KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 5. szám Budapest, 2019. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Lángi Zsolt: Konvex poliéderek stabil lapjai 258

Kiss Gábor: Az RSA kulcsgenerálás és a Carmichael-számok kapcsolata 1. 264

Varga Péter: Megoldásvázlatok a 2019/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához 270

Matematika C gyakorlat megoldása (1497.) 283

Matematika feladatok megoldása (4984., 4987., 4988.) 284

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1546–1552.) 288

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5030–5037.) 289

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (752–754.) 291

Informatikából kitűzött feladatok (484–486., 36., 135.) 292

Világos Blanka: A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiáról 297

Mérési feladatok megoldása (381., 382.) 300

Fizika gyakorlatok megoldása (660., 663.) 305

Fizika feladatok megoldása (5084., 5090., 5097., 5100.) 306

Fizikából kitűzött feladatok (387., 673–676., 5132–5142.) 312

Problems in Mathematics 317

Problems in Physics 318

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Konvex poliéderek stabil lapjai

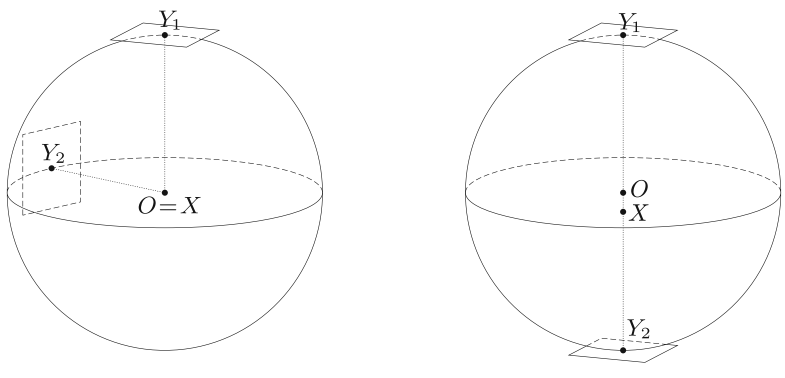
Az első, testek statikai egyensúlyával kapcsolatos eredmények Arkhimédész nevéhez fűződnek, mely eredményeket még a 17. századi hajóépítők is használták. A statikai egyensúlyi pontok vizsgálata végigvonul a fizika és a mérnöki tudományok történetén.

Mi is egy test egyensúlyi pontja? Mi az alábbi módon fogalmazzuk meg.

1. definíció. Legyen K egy konvex test, és X a test egy rögzített belső pontja. Azt mondjuk, hogy a test egy Y határpontja K egy *egyensúlyi pontja X-re nézve*, ha az Y-on átmenő, XY szakaszra merőleges sík nem metszi a K test belsejét. Ha X a K test tömegközéppontja (*homogén* sűrűséget feltételezve), azt mondjuk, hogy az Y pont K egy *egyensúlyi pontja.*

Példák egyensúlyi pontokra:

- Egy gömb minden határpontja egyensúlyi pont a gömb középpontjára nézve. Ha az X viszonyítási pont nem a gömb középpontja, akkor a gömbnek X-re nézve csak két egyensúlyi pontja van: az X-hez legközelebbi, és a vele átellenes, X-től legtávolabbi pontja.
- Egy szabályos tetraéder minden csúcsa, élközéppontja és lapközéppontja a kocka egyensúlyi pontja (a kocka középpontjára nézve).
- Általánosabban: az öt szabályos poliéder minden csúcsa, él- és lapközéppontja a poliéder egyensúlyi pontja.



1. ábra. Egy gömb minden pontja egyensúlyi pont a tömegközéppontra nézve, de más pontra nézve csak a hozzá legközelebbi, illetve a tőle legtávolabbi pontok egyensúlyi pontok

Más módon is megfogalmazhatjuk, mi is egy egyensúlyi pont: az Y pont a K test egy egyensúlyi pontja, ha a K testet alátámaszthatjuk az Y pontban egy vízszintes síkkal, hogy ne billenjen el. Ekkor a tömegközéppont pontosan Y felett fog elhelyezkedni. Ebben a megközelítésben a tömegközépponttól különböző X viszonyítási pontot tekinthetjük úgy, mint egy *inhomogén* sűrűségű test tömegközéppontját.

Akár homogén, akár inhomogén sűrűséget feltételezve, többféle egyensúlyi pontot különböztethetünk meg. A mindennapokban leginkább *stabil* egyensúlyi pontokkal találkozunk, azaz olyan pontokkal, melyben megtámasztva a testet, az egyensúlyi helyzetből tetszőleges irányban kicsit kibillentve a test visszabillen az egyensúlyi helyzet felé. Ilyen egyensúlyi pontok például a homogén sűrűségű szabályos poliéderek lapközéppontjai, illetve inhomogén gömb esetében a gömbnek a súlyponthoz legközelebbi határpontja.

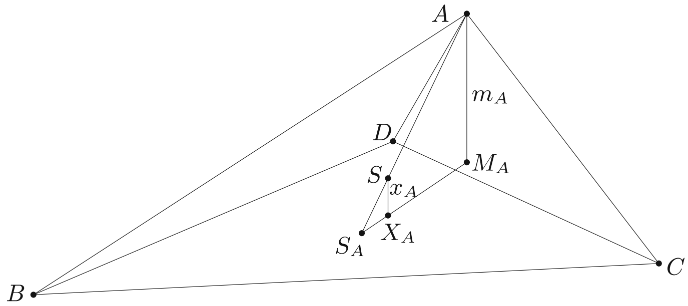
Konvex poliéder esetében a stabil egyensúlyi pontok éppen a lapok belsejében elhelyezkedő egyensúlyi pontok. Így egy P konvex poliéder azon lapjait, melyek belseje tartalmaz egyensúlyi pontot, a továbbiakban stabil lapoknak nevezzük, ezek azok a lapok, melyek síkjára merőlegesen vetítve a poliéder súlypontját, a vetület a lap belsejébe esik. Meggondolható, hogy a súlypontjához legközelebbi lap mindig stabil, így minden poliédernek van legalább egy stabil lapja. A pontosan egy stabil lappal rendelkező poliédereket *monostabil* poliédereknek nevezzük.

John Conway és Richard Guy tette fel az alábbi kérdést 1966-ban: Igaz-e, hogy minden homogén tetraédernek legalább két stabil egyensúlyi pontja van? A kérdésre az igenlő választ Goldberg [2] adta 1969-ben. Ugyanezen állításra később, 1984-ben egy egyszerűbb és érthetőbb bizonyítás jelent meg Dawson egy cikkében [3].

A továbbiakban Dawson bizonyítását ismertetjük Conway és Guy kérdésére.

1. tétel. *Minden tetraédernek van legalább két stabil lapja.*

Bizonyítás. Legyen T egy tetszőleges tetraéder, melynek csúcsai A, B, C és D. A tetraéder súlypontját jelölje S, és az A-val szemközti háromszöglap súlypontját S_A. Legyen a tetraéder A-ból induló magasságának talppontja M_A, és S-nek a BCD háromszög síkjára vett merőleges vetülete X_A. Legyen $m_A = \overline{AM_A}$ és $x_A = \overline{SX_A}$ (lásd *2. ábra*). Hasonlóan definiáljuk az S_B, S_C és S_D pontokat, valamint az m_B, x_B, m_C, x_C, m_D, x_D mennyiségeket.



2. ábra. Az $ABCD$ tetraéderre vonatkozó jelölések

Ismert, hogy a tetraéder súlypontja a tetraéder minden súlyvonalát 1 : 3 arányban osztja, azaz

$$\frac{\overline{AS_A}}{\overline{SS_A}} = \frac{\overline{BS_B}}{\overline{SS_B}} = \frac{\overline{CS_C}}{\overline{SS_C}} = \frac{\overline{DS_D}}{\overline{SS_D}} = 4.$$

Vegyük észre, hogy az SS_AX_A és az AS_AM_A háromszögek hasonlóak. A megfelelő oldalaik arányára így

$$\frac{m_A}{x_A} = \frac{\overline{AS_A}}{\overline{SS_A}} = 4$$

adódik. Hasonlóan kapjuk az

$$\frac{m_B}{x_B} = \frac{m_C}{x_C} = \frac{m_D}{x_D} = 4$$

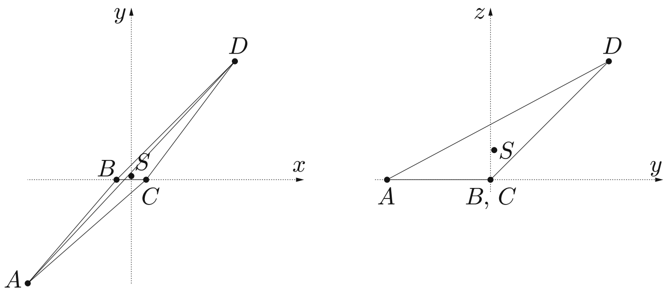
egyenlőségeket. Mivel a tetraéder térfogatát úgy számolhatjuk ki, hogy tetszőleges lap területét megszorozzuk a hozzátartozó magasság harmadával, azt kapjuk, hogy a súlypont tetszőleges két lap közül pontosan ahhoz van közelebb, melynek a területe nagyobb.

Egy lapon pontosan akkor van stabil egyensúlyi pont, ha S merőleges vetülete a lap síkjára a lap belsejébe esik. Másrészt, mivel a súlypont a tetraéder egy belső pontja, a tetraéder egyik lapjáról csak úgy billenhet át egy másik lapjára, ha a két lap közti lapszög tompaszög. A billenés után a súlypont lejjebb kerül, azaz a tetraéder csak olyan lapjára tud átbillenni, amelynek a síkjához a súlypont közelebb van. Az előző bekezdésben meggondoltak szerint így a tetraéder csak kisebb területű lapról egy nagyobb területű lapra tud átbillenni.

Tegyük most fel, hogy T-nek csak egy stabil lapja van. Vegyük észre, hogy a fentiek szerint a stabil lap így a legnagyobb területű lap. Legyen T legnagyobb lapja BCD, és a második legnagyobb lapja ACD. A tetraéder egy harmadik lapja így vagy először az ACD lapra, és arról a BCD lapra gördül, vagy ez a lap és az ACD lap is közvetlenül a BCD lapra gördül. Mindkét esetben igaz az, hogy a két legnagyobb lap egyikéhez két derékszögnél nagyobb lapszög tartozik, és az egyik ilyen lapszög a két legnagyobb lap közti lapszög. Jelölje ezt a lapot F, és a tetraéder negyedik lapját G. Ekkor F és G szöge hegyesszög, és G merőleges vetülete F síkjára szigorúan tartalmazza F-et. De így F területe határozottan kisebb, mint G területe, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy F a két legnagyobb, G pedig a két legkisebb területű lap egyike. □

1967-ben Heppes Aladár [6] konstruált egy T tetraédert egy érdekes, a fenti problémához kapcsolódó tulajdonsággal: a Heppes-féle ‘double-tipping’ tetraédernek két lapján található stabil pont, és egy harmadik lapján megtámasztva a tetraéder először a negyedik lapra gördül, mielőtt találna egy egyensúlyi helyzetet valamelyik stabil lapon. Hogyan is néz ki ez a tetraéder? Ezt mutatjuk meg a továbbiakban.

