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . A megadott alaphalmazon csak  $x = \frac{5\pi}{6}$  megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az 1. ábrán ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a 2. ábrán pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.



1. ábra



2. ábra

A torony az  $ABCDEFGH$  téglatestből és az  $EFGHJK$  tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei:  $AB = 16$  m,  $BC = 8$  m és  $CG = 16$  m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltér-fogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? (4 pont)

Tudjuk, hogy az  $EFGHJK$  tető magassága 5 méter, és az  $EJH$  és  $FKG$  egyenlő szárú háromszögek síkjai  $50^\circ$ -os szöget zárnak be az  $EFGH$  síkkal.

b) Mekkora a  $JK$  szakasz hossza? (5 pont)

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segíté-  
ték a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a  
talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafoly-  
lyamatban a tanulók  $\frac{1}{5}$  része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? (3 pont)

**Megoldás.** a) *I. megoldás.* Az  $ABCDEFGH$  téglatest térfogata:

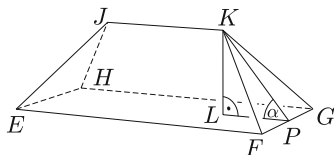
$$V_{ABCDEFGH} = 16 \cdot 8 \cdot 16 = 2048 \text{ (m}^3\text{)}.$$

A belső téglatest 12 m hosszú, 4 m széles és 16 m magas, így ennek térfogata:  
 $V_{\text{belső}} = 12 \cdot 4 \cdot 16 = 768 \text{ (m}^3\text{)}.$

Az oldalfalak térfogata:  $V = V_{ABCDEFGH} - V_{\text{belső}} = 2048 - 768 = 1280 \text{ (m}^3\text{)},$   
melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal csökkentve a keresett térfogat  
 $1280 \cdot 0,95 = 1216 \text{ m}^3$  lesz.

*II. megoldás.* A hosszabbik oldalfal 16 m hosszú, 16 m magas és 2 m vastag,  
így ennek térfogata:  $V_1 = 16 \cdot 16 \cdot 2 = 512 \text{ (m}^3\text{)}.$  A rövidebbik oldalfal 4 m hosszú,  
16 m magas és 2 m vastag, így ennek térfogata:  $V_2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128 \text{ (m}^3\text{)}.$

Mivel a hosszabbik és a rövidebbik oldalfalból kettő van, így a teljes térfogat:  
 $V = (512 + 128) \cdot 2 = 1280 \text{ (m}^3\text{)},$  melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal  
csökkentve a keresett térfogat  $1280 \cdot 0,95 = 1216 \text{ m}^3$  lesz.



b) Az  $EFGHJK$  tető magassága a tető  
 $K$  csúcsából az  $EFGH$  síkra bocsátott merőle-  
ges szakasz. Az  $EFGHJK$  tető  $K$  csúcsából in-  
duló magasságát és az  $FKG$  háromszög alaphoz  
tartozó magasságát behúzva, a tető és az  $EFGH$   
sík hajlásszöge  $\alpha$ . Az  $LPK$  derékszögű három-  
szögben:  $\text{tg } 50^\circ = \frac{5}{LP}$ , ahonnan  $LP = \frac{5}{\text{tg } 50^\circ} (\approx 4,2 \text{ m}).$

Mivel a tető szimmetrikus, ezért  $JK = 16 - 2 \cdot \frac{5}{\text{tg } 50^\circ} \approx 7,61$  m hosszú.

c) *I. megoldás.* Jelölje  $x$  a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ekkor:

mindhárom munkafolyamatban  $0,075 x$ ;  
pontosan két munkafolyamatban  $0,2 x$ ;  
pontosan egy munkafolyamatban  $29$  tanuló vesz részt.

Ebben az esetben tehát az egyenlet:  $0,075 x + 0,2 x + 29 = x$ . Ebből  $x = 40$ .