Legyen $A = (-7; -7; 0)$, $B = (-1; 0; 0)$, $C = (1; 0; 0)$ és $D = (7; 8; 8)$ egy T tetraéder négy csúcsa. Ekkor a tetraéder alaplapja az (x, y)-koordinátasíkban helyezkedik el, és súlypontja, melynek koordinátáit az egyes csúcsok megfelelő koordinátájaként számolhatjuk ki, az $S = (0; 0{,}25; 2)$ pont, melynek vetülete az alaplap síkjára $S' = (0; 0,25; 0)$. A tetraéder alaplapja az ABC lap, amin az S' pont kívül esik, tehát T ebből a helyzetből átfordul egy másik lapra.



3. ábra. A T tetraéder vetülete az (x, y) és az (y, z) síkokra

A D csúcs vetülete az ABC lap síkjára a $D' = (7; 8; 0)$ pont, ami az A, B és C pontokkal együtt egy konvex négyszöget alkot. Ebből látható, hogy az $ABCD$ tetraéder AB és AC élénél levő lapszöge hegyesszög, tehát az ABC lapról T a BC él mentén, vagyis az x-tengely körül fordul át a BCD lapra.

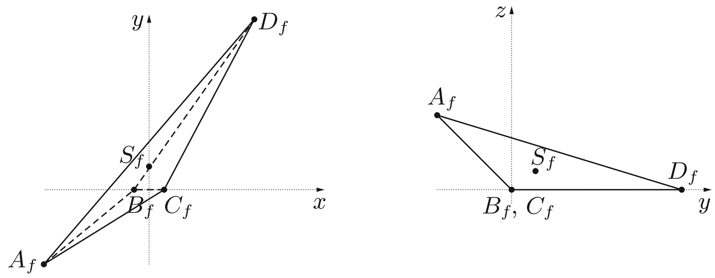
Vegyük észre, hogy mind az ABC, mind a BCD lap merőleges az (y, z)-koordinátasíkra. A tetraéder csúcsainak merőleges vetületei erre a síkra rendre $\bar{A} = (0; -7; 0)$, $\bar{B} = \bar{C} = (0; 0; 0)$ és $\bar{D} = (0; 8; 8)$. Ebből látható, hogy a T tetraéder BC élénél levő lapszöge $135°$, azaz az átfordulás szöge az x-tengely körül $45°$. Minthogy a forgás során a pontok x-koordinátái nem változnak, kiszámolhatóak az elfordult T_f tetraéder csúcsainak koordinátái, melyek rendre

$$A_f = \big(-7; -3,5\sqrt{2}; 3,5\sqrt{2}\,\big); \quad B_f = B = (-1; 0; 0);$$

$$C_f = C = (1; 0; 0); \quad D_f = \big(7; 8\sqrt{2}; 0\big).$$

A T_f tetraéder súlypontja, és ennek vetülete az (x, y)-koordinátasíkra rendre

$$S_f = \big(0; 1{,}125\sqrt{2}; 0{,}875\sqrt{2}\,\big); \quad S'_f = \big(0; 1{,}125\sqrt{2}; 0\big).$$



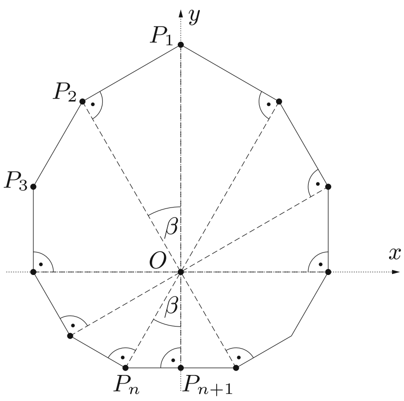
4. ábra. Az elfordult T_f tetraéder vetülete az (x, y) és az (y, z) síkokra

Könnyen kiszámolható, hogy S'_f kívül esik az átfordult tetraéder $B_fC_fD_f$ alaplapján. Így a tetraédernek ez a lapja sem stabil, azaz T_f ebből a helyzetből is átfordul valamelyik éle mentén egy harmadik lapjára, mely az első tételünk szerint stabil.

Láttuk, hogy minden tetraédernek legalább két stabil lapja van. Esetleg igaz-e az is, hogy minden konvex poliédernek van legalább két stabil lapja? Conway és Guy [2] alábbi konstrukciója mutatja, hogy ez viszont nem igaz.

2. tétel. *Van olyan* 19 *lapú* K *konvex poliéder, melynek pontosan egy stabil lapja van a tömegközéppontjára nézve.*

A bizonyítás ötlete Először egy A $(2n-1)$-szöget definiálunk az (x,y)-síkon az alábbi módon, ahol $n \geqslant 2$.

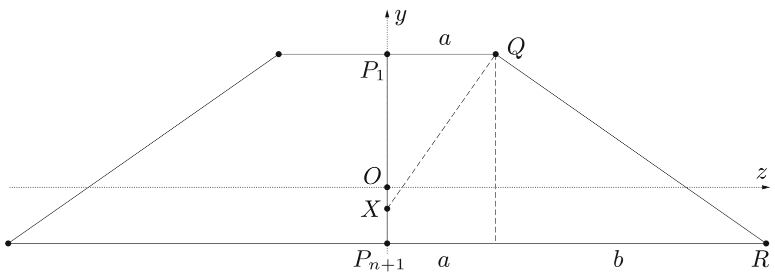


5. ábra. Az A $(2n-1)$-szög konstrukciója

Legyen $\beta = \frac{\pi}{n}$, és P_1P_2O egy olyan derékszögű háromszög, melyben $\overline{OP_1} = 1$, $P_1OP_2\sphericalangle = \beta$ és $P_1P_2O\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$ (ld. *5. ábra*). Írjunk a háromszög OP_2 befogójára egy OP_2P_3 háromszöget, mely hasonló az OP_1P_2 háromszöghöz, átfogója OP_2, és O-nál levő szöge β. Ezen háromszög OP_3 befogójára ugyancsak írjunk egy hasonló háromszöget, melynek átfogója OP_3, és O-nál levő szöge β. Az eljárást folytatjuk, amíg eljutunk az OP_nP_{n+1} háromszöghöz, amely ugyancsak hasonló az OP_1P_2 háromszöghöz, átfogója OP_n, és O-nál levő szöge β. Ekkor β definíciója miatt a P_1, O, P_{n+1} pontok egy egyenesen vannak, és a $P_nP_{n+1}O$ szög derékszög. Trigonometrikus függvények használatával könnyen látható, hogy $\overline{OP_2} = \cos\beta$, $\overline{OP_3} = \cos^2\beta$, illetve általában $\overline{OP_i} = \cos^{i-1}\beta$ minden $i = 1, 2, \ldots, n+1$ esetén, azaz speciálisan P_n és P_{n+1} rajta vannak az (x,y)-sík $y = -\cos^n\beta$ egyenletű egyenesén.

A $P_2, P_3, \ldots, P_n$ pontokat tükrözzük az y-tengelyre, és jelölje a tükörképeket rendre $P_2', P_3', \ldots, P_n'$. A konstruálni kívánt A sokszöget a $P_1P_2 \ldots P_nP_n' \ldots P_2'$ töröttvonal határolta konvex sokszögként definiáljuk. Vegyük észre, hogy az OP_{n+1} szakasz tetszőleges belső pontjára igaz, hogy A oldalegyeneseire vett merőleges vetületei közt egyetlenegy van, amelyik A-nak is pontja; ez a pont a P_{n+1} pont a P_nP_n' oldal egyenesén. Ez az észrevétel lesz az alapja a konstrukciónknak.

Legyen G az a végtelen gúla, melyet úgy kapunk, hogy A minden pontjában merőlegest bocsátunk az (x,y)-síkra, és vesszük az összes így keletkezett egyenes unióját. Ebből a végtelen gúlából egy korlátos K gúlát fogunk konstruálni úgy, hogy elmetsszük két S_1, S_2 síkkal, melyek szimmetrikusak az (x,y)-síkra, és merőlegesek az (x,z)-síkra (ld. *6. ábra*). Ezen síkok metszete az (y,z)-síkkal egy-egy egyenes. Az S_1, S_2 síkokat úgy választjuk, hogy S_1 tartalmazza a $Q(0;1;a)$ és az $R(0;-\cos^n\beta, a+b)$ pontot, ahol $a, b > 0$, és az S_2 sík S_1 tükörképe az (x,y)-síkra. $(2n-1)$-szög. A poliéder szimmetriái miatt látható, hogy a poliéder súlypontja a P_1P_{n+1} szakasz egy pontja.



6. ábra. A K csonkolt gúla (y, z)-síkra vett merőleges vetületének képe

Állítsunk merőlegest az S_1 síkra a Q pontban, és a merőleges egyenes y-tengellyel vett metszéspontját jelölje X. Ha a poliéder súlypontja az OX szakasz egy belső pontja, akkor K-nak csak egy stabil lapja van; ez a lap a P_nP_n' szakaszt tartalmazó lap. Megmutatjuk, hogy ha a értéke rögzített és b értéke nagyon nagy a-hoz képest, akkor $n = 9$ esetén ez teljesül.

Ha $b \gg a$, akkor $P_{n+1} \in OX$, tehát csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a súlypont y-koordinátája negatív-e. Kiszámolható, hogy a $t = \cos\beta$ jelöléssel a súlypont y-koordinátája

$$y_s = -\frac{t}{12\sin\beta}\Bigg[-2a(1+t^{3n})\frac{(1-t^2)(1+2t^2)}{1+t^2-t^4} + \frac{b}{1+t^n}\cdot$$

$$\cdot\left((1-t^{4n})\frac{1+2t^2+4t^4+2t^6-3t^8}{(1+t^2)(1+t^2+3t^4-t^6)} - 2(1+t^{3n})\frac{(1-t^2)(1+2t^2)}{1+t^2-t^4}\right)\Bigg],$$

amiből látható, hogy $b \gg a$ esetén, ha a második sorban levő kifejezés pozitív, akkor y_s negatív. Számolással adódik, hogy a legkisebb n érték, melyre ez teljesül, $n = 9$. Ebben az esetben K egy 19 lapú, pontosan egy stabil lappal rendelkező poliéder. □

A fenti eredmények több további kérdést is felvetnek.

(1) Van-e *inhomogén* sűrűségű tetraéder, melynek pontosan egy stabil lapja van?

(2) Mennyi a monostabil, azaz (a súlypontjukra) pontosan egy stabil lappal rendelkező konvex poliéderek lapszámának minimuma?

(3) Speciálisan, igaz-e, hogy a négyszög alaplapú gúlák közt nincs monostabil?

(4) Egyensúlyi ponttal rendelkező lapok helyett egyensúlyi ponttal rendelkező csúcsokat is vizsgálhatunk. Ezekre igaz-e az első tételünk „duális" változata, azaz igaz, hogy minden tetraédernek van legalább kettő egyensúlyi ponttal rendelkező csúcsa?

Az első kérdésre Conway adta meg az igenlő választ, melyről bővebb információ található a [4] cikkben.

Jelölje a monostabil poliéderek minimális lapszámát l_m. Ekkor az eddig ismertetett eredményeket az $5 \leqslant l_m \leqslant 19$ egyenlőtlenségekben foglalhatjuk össze. A második kérdést illetően Conway eredménye, mely szerint $l_m \leqslant 19$, meglepően sokáig a legjobb felső becslés maradt l_m értékére. Az első javítás Bezdek Andrásnak [1] köszönhető, aki, ugyancsak elemi geometriai módszerekkel, 2011-ben konstruált egy 18 lapú monostabil poliédert. Ezt 2014-ben Reshetov [7] javította 14-re számítógépes módszerek alkalmazásával. A harmadik, Conway és Guy által 1969-ben feltett kérdés, hogy a négyszöglapú gúlák közt van-e monostabil, még ma is nyitott.

Az utolsó kérdésre igenlő a válasz (ld. [5]), de ennek tárgyalása meghaladja ezen cikk kereteit.

Hivatkozások

[1] A. Bezdek, *On stability of polyhedra,* in: Workshop on Discrete Geometry, Sept. 13–16, 2011, Fields Institute, Canada, 2490–2491.

[2] J. H. Conway, M. Goldberg and R. K. Guy, *Problem 66-12,* SIAM Rev. **11** (1969), 78–82.

[3] R. Dawson, *Monostatic simplexes,* Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 541–546.

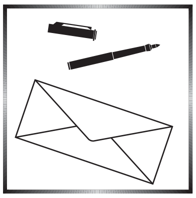
[4] R. Dawson and W. Finbow, *What shape is a loaded die?,* Math. Intelligencer, **22** (1999), 32–37.

[5] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.T. Varga, *Balancing polyhedra,* arXiv:1810.05382 [math.MG], October 12, 2018.

[6] A. Heppes *A double-tipping tetrahedron,* SIAM Rev., **9** (1967), 599–600.

[7] A. Reshetov, *A unistable polyhedron with* 14 *faces (English summary),* Internat. J. Comput. Geom. Appl., **24** (2014), 39–59.

Lángi Zsolt
BME Geometria Tanszék
`zlangi@math.bme.hu`



Az RSA kulcsgenerálás és a Carmichael-számok kapcsolata 1.

A nyílt kulcsú titkosító algoritmus matematikai alapjait 1976-ban fektette le Ron **R**ivest, Adi **S**hamir és Len **A**dleman. A nevük kezdőbetűi alapján elnevezett RSA algoritmus napjaink egyik leggyakrabban használt adattitkosító eljárása. A szakirodalomban elérhető matematikai alapok felhasználásával magam is elkészítettem a titkosító eljárás – gyakorlatban is jól használható – programját. A kulcsgenerálás algoritmusának pontosabb vizsgálatával sikerült kimutatni, hogy a prímek mellett speciális összetett számok is kiválóan alkalmazhatók kulcsok generálásához, sőt jelentősen csökkenthetik a kulcsok előállításának időtartamát.

A dolgozat megmutatja, hogy a Fermat féle prímteszt – annak ellenére, hogy prímek keresésére nem megbízható, mert átbújhatnak rajta összetett számok is – tökéletesen alkalmas megbízható RSA kulcsok generálására.

A továbbiakban összefoglaljuk azokat a matematikai tételeket, algoritmusokat, melyek az eljárás elvi alapjait adják.

1. *Az Euler–Fermat-tétel és az Euler-féle φ függvény.*
2. *Az $ax+by=1$ diophantoszi egyenlet megoldhatósága és a modális inverz fogalma.*
3. *A rend és a primitív gyök fogalma.*
4. *A kiterjesztett euklideszi algoritmus.*
5. *A kétkulcsos titkosítás alaptétele, kapcsolata a kétkulcsos titkosítással és az elektronikus aláírással.*
6. *Prímek keresése, tesztelése (valószínűségi becslés), „Tanúk" és „Cinkosok" viszonya.*
7. *Carmichael-számok definíciója és tulajdonságai.*
8. *A kétkulcsos titkosítás alaptételének egy fontos általánosítása (CA-tétel).*
9. *Kulcspárgenerálás összetett számokból.*

A cikkben nem bizonyított tételek igazolása megtalálható pl. Freud–Gyarmati: *Számelmélet* c. könyvében.

A következő mellékletek letölthetők a `www.plwsecur.com` URL címről. 1. Az a program (PLWSecur.exe), mely a fenti elvek alapján ténylegesen végre is hajtja egy adott fájl vagy mappa titkosítását, illetve annak visszafejtését – ez a program integráltan tartalmazza a kulcsgeneráló modult, de itt a CA tételt még nem alkalmazzuk. 2. Az a különálló kulcsgeneráló modul (KulcsparGen_CA.exe + Delphi source kód), mely a CA tételt már alkalmazza. A generált kulcsok természetesen tökéletesen együttműködnek a PLWSecur.exe programmal.

1. Az Euler–Fermat-tétel és az Euler-féle φ függvény

Tétel. *Ha p prím és a nem osztható p-vel, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ – (ez a „kis" Fermat-tétel).*

Bizonyítás. Az $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ számokat osszuk el p-vel és a maradékok legyenek $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$, azaz:

$$\begin{aligned} a &= k_1 p + m_1, \\ 2a &= k_2 p + m_2, \\ &\vdots \\ (p-1)a &= k_{p-1} p + m_{p-1}. \end{aligned}$$

A maradékok között nem lehet két egyenlő, mert ha $m_i = m_j$ lenne, akkor $(i-j)a$ osztható lenne p-vel, de ez lehetetlen, mert sem $(i-j)$, sem a nem osztható p-vel.

A fenti egyenlőségek oldalait összeszorozva $(p-1)!a^{p-1} = Kp + (p-1)!$, hiszen a jobb oldalon megjelenik a $p-1$ darab különböző maradék szorzataként $(p-1)!$. Ebből átrendezéssel következik, hogy $(p-1)!(a^{p-1}-1) = Kp$. Mivel $(p-1)!$ nem osztható p-vel, azért $a^{p-1}-1$ osztható p-vel, azaz $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Definíció. Legyen $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, nemnegatív, n-hez relatív prím számok darabszáma – ez az *Euler-féle φ függvény.*

Tétel. *Ha A és N relatív prímek, akkor $A^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod N$ (Euler tétele – a kis Fermat-tétel Euler-féle általánosítása).*

A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint a kis Fermat-tétel esetében: Legyenek $m_1, m_2, \ldots, m_{\varphi(N)}$ az N-hez relatív prím osztási maradékok, és ezek A-szorosainak is tekintsük az N-nel való osztásnál keletkező maradékait:

$$Am_1 \equiv s_1 \pmod N,$$
$$Am_2 \equiv s_2 \pmod N,$$
$$\vdots$$
$$Am_{\varphi(N)} \equiv s_{\varphi(N)} \pmod N.$$

Könnyen belátható, hogy az $s_1, s_2, \ldots, s_{\varphi(N)}$ számok az $m_1, m_2, \ldots, m_{\varphi(N)}$ számok egy permutációja. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az s_i számok relatív prímek N-hez, és nincs közöttük két egyenlő. Ha $(s_i, N) = p > 1$ lenne, akkor Am_i is osztható lenne p-vel, ami lehetetlen. Ha lenne köztük két egyenlő, akkor $A(m_i - m_j) = Am_i - Am_j$ osztható lenne N-nel, ami szintén lehetetlen, mert $(A, N) = 1$ és $|m_i - m_j| < N$. A fenti kongruenciák szorzatából – a maradékok szorzatával való egyszerűsítés után – következik az állítás.

Ha N prím, akkor $\varphi(N) = N - 1$, így belátható, hogy Euler tétele valóban a kis Fermat-tétel általánosítása.

Megemlítjük még a φ függvény néhány – későbbiekben felhasznált – alapvető tulajdonságát:

Tétel. *Ha p és q relatív prímek, akkor $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$.*

Speciálisan, ha p és q egymástól különböző prímek, akkor $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$.

Tétel. *Tetszőleges $n \geqslant 1$ és p prím esetén $\varphi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$.*

Bizonyítás. Mivel p prím, azért az $1, 2, 3, \ldots, p^n$ számok között p-vel csak a $p, 2p, 3p, \ldots, p^{n-1} \cdot p = p^n$ számok oszthatók, a többi relatív prím p^n-hez. A p-vel oszthatók száma p^{n-1}, tehát a fenti intervallum p^n-hez relatív prímjeinek száma $p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$.

Tétel. *Legyen n prímtényezős alakja*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \quad \textit{ahol} \quad \alpha_i > 0.$$

Ekkor $\varphi(n)$ felírható a következő szorzat alakjában:

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ prím}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. Az $ax + by = 1$ diophantoszi egyenlet megoldhatósága és a modális inverz fogalma

Tétel. *Legyenek a és b egész számok. Az $ax + by = 1$ diophantoszi egyenletnek akkor és csak akkor van egészekből álló x, y megoldása, ha a és b relatív prímek, azaz $(a, b) = 1$.*

a) Ha a és b legnagyobb közös osztójára $(a, b) > 1$, akkor az egyenlet átírható $(a, b)(a_1x + b_1y) = 1$ alakba.

Semmilyen x, y pár nem elégítheti ki az előbbi egyenletet, mert a jobb oldalon álló 1 nem osztható (a, b)-vel.

b) Legyen $(a, b) = 1$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy a és b pozitív. Átrendezés után $x = \frac{1-by}{a}$, azaz keresni kell azt az y egész számot, amelyre by-nak az a-val való osztási maradéka 1; megmutatjuk, hogy létezik ilyen y szám. A b számot szorozzuk meg az $1, 2, \ldots, a$ számokkal, és képezzük az a-val való osztás maradékait:

$$\begin{aligned} 1b &= k_1a + m_1, \\ 2b &= k_2a + m_2, \\ &\vdots \\ ab &= k_aa + m_a \quad (m_a = 0). \end{aligned}$$

Belátható, hogy az $m_1, m_2, \ldots, m_a$ maradékok a $0, 1, 2, \ldots, a - 1$ számok egy permutációja, tehát elő kell fordulnia 1-nek is mint osztási maradéknak. Indirekte tegyük fel ugyanis, hogy van köztük két egyenlő, például $m_i = m_j$, ekkor $(i - j)b = (k_i - k_j)a$ $(\neq 0)$. Mivel $|i - j| < a$, azért $i - j$ nem lehet osztható a-val, de akkor – $(a, b) = 1$ miatt – $(i - j)b$ sem.

1. következmény. Az $ax + by = c$ diophantoszi egyenletnek mindig van megoldása, ha $(a, b) = 1$. (Ugyanis, ha x_0 és y_0 megoldása $ax + by = 1$-nek, akkor cx_0 és cy_0 megoldása $ax + by = c$-nek.)

2. következmény. Az $ax + by = (a, b)$ diophantoszi egyenletnek mindig van megoldása. Ez eredetileg *Bézout* lemmája. A megoldás nem egyértelmű, mert ha x és y megoldás, akkor $x_1 = x + kb$ és $y_1 = y - ka$ is az. Az a, b számok legnagyobb közös osztóját, illetve az egyenlet egy x, y megoldását a kiterjesztett euklideszi algoritmussal lehet meghatározni (lásd ott).

Az $ax + by = 1$ alakú diophantoszi egyenletek szoros kapcsolatban vannak az $ax \equiv 1 \pmod n$ alakú kongruenciákkal. Formális okok miatt az $ax \equiv 1 \pmod n$ kongruencia x megoldását tekinthetjük az a szám modális multiplikatív inverzének, azaz jelölhetjük így is: $x \equiv a^{-1} \pmod n$. Természetesen ha x_0 megoldás, akkor $x_0 + kn$ is az (k tetszőleges egész szám lehet).