*II. megoldás.* Jelölje  $x$  a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ha az egyes  
munkafolyamatokat összegezzük, akkor egyszeresen számoltuk azokat, akik csak

egyféle, kétszeresen, akik kétféle, és háromszorosan azokat, akik mindhárom tevékenységet végezték.

Ebben az esetben tehát az egyenlet:  $1,35x = 29 + 2 \cdot 0,2x + 3 \cdot 0,075x$ . Ebből  $x = 40$ .

3. a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\log_2 x \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x) \quad (7 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol  $x$  és  $y$  nemnegatív valós számok.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 8, \\ \sqrt{xy} &= 33. \end{aligned} \right\} \quad (7 \text{ pont})$$

**Megoldás.** a) *I. megoldás.* A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha  $x > 0$ . A két oldalt azonos alakra hozva:

$$\log_2 x \leq \frac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}.$$

A logaritmus azonossága alapján:  $\log_2 x \leq \log_2(4x)^{-1}$ . A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt:  $x \leq \frac{1}{4x}$ .

Mivel  $x > 0$ , így az egyenlőtlenséget rendezve:  $x^2 \leq \frac{1}{4}$ . Ebből  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza  $]0; \frac{1}{2}]$ .

*II. megoldás.* A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha  $x > 0$ . A két oldalt azonos alakra hozva:

$$\log_2 x \leq \frac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}.$$

A nevezővel beszorozva:  $-\log_2 x \geq \log_2(4x)$ . A logaritmus azonossága alapján:  $-\log_2 x \geq \log_2 4 + \log_2 x$ . Az egyenlőtlenséget rendezve:  $\log_2 x \leq -1$  ( $= \log_2 \frac{1}{2}$ ).

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt:  $x \leq \frac{1}{2}$ , melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza  $]0; \frac{1}{2}]$ .

b) *I. megoldás.* Mindkét egyenletet négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{xy} + y &= 64, \\ xy &= 1089. \end{aligned}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy  $x + y = 130$ , ahonnan  $y = 130 - x$ . A második egyenletből  $y = 130 - x$  helyettesítéssel:  $x^2 - 130x + 1089 = 0$ . Ebből  $x_1 = 121$  és  $x_2 = 9$ , majd visszahelyettesítve  $y_1 = 9$  és  $y_2 = 121$ .

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$x_1 = 121$  és  $y_1 = 9$  megoldása az egyenletnek;

$x_2 = 9$  és  $y_2 = 121$  nem megoldása az egyenletnek.

II. megoldás. A gyökvonás azonossága alapján:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8,$$

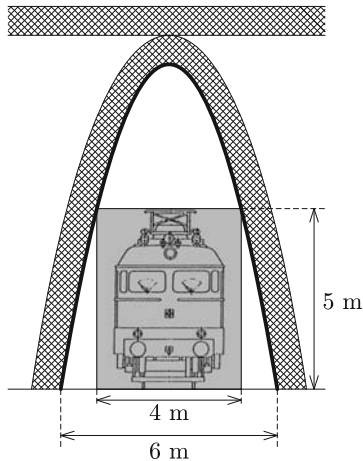
$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 33.$$

Az első egyenletből:  $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 8$ , melyet a második egyenletbe helyettesítve:  $x - 8\sqrt{x} - 33 = 0$ . Ebből  $(\sqrt{x})_1 = 11$  és  $(\sqrt{x})_2 = -3$ . Az egyenlet gyökei:  $x_1 = 121$  és  $x_2 = 9$ , majd visszahelyettesítve  $y_1 = 9$  és  $y_2 = 121$ .

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$x_1 = 121$  és  $y_1 = 9$  megoldása az egyenletnek;

$x_2 = 9$  és  $y_2 = 121$  nem megoldása az egyenletnek.



4. A vasúti szaknyelven űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az ábrán vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.

a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján?

(8 pont)

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszélet alakú. A parabolaszéletet a koordináta-rendszerben megadott

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

egyenletű parabola és az  $x$  tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

b) Hány  $m^3$  követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg.