Tétel. *Az $ax \equiv 1 \pmod n$ kongruenciának akkor és csak akkor van x megoldása, ha $(a, n) = 1$. (Ha van megoldás, akkor szimmetria okok miatt $(x, n) = 1$.)*

Bizonyítás. Tekintsük az $ax+ny=1$ diophantoszi egyenletet. Ennek akkor és csak akkor van megoldása, ha $(a,n)=1$. Másrészt, az $ax=1-ny$ alakból látszik, hogy az egyenlet éppen azt jelenti, hogy $ax\equiv 1 \pmod{n}$.

Következmény. Az Euler–Fermat-tételt felhasználva, ha $(a,n)=1$, akkor az $ax\equiv 1 \pmod{n}$ kongruencia megoldása felírható $x\equiv a^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$ alakban is. Ez az alak többnyire csak elméleti jelentőségű, mivel konkrét esetekben a modális inverz meghatározásához a kiterjesztett euklideszi algoritmust használjuk; ez eldönti, hogy az $(a,n)=1$ feltétel teljesül-e, s ha igen, akkor egyidejűleg megadja az inverzet is.

3. A rend és a primitív gyök fogalma

Képezzük g egymás utáni $(1., 2., \ldots, k\text{-adik})$ hatványait $\bmod p$. Ha az így képzett számok között megjelenik a 0, akkor minden további szám már 0 marad. Ha nem jelenik meg a 0, akkor előbb-utóbb ciklusba esik, azaz létezik egy legkisebb $k>1$ egész, amelyre $g\equiv g^k \pmod{p}$ lesz. Ekkor a ciklus hossza $k-1$. (Vegyük észre, hogy ha $(g,p)=1$, akkor 0 nem jelenik meg.)

Ha a tetszőlegesen választott g és p esetében létrejön a fenti típusú ciklus, akkor definíció szerint a ciklus hossza g *rendje* $\bmod p$ – melynek jelölése $o_p(g)$ (kiejtve ordo $g \bmod p$).

Könnyen belátható, hogy ha $(g,p)=1$ akkor $o_p(g)$ mindig létezik, és az Euler–Fermat-tétel miatt $o_p(g)\leqslant\varphi(p)$. Sőt, az is belátható, hogy ha $g^k\equiv 1 \pmod{p}$, akkor a ciklikusság miatt $o_p(g)$ osztja k-t, speciálisan $o_p(g)-\varphi(p)$ is mindig fennáll.

Ha $(g,p)=1$ és $o_p(g)=\varphi(p)$, akkor g-t p *primitív gyöknek* nevezzük $\bmod p$. Ha g primitív gyök $\bmod p$, akkor a $g^1, g^2, \ldots, g^{\varphi(p)}\equiv 1$ számok $\bmod p$ maradékai a p-hez relatív prím maradékok egy permutációját adják.

Most megmutatjuk, hogy a $(g,p)=1$ nem csak elégséges, de szükséges feltétel is $o_p(g)$ létezésére, így arra is, hogy g primitív gyök legyen $\bmod p$. Ennek belátásához csupán azt kell észrevennünk, hogy $a\equiv b \pmod{m}$ esetén $(a,m)=(b,m)$. Ha létezik $o_p(g)$, akkor van olyan $k>0$ egész szám, amelyre $g^k\equiv 1 \pmod{p}$, így $(g^k,p)=$ $=(1,p)=1$, ezért $(g,p)=1$-nek is teljesülnie kell.

Bizonyítás nélkül közöljük a primitív gyök létezésére vonatkozó alábbi tételt:

Primitív gyök pontosan (csak) az $N=2,4,p^k,2p^k$ alakú modulusokra létezik, ahol p páratlan prímszám és $k>0$ egész.

4. A kiterjesztett euklideszi algoritmus

Két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására – nagy számok esetében – a prímtényezős felbontásra alapozott eljárás időben kivárhatatlan.

Az a, b számok legnagyobb közös osztóját (LNKO) a közismert euklideszi algoritmussal lehet hatékonyan meghatározni. Az eljárás kiterjesztésével (veremtechnika alkalmazásával) az $ax+by=(a,b)$ egyenlet x, y megoldását és az $ax\equiv 1 \pmod{n}$ kongruenciából az $x \bmod n$ inverzét is gyorsan kiszámíthatjuk.

Legyen M_0 és M_1 két pozitív egész szám, melyekből sorozatos maradékos osztásokkal képezzük a következő nemnegatív egészeket:

$$\begin{aligned}
M_0 &= k_0M_1 + M_2 \quad (M_2 < M_0),\\
M_1 &= k_1M_2 + M_3 \quad (M_3 < M_1),\\
M_2 &= k_2M_3 + M_4,\\
&\ \vdots\\
M_n &= k_nM_{n+1} + 0.
\end{aligned}$$

Mivel az $M_2, M_3, \ldots$ folyamatosan csökkennek (a páros indexűek monoton csökkenek M_0-tól, míg a páratlan indexűek M_1-től lefelé), ezért az $n+1$ osztás után a maradék 0 lesz.

Az M_{n+1} értéke (a, b), azaz az LNKO. Az, hogy M_{n+1} a kiinduló két (M_0 és M_1) szám közös osztója, következik az algoritmusból, a hátulról induló sorozatos visszahelyettesítésekből. Azt, hogy M_{n+1} a kiinduló két (M_0 és M_1) szám *legnagyobb* közös osztója a következő módon láthatjuk be: Legyen P az M_0 és M_1 számok egyik közös osztója. Az algoritmusból következik, hogy P osztója M_2-nek is, illetve tovább folytatva a gondolatmenetet valamennyi M_i-nek, beleértve M_{n+1}-et is. Tehát M_{n+1}-et osztja valamennyi P közös osztó, ezért M_{n+1} a legnagyobb közös osztó.

A fenti algoritmus hátulról visszafelé alkalmazva, lehetővé teszi az $ax + by = (a, b)$ egyenlet x, y megoldásainak meghatározását is (ez az algoritmus kiterjesztése).

Foglaljuk táblázatba a fenti algoritmus egy-egy sorának számait (A, B, R, K) az alábbiak szerint:

	A	B	$R_{(\text{maradék})}$	$K_{(\text{hányados})}$
0. lépés	M_0	M_1	M_2	k_0
1. lépés	M_1	M_2	M_3	k_1
$\vdots$				
$(n-1)$-edik lépés	M_{n-1}	M_n	M_{n+1}	k_{n-1}
n-edik lépés	M_n	M_{n+1}	0	k_n

Az A, B, R, K oszlopok számait – az i-edik sorban – jelöljük a_i, b_i, r_i, k_i-vel.

	A	B	$R_{(\text{maradék})}$	$K_{(\text{hányados})}$
0. lépés	a_0	b_0	r_0	k_0
1. lépés	a_1	b_1	r_1	k_1
$\vdots$				
$(n-1)$-edik lépés	a_{n-1}	b_{n-1}	r_{n-1}	k_{n-1}
n-edik lépés	a_n	b_n	0	k_n
$(n+1)$-edik lépés	a_{n+1}	0	–	–

Vegyük észre, hogy minden sorban az $(a_i, b_i) = a_{n+1}$ (= LNKO) azonosak minden $i = 0, \dots, n+1$ esetén. (Az $(n+1)$-edik sort az egységes jelölés végett szúrtuk csak be.)

Az $ax + by = 1$ diophantoszi egyenlet vizsgálatánál említett 2. következmény (Bézout-lemma) miatt minden sorra igaz, hogy az $(a_i, b_i) = a_i x_i + b_i y_i$ egyenletnek van x_i, y_i megoldása. Speciálisan az $(n+1)$-edik sornál $x_{n+1} = 1$, $y_{n+1} = 0$.

Megmutatjuk, hogy az i-edik sor x_i, y_i együtthatói származtathatók az $(i+1)$-edik sor együtthatóiból, azaz hátulról visszafelé indulva az $x_{n+1}, y_{n+1} = 1, 0$ párból kiszámítható az x_0, y_0 pár, *azaz meghatározható az $(a, b) = ax + by$ diophantoszi egyenlet megoldása.*

Tegyük fel, hogy az $(a_{i+1}, b_{i+1}) = a_{i+1}x_{i+1} + b_{i+1}y_{i+1}$ egyenlet x_{i+1}, y_{i+1} megoldása már ismert. Ugyanezt az összefüggést az i-edik sorra alkalmazva $(a_i, b_i) = a_i x_i + b_i y_i$. Behelyettesítve a felfelé mutató nyilakkal jelölt egyenlőségeket, valamint felhasználva a sor elemei közötti belső összefüggést:

$$\begin{aligned}(a_i, b_i) &= a_i x_i + b_i y_i = (k_i b_i + r_i)x_i + b_i y_i = (k_i a_{i+1} + b_{i+1})x_i + a_{i+1} y_i = \\ &= a_{i+1}(k_i x_i + y_i) + b_{i+1} x_i = (a_{i+1}, b_{i+1}).\end{aligned}$$

Az együtthatók egyenlőségéből $x_{i+1} = k_i x_i + y_i$ és $y_{i+1} = x_i$, ahonnan átrendezéssel:

$$\begin{aligned}x_i &= y_{i+1}, \\ y_i &= x_{i+1} - k_i x_i = x_{i+1} - k_i y_{i+1},\end{aligned}$$

vagyis az i-edik sor együtthatói kiszámíthatók az $(i+1)$-edik sor együtthatóiból, tehát az eljárás végén megkapjuk a keresett x_0, y_0 megoldást.

Vegyük észre, hogy az algoritmus alkalmazásakor szükségünk van a k_i hányadosokra, melyeket az LNKO meghatározásakor veremben kell elhelyezni. Mivel az $ax \equiv 1 \pmod{n}$ kongruencia megoldása ekvivalens az $ax - ny = 1$ diophantoszi egyenlet megoldásával, a fenti eljárással az a modális inverzét is meg tudjuk határozni.

A cikk folytatása a szeptemberi számban lesz olvasható.

Kiss Gábor

Megoldásvázlatok a 2019/5. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők.*

(*3 pont*)

b) Oldjuk meg a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ *halmazon a* $\sin(x + 2019\pi) = -\frac{1}{2}$ *egyenletet.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A képzett számok első számjegye háromféle (2, 1 vagy 9), második és harmadik számjegye négyféle (2, 0, 1, vagy 9) lehet, ezért az összes lehetőség száma (az előbbiek szorzata, azaz) $3\cdot 4^2=48$. A megadott számjegyekből $3^2\cdot 2=18$ különböző számjegyekből álló háromjegyű szám képezhető.

Ez a kedvező esetek száma. Így a keresett valószínűség: $\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$.

b) *I. megoldás.* Az addíciós tétel alapján:

$$\sin x\cdot\cos(2019\cdot\pi)+\cos x\cdot\sin(2019\cdot\pi)=-\frac{1}{2}.$$

$\sin x\cdot(-1)+\cos x\cdot 0=-\frac{1}{2}$. Az egyenletet rendezve: $\sin x=\frac{1}{2}$. Ebből $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

II. megoldás. A szinusz függvény periodicitása miatt: $\sin(x+1009\cdot 2\cdot\pi+\pi)=$ $=-\frac{1}{2}$, $\sin(x+\pi)=-\frac{1}{2}$. Az egyenletet x-re megoldva: $x+\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ebből (az egyik gyök) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Az egyenletet x-re megoldva: $x+\pi=\frac{11\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. Ebből (a másik gyök) $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

III. megoldás. Az egyenletet x-re megoldva: $x+2019\cdot\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ebből az egyik gyök $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Az egyenletet x-re megoldva:

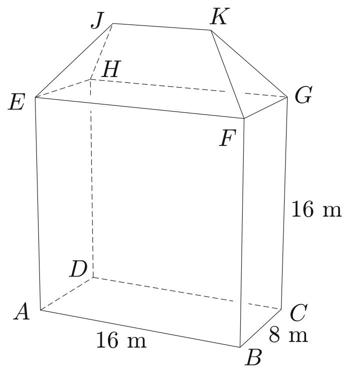
$$x+2019\cdot\pi=\frac{11\pi}{6}+2l\pi,\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Ebből a másik gyök $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

2. *A Regéci Vár egy* 1300 *körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az* 1. ábrán *ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a* 2. ábrán *pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.*

1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB = 16$ m, $BC = 8$ m és $CG = 16$ m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? (*4 pont*)

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50°-os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

b) Mekkora a JK szakasz hossza? (*5 pont*)

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? (*3 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Az $ABCDEFGH$ téglatest térfogata:

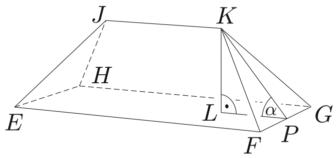
$$V_{ABCDEFGH} = 16 \cdot 8 \cdot 16 = 2048\ (\mathrm{m}^3).$$

A belső téglatest 12 m hosszú, 4 m széles és 16 m magas, így ennek térfogata: $V_{\text{belső}} = 12 \cdot 4 \cdot 16 = 768\ (\mathrm{m}^3)$.

Az oldalfalak térfogata: $V = V_{ABCDEFGH} - V_{\text{belső}} = 2048 - 768 = 1280\ (\mathrm{m}^3)$, melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal csökkentve a keresett térfogat $1280 \cdot 0{,}95 = 1216\ \mathrm{m}^3$ lesz.

II. megoldás. A hosszabbik oldalfal 16 m hosszú, 16 m magas és 2 m vastag, így ennek térfogata: $V_1 = 16 \cdot 16 \cdot 2 = 512\ (\mathrm{m}^3)$. A rövidebbik oldalfal 4 m hosszú, 16 m magas és 2 m vastag, így ennek térfogata: $V_2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128\ (\mathrm{m}^3)$.

Mivel a hosszabbik és a rövidebbik oldalfalból kettő van, így a teljes térfogat: $V = (512 + 128) \cdot 2 = 1280\ (\mathrm{m}^3)$, melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal csökkentve a keresett térfogat $1280 \cdot 0{,}95 = 1216\ \mathrm{m}^3$ lesz.



b) Az $EFGHJK$ tető magassága a tető K csúcsából az $EFGH$ síkra bocsátott merőleges szakasz. Az $EFGHJK$ tető K csúcsából induló magasságát és az FKG háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva, a tető és az $EFGH$ sík hajlásszöge α. Az LPK derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 50° = \frac{5}{LP}$, ahonnan $LP = \frac{5}{\operatorname{tg} 50°}$ ($\approx 4{,}2$ m).

Mivel a tető szimmetrikus, ezért $JK = 16 - 2 \cdot \frac{5}{\operatorname{tg} 50°} \approx 7{,}61$ m hosszú.

c) I. megoldás. Jelölje x a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ekkor:

mindhárom munkafolyamatban	$0{,}075\,x$;
pontosan két munkafolyamatban	$0{,}2\,x$;
pontosan egy munkafolyamatban	29 tanuló vesz részt.

Ebben az esetben tehát az egyenlet: $0{,}075\,x + 0{,}2\,x + 29 = x$. Ebből $x = 40$.

II. megoldás. Jelölje x a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ha az egyes munkafolyamatokat összegezzük, akkor egyszeresen számoltuk azokat, akik csak egyféle, kétszeresen, akik kétféle, és háromszorosan azokat, akik mindhárom tevékenységet végezték.

Ebben az esetben tehát az egyenlet: $1{,}35\,x = 29 + 2 \cdot 0{,}2\,x + 3 \cdot 0{,}075\,x$. Ebből $x = 40$.

3. *a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.*

$$\log_2 x \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(4x) \qquad \textit{(7 pont)}$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 8, \\ \sqrt{xy} &= 33. \end{aligned}\right\} \qquad \textit{(7 pont)}$$

Megoldás. *a) I. megoldás.* A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$. A két oldalt azonos alapra hozva:

$$\log_2 x \leqslant \frac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}.$$

A logaritmus azonossága alapján: $\log_2 x \leqslant \log_2 (4x)^{-1}$. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt: $x \leqslant \frac{1}{4x}$.

Mivel $x > 0$, így az egyenlőtlenséget rendezve: $x^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Ebből $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left]0; \frac{1}{2}\right]$.

II. megoldás. A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$. A két oldalt azonos alapra hozva:

$$\log_2 x \leqslant \frac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}.$$

A nevezővel beszorozva: $-\log_2 x \geqslant \log_2(4x)$. A logaritmus azonossága alapján: $-\log_2 x \geqslant \log_2 4 + \log_2 x$. Az egyenlőtlenséget rendezve: $\log_2 x \leqslant -1\left(= \log_2 \frac{1}{2}\right)$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt: $x \leqslant \frac{1}{2}$, melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left]0; \frac{1}{2}\right]$.

b) I. megoldás. Mindkét egyenletet négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{xy} + y &= 64, \\ xy &= 1089. \end{aligned}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x + y = 130$, ahonnan $y = 130 - x$. A második egyenletből $y = 130 - x$ helyettesítéssel: $x^2 - 130x + 1089 = 0$. Ebből $x_1 = 121$ és $x_2 = 9$, majd visszahelyettesítve $y_1 = 9$ és $y_2 = 121$.

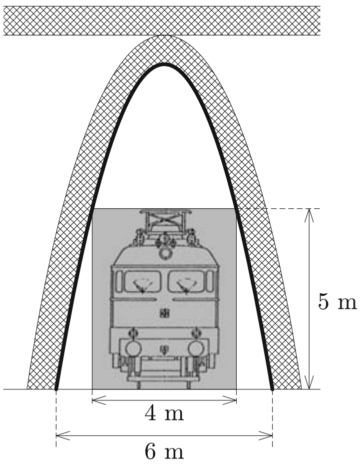
Ellenőrzés behelyettesítéssel:
$x_1 = 121$ és $y_1 = 9$ megoldása az egyenletnek;
$x_2 = 9$ és $y_2 = 121$ nem megoldása az egyenletnek.

II. megoldás. A gyökvonás azonossága alapján:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8,$$
$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 33.$$

Az első egyenletből: $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 8$, melyet a második egyenletbe helyettesítve: $x - 8\sqrt{x} - 33 = 0$. Ebből $\left(\sqrt{x}\right)_1 = 11$ és $\left(\sqrt{x}\right)_2 = -3$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 121$ és $x_2 = 9$, majd visszahelyettesítve $y_1 = 9$ és $y_2 = 121$.

Ellenőrzés behelyettesítéssel:
$x_1 = 121$ és $y_1 = 9$ megoldása az egyenletnek;
$x_2 = 9$ és $y_2 = 121$ nem megoldása az egyenletnek.



4. *A vasúti szaknyelvben űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően* 4 m *széles és* 5 m *magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az* ábrán *szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az ábrán vastag fekete vonallal) a sínek szintjén* 6 m *széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.*

a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján? (*8 pont*)

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 *méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszelet alakú. A parabolaszeletet a koordináta-rendszerben megadott*

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

egyenletű parabola és az x tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 *egység* 1 *métert jelent.*

b) Hány m^3 *követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Rögzítsünk úgy egy koordináta-rendszert, hogy az x-tengely a sínek szintje, az y-tengely pedig a parabolaív szimmetriatengelye legyen. Ekkor ennek a parabolának az általános egyenlete: $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$.

Ebben a koordináta-rendszerben a parabolaív első síknegyedbe eső részén ki tudunk jelölni két pontot: $A(3;0)$, és $B(2;5)$. Az előbbi két pontot a parabola általános egyenletébe behelyettesítve megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$0=-\frac{1}{2p}\cdot 3^2+v,$$

$$5=-\frac{1}{2p}\cdot 2^2+v.$$

Ebből $v=9$ és $p=0{,}5$.

Mivel v éppen a keresett magasság, a tartószerkezet a belső ívének középső, legmagasabb pontján 9 méter magas.

b) A keresett térfogat a parabolaszelet területének és az alagút hosszának a szorzata. A parabola két zérushelye: $x_1=-4$ és $x_2=4$. A kiszámítandó T terület:

$$T=\int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+8\right)\,\mathrm{d}x.$$

A határozott integrál értéke:

$$\left[-\frac{x^3}{6}+8x\right]_{-4}^{4}=\left(-\frac{64}{6}+32\right)-\left(\frac{64}{6}-32\right)=\frac{128}{3}.$$

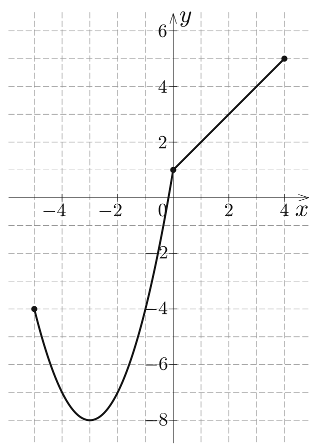
Tehát a kitermelt kő térfogata $\frac{128}{3}\cdot 24=1024$ (m^3).

II. rész

5. *a*) *Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló* 6*-jegyű természetes számot, amely a* $0;1;2;3;4;5$ *számjegyekből áll és osztható* 12*-vel.* (*5 pont*)

b) *A* $\{0;1;2;3;4;5\}$ *halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább* 1 db *páratlan számot?* (*3 pont*)

c) *Adjuk meg az* ábrán *látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény* $E(-1;-4)$ *pontjában húzott érintőjének meredekségét.* (*8 pont*)



Megoldás. *a*) Egy tízes számrendszerbeli szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is. A képzett szám biztosan osztható 3-mal, mert a számjegyek összege $(0+1+2+3+4+5=)15$. A képzett szám csak akkor osztható

4-gyel, ha az utolsó két számjegye: 04; 12; 20; 24; 32; 40 vagy 52. A keresett szám akkor lesz a legkisebb, ha a nagy alaki értékű számjegyek kis helyiértéken állnak.

(Mivel a szám nem kezdődhet 0-val), a legkisebb feltételeknek megfelelő szám a 103 452.

b) A $\{0;1;2;3;4;5\}$ halmaznak összesen $2^6=64$ db részhalmaza van. Azok a részhalmazok, amelyek nem tartalmaznak páratlan számot, a $\{0;2;4\}$ halmaz részhalmazai, melyek száma $2^3=8$.