(6 pont)

**Megoldás.** a) Rögzítsünk úgy egy koordináta-rendszert, hogy az  $x$ -tengely a sínek szintje, az  $y$ -tengely pedig a parabolaív szimmetriatengelye legyen. Ekkor ennek a parabolának az általános egyenlete:  $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$ .

Ebben a koordináta-rendszerben a parabolaív első síknegyedbe eső részén ki tudunk jelölni két pontot:  $A(3;0)$ , és  $B(2;5)$ . Az előbbi két pontot a parabola általános egyenletébe behelyettesítve megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2p} \cdot 3^2 + v, \\ 5 &= -\frac{1}{2p} \cdot 2^2 + v. \end{aligned}$$

Ebből  $v = 9$  és  $p = 0,5$ .

Mivel  $v$  éppen a keresett magasság, a tartószerkezet a belső ívének középső, legmagasabb pontján 9 méter magas.

b) A keresett térfogat a parabolaszélet területének és az alagút hosszának a szorzata. A parabola két zérushelye:  $x_1 = -4$  és  $x_2 = 4$ . A kiszámítandó  $T$  terület:

$$T = \int_{-4}^4 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) dx.$$

A határozott integrál értéke:

$$\left[ -\frac{x^3}{6} + 8x \right]_{-4}^4 = \left( -\frac{64}{6} + 32 \right) - \left( \frac{64}{6} - 32 \right) = \frac{128}{3}.$$

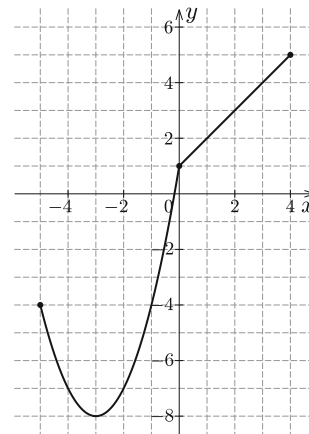
Tehát a kitermelt kő térfogata  $\frac{128}{3} \cdot 24 = 1024 \text{ (m}^3\text{)}$ .

## II. rész

5. a) *Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a  $0; 1; 2; 3; 4; 5$  számjegyekből áll és osztható 12-vel.* (5 pont)

b) *A  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot?* (3 pont)

c) *Adjuk meg az ábrán látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény  $E(-1; -4)$  pontjában húzott érintőjének meredekségét.* (8 pont)



**Megoldás.** a) Egy tízes számrendszerbeli szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is. A képzett szám biztosan osztható 3-mal, mert a számjegyek összege ( $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ). A képzett szám csak akkor osztható

4-gyel, ha az utolsó két számjegye: 04; 12; 20; 24; 32; 40 vagy 52. A keresett szám akkor lesz a legkisebb, ha a nagy alaki értékű számjegyek kis helyiértéken állnak.

(Mivel a szám nem kezdődhet 0-val), a legkisebb feltételeknek megfelelő szám a 103 452.

b) A  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  halmaznak összesen  $2^6 = 64$  db részhalmaza van. Azok a részhalmazok, amelyek nem tartalmazzak páratlan számot, a  $\{0; 2; 4\}$  halmaz részhalmazai, melyek száma  $2^3 = 8$ .

A kérdéses részhalmazok száma:  $2^6 - 2^3 = 56$ .

c) Az ábrázolt függvény két részből áll: egy másodfokú és egy lineáris függvényből. A felfelé nyíló nem nyújtott parabola talppontja (és egyben a függvény minimuma) a  $(-3; -8)$  pont, így ha  $x \in [-5; 0]$ , akkor  $f(x) = (x + 3)^2 - 8$ . A lineáris függvény az  $y$  tengelyt a  $(0; 1)$  pontban metszi, meredeksége 1, tehát ha  $x \in ]0; 4]$ , akkor  $f(x) = x + 1$ .