A kérdéses részhalmazok száma: $2^6-2^3=56$.

c) Az ábrázolt függvény két részből áll: egy másodfokú és egy lineáris függvényből. A felfelé nyíló nem nyújtott parabola talppontja (és egyben a függvény minimuma) a $(-3;-8)$ pont, így ha $x\in[-5;0]$, akkor $f(x)=(x+3)^2-8$. A lineáris függvény az y tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi, meredeksége 1, tehát ha $x\in\,]0;4]$, akkor $f(x)=x+1$.

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2-8, & \text{ha } x\in[-5;0],\\ x+1, & \text{ha } x\in\,]0;4]\,.\end{cases}$$

Az E-ben húzott érintő meredekségét az f deriváltfüggvényének az $x=-1$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg: $f'(x)=2x+6$, $f'(-1)=4$.

6. *Tekintsük az $a_n=n^2+2$ sorozatot.*

a) *Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$ határértéket. Válaszunkat indokoljuk.* (*2 pont*)

b) *Számítsuk ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét.* (*4 pont*)

Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n=a_{n+1}-a_n$ sorozatot képeztük.

c) *Igazoljuk, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat.* (*3 pont*)

d) *Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1=3$ és $n>1$ esetén megadható az*

$$a_n=\left(1+\frac{2n-1}{n^2-2n+3}\right)\cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $n\to\infty$, akkor n^2+2 is végtelenbe tart. (Mivel a tört nevezője végtelenbe tart), ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}=0.$$

b) A sorozat első száz tagját összeadva:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{100}=(1^2+2)+(2^2+2)+\ldots+(100^2+2)=$$

a jobb oldalon lévő összeg tagjait csoportosítva:

$$=(1^2+2^2+\ldots+100^2)+2\cdot 100.$$

A zárójelben az első 100 db pozitív egész szám négyzetének összege $\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ szerepel, ezért a sorozat első száz tagjának összege:

$$\frac{100(100+1)(2\cdot 100+1)}{6}+2\cdot 100=338\,550.$$

c) Azt kell megmutatni, hogy a (b_n) sorozat egymást követő tagjainak különbsége állandó. A sorozat képzési szabályába behelyettesítve:

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\left[(n+1)^2+2\right]-\left[(n^2+2)\right]=2n+1,$$
$$b_n-b_{n-1}=(2n+1)-(2n-2+1)=2,$$

tehát a sorozat valóban számtani.

d) Teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n=1$, akkor az állítás igaz, mert mindkét képzési szabályból $a_1=3$.

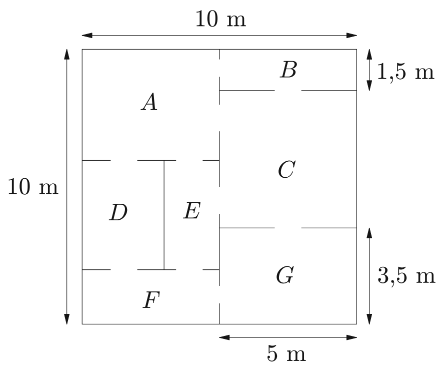
Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy k pozitív egész számra, azaz létezik olyan k szám, amelyre teljesül, hogy $a_{k-1}=(k-1)^2+2$. Ekkor igazolnunk kell, hogy:

$$a_k=\left(1+\frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right)\cdot a_{k-1}=k^2+2.$$

Az indukciós feltevés miatt:

$$a_k=\left(1+\frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right)\cdot\left((k-1)^2+2\right)=$$
$$=\left(1+\frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right)\cdot(k^2-2k+3)=$$
$$=k^2-2k+3+2k-1=$$
$$=k^2+2.$$

7. *Az ábrán egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)*



a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. *(3 pont)*

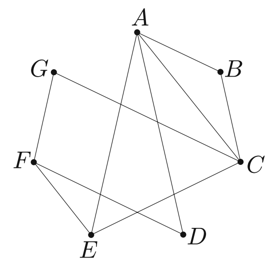
A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában? (*8 pont*)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A családi ház földszintjének gráfja:

A fokszámok összege: $2\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 2=20$.



b) *I. megoldás.* A földszint és a padlás alapterülete is 100 m^2, a pince alapterülete 25 m^2. Ezek összege 225 m^2.

Ha a macska a földszinten van, akkor a valószínűség $\frac{100}{225}\cdot p$, ha a padláson, akkor $\frac{100}{225}\cdot 2p$, ha a pincében, akkor $\frac{25}{225}\cdot\frac{p}{2}$. A kedvező esetek száma: $\frac{100}{225}\cdot p$. Az összes eset száma:

$$\frac{100}{225}\cdot p+\frac{100}{225}\cdot 2p+\frac{25}{225}\cdot\frac{p}{2}.$$

Annak a valószínűsége, hogy a macska a földszinten van:

$$P=\frac{\frac{100}{225}\cdot p}{\frac{100}{225}\cdot p+\frac{100}{225}\cdot 2p+\frac{25}{225}\cdot\frac{p}{2}}=0{,}32.$$

Mivel a C jelű szoba alapterülete 25 m^2, a földszint alapterülete 100 m^2, így az ott tartózkodás valószínűsége: $\frac{25}{100}\cdot 0{,}32=0{,}08$.

II. megoldás. Jelölje p annak a valószínűségét, hogy a macska a földszinten tartózkodik. Ez esetben annak a valószínűsége, hogy a padláson van $2p$, annak a valószínűsége, hogy a pincében fekszik $\frac{p}{8}$. Mivel a macska vagy a pincében, vagy a földszinten vagy a padláson tartózkodik, ezért az egyes helyeken való tartózkodások valószínűségeinek összege biztosan 1:

$$\frac{p}{8}+p+2p=1,\quad \text{ebből}\quad p=\frac{8}{25}.$$

Mivel a C jelű szoba alapterülete 25 m^2, a földszint alapterülete 100 m^2, így az ott tartózkodás valószínűsége: $\frac{25}{100}\cdot 0{,}32=0{,}08$.

c) *I. megoldás.* Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot. Ez egy 7 csúcsú teljes gráf esetén háromféleképpen jöhet létre: ha az eredeti gráfot egy 3 és 4 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 9.

Ha az eredeti gráfot egy 2 és 5 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 11.

Ha az eredeti gráfot egy 1 és 6 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 15.

Így az eredeti gráfból legalább $21-15=6$ db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

II. megoldás. Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot.

Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát x, ekkor a másik részgráfban $7-x$ csúcs lesz, így az egyes részgráfok éleinek száma:

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2} \quad \text{és} \quad \frac{(7-x)\cdot(6-x)}{2}.$$

A megmaradó élek száma x függvényében:

$$e(x)=\frac{x\cdot(x-1)}{2}+\frac{(7-x)\cdot(6-x)}{2}=x^2-7x+21.$$

Mivel $x\in\{1;2;3;4;5;6\}$, ezért az e függvény akkor maximális, ha $x=1$ vagy $x=6$ (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).

Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

III. megoldás. Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, – amelyek teljes gráfok –, szakítjuk szét az eredeti gráfot.

Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát x, ekkor a másik részgráfban $7-x$ csúcs lesz. Mivel minden csúcs minden csúccsal össze van kötve a teljes gráfban, ezért az x csúcsú részgráf mindegyik csúcsából a másik részgráfba vezető mindegyik élt ki kell törölni, ezért a kitörlendő élek száma x függvényében $k(x)=-x^2+7x$.

Mivel $x\in\{1;2;3;4;5;6\}$, ezért az k függvény akkor minimális, ha $x=1$ vagy $x=6$ (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).

Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.

8. *Az alábbi* táblázat *hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.*

Tavasz	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását.
(4 pont)

Az ábrán látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, *északi irányba áll és a vízszintes talapzattal* 60°*-os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága* 42° *volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.*

b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (*5 pont*)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm *vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplapja* 1 m *oldalhosszúságú négyzet, magassága* 80 cm. *A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség* 10%*-a hulladék lesz.*

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m³ 2 cm *vastag márványlap ára* 540 000 Ft? *Válaszunkat* tízezer *forintra kerekítve adjuk meg.* (*7 pont*)

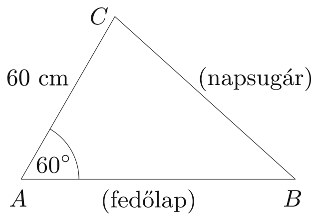
Megoldás. *a*) A napsütéses órák átlaga:

$$\overline{x} = \frac{575,2 + 845,7 + 403 + 180,1}{4} = 501 \text{ (óra)}.$$

A napsütéses órák szórása:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-74,2)^2 + 344,7^2 + (-98)^2 + (-320,9)^2}{4}} \approx 243,36 \text{ (óra)}.$$

b) A feladat megértését tükröző *ábra:*



Az $ABC\sphericalangle = \beta = 42°$, így a háromszög C csúcsánál lévő γ szöge 78°. Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin 78°}{\sin 42°} = \frac{AB}{60},$$

ahonnan $AB \approx 87,71$ cm.

c) *I. megoldás.* A betonnal kiöntésre kerülő test egy négyzet alapú hasáb, melynek alapéle 0,96 m, magassága 0,78 m. A betonnal kiöntött rész térfogata:

$$V_{\mathrm{b}} = 0,96 \cdot 0,96 \cdot 0,78 \ (\approx 0,72 \text{ m}^3).$$

A talapzat térfogata:

$$V_{\mathrm{t}} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \ (= 0{,}8\ \mathrm{m}^3).$$

A talapzatba beépítésre kerülő márvány térfogata:

$$V_{\mathrm{m}} = V_{\mathrm{t}} - V_{\mathrm{b}} \approx 0{,}08\ \mathrm{m}^3.$$

Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a, ezért a vásárolt márvány térfogata:

$$V = \frac{100}{90} \cdot V_{\mathrm{m}} \approx 0{,}09\ \mathrm{m}^3.$$

A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.

II. megoldás. A márványborítás területét megkapjuk, ha a fedőlap területéhez hozzáadjuk a két-két egyforma oldallap területét. A fedőlap élei 1 méter hosszúak, az egyik oldallap élei 1 m és 0,78 m, a szomszédos oldallap élei 0,96 m és 0,78 m hosszúságúak.

$$A = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}78 + 2 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}78 \approx 4{,}06\ \mathrm{m}^2.$$

(A márványlapok térfogata:)

$$V \approx 4{,}06 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}08\ \mathrm{m}^3.$$

Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a, ezért a vásárolt márvány térfogata:

$$V = \frac{100}{90} \cdot V_{\mathrm{m}} \approx 0{,}09\ \mathrm{m}^3.$$

A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.