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 - 8, & \text{ha } x \in [-5; 0], \\ x + 1, & \text{ha } x \in ]0; 4]. \end{cases}$$

Az  $E$ -ben húzott érintő meredekségét az  $f$  deriváltfüggvényének az  $x = -1$  helyen felvett helyettesítési értéke adja meg:  $f'(x) = 2x + 6$ ,  $f'(-1) = 4$ .

6. Tekintsük az  $a_n = n^2 + 2$  sorozatot.

a) Határozzuk meg a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$  határértéket. Válaszunkat indokoljuk. (2 pont)

b) Számítsuk ki az  $(a_n)$  sorozat első száz tagjának összegét. (4 pont)

Az  $(a_n)$  sorozat egymást követő tagjai segítségével a  $b_n = a_{n+1} - a_n$  sorozatot képeztük.

c) Igazoljuk, hogy a  $(b_n)$  sorozat számtani sorozat. (3 pont)

d) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az  $(a_n)$  sorozat  $a_1 = 3$  és  $n > 1$  esetén megadható az

$$a_n = \left(1 + \frac{2n - 1}{n^2 - 2n + 3}\right) \cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is.

(7 pont)

**Megoldás.** a) Ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor  $n^2 + 2$  is végtelenbe tart. (Mivel a tört nevezője végtelenbe tart), ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 2} = 0.$$

b) A sorozat első száz tagját összeadva:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = (1^2 + 2) + (2^2 + 2) + \dots + (100^2 + 2) =$$

a jobb oldalon lévő összeg tagjait csoportosítva:

$$= (1^2 + 2^2 + \dots + 100^2) + 2 \cdot 100.$$

A zárójelben az első 100 db pozitív egész szám négyzetének összege  $\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$  szerepel, ezért a sorozat első száz tagjának összege:

$$\frac{100(100+1)(2 \cdot 100+1)}{6} + 2 \cdot 100 = 338\,550.$$

c) Azt kell megmutatni, hogy a  $(b_n)$  sorozat egymást követő tagjainak különbsége állandó. A sorozat képzési szabályába behelyettesítve:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n = [(n+1)^2 + 2] - [n^2 + 2] = 2n + 1, \\ b_n - b_{n-1} &= (2n + 1) - (2n - 2 + 1) = 2, \end{aligned}$$

tehát a sorozat valóban számtani.

d) Teljes indukciót alkalmazunk. Ha  $n = 1$ , akkor az állítás igaz, mert mindkét képzési szabályból  $a_1 = 3$ .

Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy  $k$  pozitív egész számra, azaz létezik olyan  $k$  szám, amelyre teljesül, hogy  $a_{k-1} = (k-1)^2 + 2$ . Ekkor igazolnunk kell, hogy:

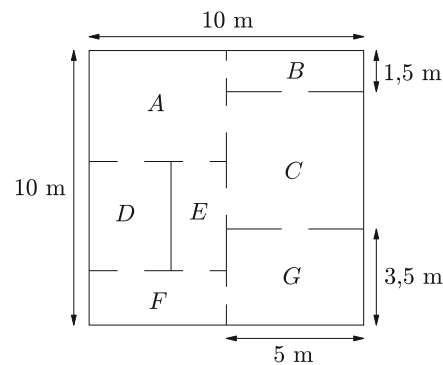
$$a_k = \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot a_{k-1} = k^2 + 2.$$

Az indukciós feltevés miatt:

$$\begin{aligned} a_k &= \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot ((k-1)^2 + 2) = \\ &= \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot (k^2 - 2k + 3) = \\ &= k^2 - 2k + 3 + 2k - 1 = \\ &= k^2 + 2. \end{aligned}$$

7. Az ábrán egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)

a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. (3 pont)





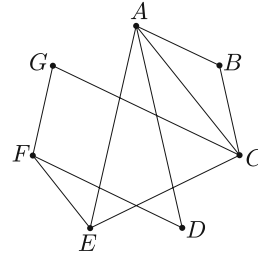
A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a  $C$  jelű szobában? (8 pont)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (5 pont)

**Megoldás.** a) A családi ház földszintjének gráfja:

A foksámok összege:  $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 20$ .



b) *I. megoldás.* A földszint és a padlás alapterülete is  $100 \text{ m}^2$ , a pince alapterülete  $25 \text{ m}^2$ . Ezek összege  $225 \text{ m}^2$ .