9. *Az alábbi táblázatban a gyorshajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon* 2010*-től* 2018*-ig a megadott időszakban.*

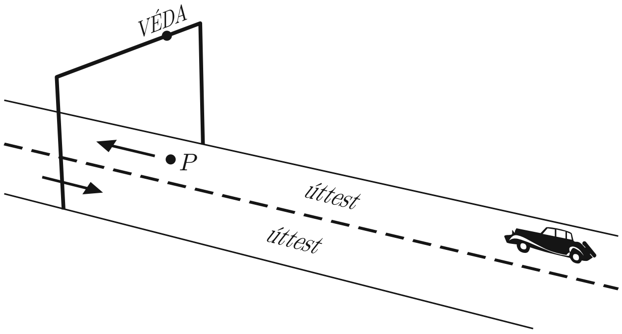
Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét. (*3 pont*)

Hazánkban a rendőrség rendszámtábla alapján azonosítja a gyorshajtókat. Egy sebességmérés alkalmával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m *magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből* 15°*-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.*

(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



b) *Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól* 40 m *távolságban az úttest közepén a VÉDA irányába közlekedő személyautót?* (*4 pont*)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

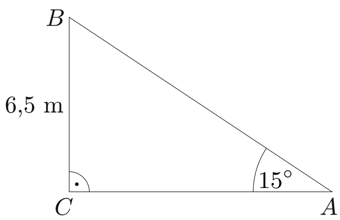
„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk."

c) *Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége.* (*9 pont*)

I. *Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.*

II. *Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.*

Megoldás. *a*) A medián: 12, a terjedelem: 11.



b) Készítsünk *ábrát.*

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{6{,}5}{AC}, \text{ ahonnan } AC = \frac{6{,}5}{\operatorname{tg} 15^\circ} \approx 24{,}26 \text{ m.}$$

Tehát a sebességmérő berendezés 40 m távolságból nem érzékeli a személyautót.

c) Jelölje A azt az eseményt, hogy a biztosított ügyfél férfi, B azt, hogy nő, C pedig azt, hogy baleset történik. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(A) = 0{,}65$; $P(B) = 0{,}35$ és $P(C) = p$.

Annak a valószínűsége, hogy ha baleset történik, akkor azt nő okozza: $P(B|C) = 0{,}31$.

Annak a valószínűsége, hogy ha baleset történik, akkor azt férfi okozza: $P(A|C) = 0{,}69$.

(A feltételes valószínűség definíciója alapján:)

$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} \quad \text{és} \quad P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)},$$

ahonnan $P(BC) = 0{,}31p$ és $P(AC) = 0{,}69p$.

Annak a valószínűsége, hogy ha nő vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet:

$$P(C|B)=\frac{0{,}31p}{0{,}35}\approx 0{,}89p.$$

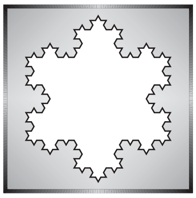
Annak a valószínűsége, hogy ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet:

$$P(C|A)=\frac{0{,}69p}{0{,}65}\approx 1{,}06p.$$

Mivel $P(C|B)<P(C|A)$, így a II. esemény bekövetkezésének valószínűsége nagyobb.

Varga Péter
Budapest

C gyakorlat megoldása



C. 1497. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$xy=z,$$
$$xz=y,$$
$$yz=x.$$

I. megoldás. Jelölje az első egyenletet (1), a másodikat (2), a harmadikat pedig (3). A (3)-at az (1)-be beírva adódik, hogy $yz\cdot y=z$. Ha $z\neq 0$, akkor mindkét oldalt z-vel osztva ebből $y^2=1$ következik.

1. eset. $y=1$. Ekkor (1) alapján $x=z$, és így (2)-ből $x^2=1$.

Ha $x=1$, akkor (1) miatt $z=1\cdot 1=1$. Ha $x=-1$, akkor szintén (1) alapján $z=-1\cdot 1=-1$.

2. eset. $y=-1$. Ekkor (1)-ből $-x=z$, és így (2) miatt $-x^2=-1$, vagyis $x^2=1$.

Ha $x=1$, akkor (1) miatt $z=1\cdot -1=-1$. Ha pedig $x=-1$, akkor szintén (1) alapján $z=-1\cdot -1=1$.

Végül, ha $z=0$, akkor (2) miatt $y=0$, (3) miatt pedig $x=0$.

A megoldások tehát:

x	1	-1	1	-1	0
y	1	1	-1	-1	0
z	1	-1	-1	1	0

Selmi Bálint (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Könnyen látható, hogy ha x, y, z megoldás, akkor $|x|$, $|y|$, $|z|$ is megoldás. Az is világos, hogy ha valamelyik ismeretlen értéke 0, akkor a többié is; pl. $x=0$ esetén $y=xz=0=xy=z$. A pozitív megoldásokat keresve szorozzuk össze a három egyenletet; kapjuk, hogy $(xy)(xz)(yz)=zyx$, azaz $(xyz)^2=xyz$, ezért ilyenkor $xyz=1$. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $x\geqslant y\geqslant z$. Ekkor viszont $x\geqslant 1\geqslant z$ miatt $x=yz\leqslant y$, így $x=y$. Hasonlóan $z=xy\geqslant y$ szerint $y=z$, tehát $x=y=z=1$ az egyetlen pozitív megoldás. A többi nemnulla megoldás ettől előjelekben különbözhet csak, mégpedig úgy, hogy az egyik ismeretlen 1, a másik kettő pedig -1.

Megjegyzések. 1. Többen – a netes megoldáshoz hasonlóan – a három egyenletet összeszorozták, és az így kapott $(xyz)^2=xyz$ egyenletből jutottak eredményre. Sokan pedig a szimmetriát kihasználva az $x=\pm1$, $y=\pm1$ és $z=\pm1$ lehetőségeket vizsgálták, az eseteket leszűkítve annak segítségével, hogy csak páros darab negatív szám lehet a változók között.

2. Nagyon sokan úgy osztottak valamelyik változóval, hogy nem kötötték ki, hogy az nem lehet 0. Közülük legtöbben így nem kapták meg az $x=y=z=0$ megoldást, sokan pedig csak úgy odaírták, hogy az is megoldás. Többen csak egész számokra oldották meg a feladatot, holott ez nem volt benne a feladat szövegében.

328 dolgozat érkezett. 5 pontos 123, 4 pontos 33, 3 pontos 54, 2 pontos 29, 1 pontos 45, 0 pontos 30 dolgozat. Nem versenyszerű 4, nem számítunk a versenybe 10 dolgozatot.

Matematika feladatok megoldása

B. 4984. *Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész x számhoz található olyan pozitív egész y, amelyre x^3+y^3+1 osztható az $x+y+1$ számmal. Van-e olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok ilyen tulajdonságú y létezik?*

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

I. megoldás. Az $x=1$-re nyilván $y=1$ megfelelő. Ha $x>1$ és páratlan, akkor legyen $y=x-1$; ekkor

$$x+y+1=2x \mid 2x^3-3(x-1)x=x^3+(x-1)^3+1=x^3+y^3+1.$$

Végül, ha x páros, akkor legyen $y=x+1$. Ekkor

$$\begin{aligned}x+y+1&=x+(x+1)+1=\\&=2(x+1)\mid(x+1)(2x^2+x+2)=2x^3+3x^2+3x+2=\\&=x^3+(x+1)^3+1=x^3+y^3+1.\end{aligned}$$

Legyen ezután x tetszőleges pozitív egész. Mivel

$$x^3+y^3+1=(x+y+1)\big(y^2-(x+1)y+(x+1)^2\big)+x^3+1-(x+1)^3,$$

azért $x+y+1 \mid x^3+y^3+1$ esetén $x+y+1 \mid x^3+1-(x+1)^3$. Az utóbbi egész szám semmilyen pozitív egész x-re nem lehet 0 (hiszen két szomszédos pozitív köbszám különbsége nagyobb, mint 1), ezért csak véges sok osztója van. Tehát nincs olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok megfelelő y tartozna.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság miatt

$$(x+1)+y \mid (x+1)^3+y^3=(x^3+y^3+1)+(3x^2+3x).$$

Így y pontosan akkor teljesíti a feladat feltételét, ha $3x^2+3x=3x(x+1)$ osztható $x+y+1$-gyel. Ez pedig teljesül, ha $y=2x-1$, hiszen akkor

$$x+y+1=3x \mid 3x(x+1).$$

Az is látszik, hogy a 0-tól különböző $3x(x+1)$-nek csak véges sok osztója van, ezért $x+y+1$ csak véges sok megfelelő értéket vehet fel, tehát y is.

Ajtai Boglárka (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Használjuk fel az $x^3+y^3+1=(x+y+1)(x^2-xy-x+y^2-y+1)+3xy$ azonosságot. A feladat feltétele ekkor $x+y+1 \mid 3xy$. A véges sok megfelelő tulajdonságú y létezése abból is következik, hogy ha (adott x mellett) $y>3x^2+2x-1$, akkor $3xy>3xy-y+3x^2+2x-1=(x+y+1)(3x-1)$ szerint $\frac{3xy}{x+y+1}>3x-1$, másrészt a nyilvánvalóan teljesülő $y<x+y+1$ egyenlőtlenség miatt $\frac{3xy}{x+y+1}<3x$. Így ilyenkor $\frac{3xy}{x+y+1}$ két szomszédos egész szám közé esik, tehát nem lehet egész.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

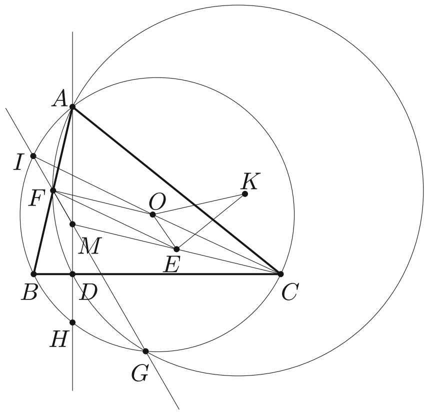
95 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 26, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4987. *Az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja pedig M, az A csúcsból induló magasság talppontja D, az AB oldal felezőpontja F. Az F pontból kiinduló és az M ponton átmenő félegyenes az ABC háromszög körülírt körét a G-ben metszi.*

a) Bizonyítsuk be, hogy az A, F, D, és G pontok egy körön vannak.

b) Jelöljük a fenti kör középpontját K-val, a CM szakasz felezőpontját E-vel. Igazoljuk, hogy $EK=OK$.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



Megoldás. *a*) Legyenek I és H rendre az M pont tükörképei az F és D pontokra. Közismert, hogy ekkor I és H rajta vannak az ABC háromszög köré írt körön. A húrtétel szerint $IM \cdot MG = HM \cdot MA$ (az M pontnak az ABC háromszög körülírt körére vonatkozó hatványa), ezért

$$2FM \cdot MG = 2DM \cdot MA,$$

vagyis $FM \cdot MG = DM \cdot MA$. Ebből a húrtétel megfordítása miatt következik, hogy $AFDG$ húrnégyszög.

b) F-re középpontosan tükrözve az AMF háromszöget a BIF háromszöget kapjuk, így $DAB\sphericalangle = MAF\sphericalangle = IBF\sphericalangle = IBA\sphericalangle$. Így $IBC\sphericalangle = IBA\sphericalangle + ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle + ABD = 90°$. Tehát IC az $AIBHCG$ kör átmérője a Thalész-tétel megfordítása miatt, vagyis O felezi IC-t. Ekkor a Thalész-tétel szerint $IGC\sphericalangle = 90°$, ezért $MGC\sphericalangle = 90°$, és ezzel – ismét a Thalesz-tétel megfordítását alkalmazva – kapjuk, hogy G rajta van az MC átmérőjű körön, melynek középpontja E. Így $EM = EG = EC$. AZ OEF az MIC háromszög középvonal-háromszöge, ugyanis O felezi az IC, E az MC, F pedig az MI szakaszt. Ezért $OE \parallel IM \parallel FG$, továbbá $OF = EM = EG$. Tehát $OEGF$ trapéz, melynek szárai egyenlő hosszúak, vagyis húrtrapéz. Így FG felezőmerőlegese megegyezik OE felezőmerőlegesével, hiszen ez a trapéz szimmetriatengelye. Mivel K az $AFDG$ kör középpontja, rajta kell lennie FG felezőmerőlegesén, ekkor viszont rajta van OE felezőmerőlegesén is. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy $EK = OK$.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 23 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Csaplár Viktor, Csertán András, Dobák Dániel, Fekete Richárd, Fülöp Anna Tácia, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Mátravölgyi Bence, Nguyen Bich Diep, Rareş Polenciuc, Snehansu Bhowmick, Szabó Dávid, Tálos Zoltán, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 4 pontos 2, 3 pontos 1, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 4988. *Egy $(m+2)\times(n+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát”. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk.*

Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m\times n$-es „belseje” egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

(*6 pont*) (*Iráni feladat*)

Megoldás. Először is vegyük észre, hogy ha egy megfelelő kitöltés esetén a táblázat minden elemét (a „szélét”, azaz az első és utolsó sort és oszlopot is) megszorozzuk egy konstanssal, akkor az így kapott táblázat is teljesíti a feladat feltételét (azaz minden belső szám a négy szomszédja átlaga). Valamint két megfelelő kitöltés összege is megfelelő kitöltés (az összegzést itt is elvégezve a táblázat szélén is).