Ha a macska a földszinten van, akkor a valószínűség  $\frac{100}{225} \cdot p$ , ha a padláson, akkor  $\frac{100}{225} \cdot 2p$ , ha a pincében, akkor  $\frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}$ . A kedvező esetek száma:  $\frac{100}{225} \cdot p$ . Az összes eset száma:

$$\frac{100}{225} \cdot p + \frac{100}{225} \cdot 2p + \frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}$$

Annak a valószínűsége, hogy a macska a földszinten van:

$$P = \frac{\frac{100}{225} \cdot p}{\frac{100}{225} \cdot p + \frac{100}{225} \cdot 2p + \frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}} = 0,32.$$

Mivel a  $C$  jelű szoba alapterülete  $25 \text{ m}^2$ , a földszint alapterülete  $100 \text{ m}^2$ , így az ott tartózkodás valószínűsége:  $\frac{25}{100} \cdot 0,32 = 0,08$ .

*II. megoldás.* Jelölje  $p$  annak a valószínűségét, hogy a macska a földszinten tartózkodik. Ez esetben annak a valószínűsége, hogy a padláson van  $2p$ , annak a valószínűsége, hogy a pincében fekszik  $\frac{p}{8}$ . Mivel a macska vagy a pincében, vagy a földszinten vagy a padláson tartózkodik, ezért az egyes helyeken való tartózkodások valószínűségeinek összege biztosan 1:

$$\frac{p}{8} + p + 2p = 1, \quad \text{ebből} \quad p = \frac{8}{25}.$$

Mivel a  $C$  jelű szoba alapterülete  $25 \text{ m}^2$ , a földszint alapterülete  $100 \text{ m}^2$ , így az ott tartózkodás valószínűsége:  $\frac{25}{100} \cdot 0,32 = 0,08$ .

c) *I. megoldás.* Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot. Ez egy 7 csúcsú teljes gráf esetén háromféleképpen jöhet létre: ha az eredeti gráfot egy 3 és 4 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 9.

Ha az eredeti gráfot egy 2 és 5 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 11.

Ha az eredeti gráfot egy 1 és 6 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 15.

Így az eredeti gráfból legalább  $21 - 15 = 6$  db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

*II. megoldás.* Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot.

Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát  $x$ , ekkor a másik részgráfban  $7 - x$  csúcs lesz, így az egyes részgráfok éleinek száma:

$$\frac{x \cdot (x - 1)}{2} \quad \text{és} \quad \frac{(7 - x) \cdot (6 - x)}{2}.$$

A megmaradó élek száma  $x$  függvényében:

$$e(x) = \frac{x \cdot (x - 1)}{2} + \frac{(7 - x) \cdot (6 - x)}{2} = x^2 - 7x + 21.$$

Mivel  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , ezért az  $e$  függvény akkor maximális, ha  $x = 1$  vagy  $x = 6$  (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).

Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

*III. megoldás.* Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot.

Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát  $x$ , ekkor a másik részgráfban  $7 - x$  csúcs lesz. Mivel minden csúcs minden csúccsal össze van kötve a teljes gráfban, ezért az  $x$  csúcsú részgráf mindegyik csúcsából a másik részgráfba vezető mindegyik élt ki kell törölni, ezért a kitörendő élek száma  $x$  függvényében  $k(x) = -x^2 + 7x$ .

Mivel  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , ezért az  $k$  függvény akkor minimális, ha  $x = 1$  vagy  $x = 6$  (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).

Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

**8.** Az alábbi táblázat hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavaszi	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását.

(4 pont)



Az ábrán látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, északi irányba áll és a vízszintes talapzattal  $60^\circ$ -os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága  $42^\circ$  volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.

b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (5 pont)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márvánnyal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplappja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha  $1\text{ m}^3$  2 cm vastag márvánnyal ára 540 000 Ft? Válaszunkat tízezer forintra kerekítve adjuk meg. (7 pont)

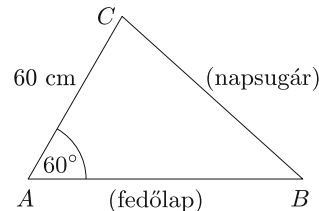
**Megoldás.** a) A napsütéses órák átlaga:

$$\bar{x} = \frac{575,2 + 845,7 + 403 + 180,1}{4} = 501 \text{ (óra)}.$$

A napsütéses órák szórása:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-74,2)^2 + 344,7^2 + (-98)^2 + (-320,9)^2}{4}} \approx 243,36 \text{ (óra)}.$$

b) A feladat megértését tükröző ábra:



Az  $ABC \sphericalangle = \beta = 42^\circ$ , így a háromszög  $C$  csúcsánál lévő  $\gamma$  szöge  $78^\circ$ . Az  $ABC$  háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin 78^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{AB}{60},$$

ahonnan  $AB \approx 87,71$  cm.

c) *I. megoldás.* A betonnal kiöntésre kerülő test egy négyzet alapú hasáb, melynek alapéle 0,96 m, magassága 0,78 m. A betonnal kiöntött rész térfogata:

$$V_b = 0,96 \cdot 0,96 \cdot 0,78 (\approx 0,72 \text{ m}^3).$$

A talapzat térfogata:

$$V_t = 1 \cdot 1 \cdot 0,8 (= 0,8 \text{ m}^3).$$

A talapzatba beépítésre kerülő márvány térfogata:

$$V_m = V_t - V_b \approx 0,08 \text{ m}^3.$$

Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a, ezért a vásárolt márvány térfogata:

$$V = \frac{100}{90} \cdot V_m \approx 0,09 \text{ m}^3.$$

A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.

*II. megoldás.* A márványborítás területét megkapjuk, ha a fedőlap területéhez hozzáadjuk a két-két egyforma oldallap területét. A fedőlap élei 1 méter hosszúak, az egyik oldallap élei 1 m és 0,78 m, a szomszédos oldallap élei 0,96 m és 0,78 m hosszúságúak.

$$A = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0,78 + 2 \cdot 0,96 \cdot 0,78 \approx 4,06 \text{ m}^2.$$

(A márványlapok térfogata:)

$$V \approx 4,06 \cdot 0,02 \approx 0,08 \text{ m}^3.$$

Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a, ezért a vásárolt márvány térfogata:

$$V = \frac{100}{90} \cdot V_m \approx 0,09 \text{ m}^3.$$

A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.

**9.** Az alábbi táblázatban a gyorsajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

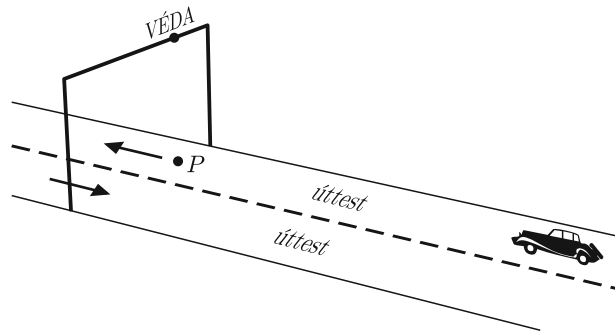
*Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)*

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
<b>Balesetek száma</b>	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét. (3 pont)

Hazánkban a rendőrség rendszám-tábla alapján azonosítja a gyorsajtókat. Egy sebességmérés alkalmával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15°-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.

(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



- b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a  $P$  ponttól 40 m távolságban az úttest közepén a VÉDA irányába közlekedő személyautót? (4 pont)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

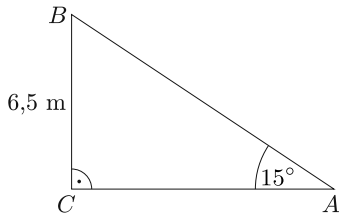
„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk.”

- c) Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége. (9 pont)

**I.** Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

**II.** Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

**Megoldás.** a) A medián: 12, a terjedelem: 11.



b) Készítsünk ábrát.

Az  $ABC$  derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{6,5}{AC}, \text{ ahonnan } AC = \frac{6,5}{\operatorname{tg} 15^\circ} \approx 24,26 \text{ m.}$$

Tehát a sebességmérő berendezés 40 m távolságból nem érzékeli a személyautót.

- c) Jelölje  $A$  azt az eseményt, hogy a biztosított ügyfél férfi,  $B$  azt, hogy nő,  $C$  pedig azt, hogy baleset történik. Ekkor a feladat szövege alapján:  $P(A) = 0,65$ ;  $P(B) = 0,35$  és  $P(C) = p$ .

Annak a valószínűsége, hogy ha baleset történik, akkor azt nő okozza:  $P(B|C) = 0,31$ .

Annak a valószínűsége, hogy ha baleset történik, akkor azt férfi okozza:  $P(A|C) = 0,69$ .

(A feltételes valószínűség definíciója alapján:)

$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} \text{ és } P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)},$$

ahonnan  $P(BC) = 0,31p$  és  $P(AC) = 0,69p$ .

Annak a valószínűsége, hogy ha nő vezet az autót, akkor ő okozza a balesetet:

$$P(C|B) = \frac{0,31p}{0,35} \approx 0,89p.$$

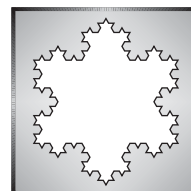
Annak a valószínűsége, hogy ha férfi vezet az autót, akkor ő okozza a balesetet:

$$P(C|A) = \frac{0,69p}{0,65} \approx 1,06p.$$

Mivel  $P(C|B) < P(C|A)$ , így a II. esemény bekövetkezésének valószínűsége nagyobb.

Varga Péter  
Budapest

## C gyakorlat megoldása



**C. 1497.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$xy = z,$$

$$xz = y,$$

$$yz = x.$$

**I. megoldás.** Jelölje az első egyenletet (1), a másodikat (2), a harmadikat pedig (3). A (3)-at az (1)-be beírva adódik, hogy  $yz \cdot y = z$ . Ha  $z \neq 0$ , akkor mindkét oldalt  $z$ -vel osztva ebből  $y^2 = 1$  következik.

1. eset.  $y = 1$ . Ekkor (1) alapján  $x = z$ , és így (2)-ből  $x^2 = 1$ .

Ha  $x = 1$ , akkor (1) miatt  $z = 1 \cdot 1 = 1$ . Ha  $x = -1$ , akkor szintén (1) alapján  $z = -1 \cdot 1 = -1$ .

2. eset.  $y = -1$ . Ekkor (1)-ből  $-x = z$ , és így (2) miatt  $-x^2 = -1$ , vagyis  $x^2 = 1$ .

Ha  $x = 1$ , akkor (1) miatt  $z = 1 \cdot -1 = -1$ . Ha pedig  $x = -1$ , akkor szintén (1) alapján  $z = -1 \cdot -1 = 1$ .

Végül, ha  $z = 0$ , akkor (2) miatt  $y = 0$ , (3) miatt pedig  $x = 0$ .

A megoldások tehát:

$x$	1	-1	1	-1	0
$y$	1	1	-1	-1	0
$z$	1	-1	-1	1	0

Selmi Bálint (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)