Másodszor azt látjuk be, hogy bármely megfelelő kitöltés esetében a legnagyobb abszolút értékű tag csak a táblázat szélén szerepelhet – kivéve, ha a táblázat minden tagja azonos (beleértve a széleket is). Tegyük fel, hogy a táblázat belsejében van egy érték, mely a legnagyobb abszolút értékkel rendelkezik. Ez a szám csak úgy lehet a négy szomszédja átlaga, ha mind a négy szám megegyezik vele. Ugyanez igaz erre a négy szomszédra, azok összesen 8 darab (hacsak nem értünk már ki a szélre) szomszédjára, és így tovább, mindegyik érintett számból minden irányban továbbhaladva, egészen addig, amíg a teljes táblázatot le nem fedtük, a szélekkel együtt. Tehát ugyanaz az érték szerepel mindenhol (a széleket is beleértve).

A fentiekből az is látszik, hogy egyetlen megoldás lehet a szélek adott kitöltése esetén, hiszen ha lenne két megoldás, akkor ezek különbségére is teljesülne a feladat követelménye, viszont a különbségnél a széleken csupa nulla van. Így ennél nagyobb abszolút értékű szám nem szerepelhet a táblázatban, azaz a különbség minden száma nulla, vagyis a két kitöltés azonos.

Végül azt látjuk be, hogy mindig létezik megfelelő kitöltés. Ezt egy viszonylag egyszerű esetre látjuk be, amikor a táblázat szélének egyetlen tagja nem nulla, és ez a tag pont 1. Ha ezt beláttuk, akkor ezen táblázatok lineáris kombinációja a szélek tetszőleges kitöltését megadja, így az ilyen speciális táblázatok megoldásainak fentivel azonos lineáris kombinációja kiadja a megoldást a szélek adott kitöltésére az első pontban belátottak miatt.

Ehhez tegyük azt, hogy először a táblázat belsejébe csupa nullát írunk, ez lesz az A_1 táblázat. A második lépésben minden belső mezőbe a négy szomszédja átlagát írjuk (a széleken lévő értékeket természetesen nem változtatjuk); így kapjuk az A_2 táblázatot. Ugyanezt a lépést ismételgetve kapjuk az A_3, A_4 stb. táblázatokat. Az első lépésben egyetlen szám értéke fog változni, a szélen lévő 1-es érték szomszédja 0-ról $\frac{1}{4}$-re nő, az összes többi érték marad 0. Teljes indukcióval látszik, hogy egy lépés során a táblázat egyetlen értéke sem csökkenhet (hiszen az előző lépésben sem csökkent egyetlen érték sem, és nem kisebb számok átlaga sem lesz kisebb a korábbi átlagnál). Azt is tudjuk, hogy ezen táblázatok egyetlen belső számának értéke sem lehet soha 1, vagy annál több (a megoldás második pontja miatt). Azaz az egymás utáni táblázatok minden adott helyen lévő értéke egy monoton növő, korlátos sorozatot alkot, ami így konvergens lesz. És mivel a határértékek átlaga megegyezik az átlag határértékével, így az $A_1, A_2, \ldots$ táblázatok határértéke a speciális feladat megoldása lesz.

Ezzel bebizonyítottuk az utolsó bizonyítandó állítást, tehát a feladat állítását is igazoltuk.

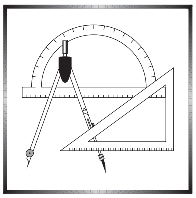
Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A megoldás mindkét része erősen támaszkodik a valós számok rendezhetőségére (és a rendezés teljességére). Mivel a feladat követelménye csupán a számokkal végzendő alapműveletekről szól, jogosan vetődik fel a kérdés, vajon érvényben marad-e valami a feladat állításából, ha a valós számok helyett egy nem rendezhető test elemeivel töltjük ki a táblázatot.

Ha valós számok helyett komplex számok szerepelnek, akkor a beírt számok valós és képzetes részeivel kapott táblázatokra külön-külön alkalmazható a valós esetre adott bizonyítás, így ebben az esetben a feladat mindkét állítása igaz marad. Második próbálkozásként tekintsük a háromelemű $T = \{0, 1, 2\}$ testet a modulo 3 összeadás és szorzás műveletével. Mivel T-ben $3 = 1 + 1 + 1 = 0$, itt négy szám átlaga a számok összegével egyenlő. Tekintsük itt a levágott sarkú 4×3-as táblázatot, aminek szélső soraiban és oszlopaiban minden mezőbe nullát írtunk. A belső két mező mindegyikébe szintén nullát írva megfelelő kitöltést kapunk, de megfelel az a kitöltés is, ha a két belső mezőbe 1-es kerül: ezek mindegyikének három 0 és egy 1-es szomszédja van, amelyek átlaga e számok összege: $0 + 0 + 0 + 1 = 1$; így ez is egy megfelelő kitöltés, tehát az egyértelműség ekkor nem teljesül.

Továbbra is 4×3-as táblázatot és a T test elemeit használva írjunk az első (külső) sor üres mezőjébe 1-et, a többi szélső sor és oszlop mezőibe pedig nullákat. A középső (belső) oszlop két mezőjébe (az 1-es alá) írandó értékeket jelölje rendre x és y. Az x szomszédai 0, 1, 0 és y lévén $x = 0 + 1 + 0 + y = 1 + y$ szükséges. Hasonlóan, y szomszédai 0, x, 0 és 0 lévén $y = 0 + x + 0 + 0 = x$-nek is teljesülnie kellene, ezekből viszont $x = 1 + y = 1 + x$ következik, ami ellentmondás. Tehát ebben az esetben a táblázatnak nem létezik a feladat követelményeinek megfelelő kitöltése.

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 3 versenyző: Sebestyén Pál Botond, Tóth Balázs, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 3 pontos 6, 2 pontos 3, 1 pontos 10, 0 pontos 1 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1546–1552.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1546. Oldjuk meg az egész számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$(x - 8)(x - 10) = 2^y.$$

(*Amerikai versenyfeladat*)

C. 1547. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög EF oldalának felezőpontját jelölje K. Adjuk meg az $ABCD$ töröttvonalon azt az L pontot, melyre az AKL háromszög területe egyenlő a hatszög területének $\frac{2}{5}$ részével.

Bakos Tibor feladata nyomán

Feladatok mindenkinek

C. 1548. Anna gondol egy 3×3-as négyzet néhány mezőjére. Ezután megmondja Bálintnak minden sorról és oszlopról, hogy hány mező szerepel benne az általa gondoltak közül. Hányféleképpen tud Anna úgy gondolni, hogy az általa adott információkból Bálint ne találhassa ki egyértelműen, melyek voltak a gondolt mezők?

C. 1549. Az AB szakasz felezőpontja legyen F, továbbá legyen az AF szakasz egy tetszőleges pontja Z. F-ben merőlegest állítunk AB-re és felmérjük rá az $FX = FA$ távolságot. B-ben is merőlegest állítunk AB-re és felmérjük rá a $BY = AZ$ távolságot úgy, hogy X és Y az AB egyenesének egyazon oldalán legyenek. Mekkora lehet az XZY szög?

Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

C. 1550. Oldjuk meg az

$$n \cdot (1! + 2! + 3! + \ldots + n!) = (n+1)!$$

egyenletet a pozitív egész számok halmazán.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1551. Adott az ABC háromszög, melyről a következőket tudjuk: AD és BE súlyvonalának hossza 3 cm, illetve 6 cm, a háromszög területe pedig $3\sqrt{15}$ cm^2. Határozzuk meg a harmadik súlyvonal hosszát, ha tudjuk, hogy ez a másik kettőtől különbözik.

C. 1552. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$ és $0 < b < 1$, akkor

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1.$$

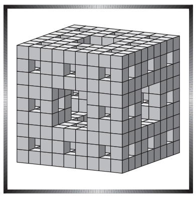
Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5030–5037.)



B. 5030. Mutassuk meg, hogy minden 1-nél nagyobb egész felírható 1-nél nagyobb, $2^p \cdot 3^q$ alakú számok összegeként úgy, hogy az összegnek nincs két olyan tagja, melyek egyike a másiknak osztója. (Például $23 = 9 + 8 + 6$, $11 = 9 + 2$ vagy $12 = 12$.)

(*4 pont*) *Erdős Pál* feladata

B. 5031. Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának D-n túli meghosszabbításán vegyük fel az F pontot. A BF szakasz a CD oldalt a G, az AC átlót pedig az E pontban metszi. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}.$$

(*3 pont*)

B. 5032. Mi a mértani helye egy egyenlő szárú háromszög belsejében azoknak a pontoknak, amelyeknek a száraktól mért távolságaik mértani közepe az alaptól mért távolsággal egyenlő?

(*4 pont*)

B. 5033. Az $\binom{n+1}{2}$ darab $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n-1}, \ldots, a_{k,1}, \ldots, a_{k,n+1-k}, \ldots, a_{n,1}$ számot n-edrendű fordított Pascal-piramisnak hívjuk, ha tetszőleges $2 \leqslant k \leqslant n$ és $1 \leqslant j \leqslant n+1-k$ esetén $a_{k,j}=a_{k-1,j}+a_{k-1,j+1}$. Egy példa 3-adrendű fordított Pascal-piramisra:

$$a_{3,1}=2$$

$$a_{2,1}=1 \qquad\qquad a_{2,2}=1$$

$$a_{1,1}=-2 \qquad\qquad a_{1,2}=3 \qquad\qquad a_{1,3}=-2$$

Jelentse s_k a piramis k-adik sorában lévő számok összegét, azaz

$$s_k=a_{k,1}+a_{k,2}+\ \ldots+a_{k,n+1-k}.$$

Egy piramis jelváltó a k-adik $(k>1)$ sorában, ha $s_{k-1}\cdot s_k<0$. Adott n esetén legfeljebb mekkora lehet a k értéke, ha egy n-edrendű piramis jelváltó a $2., 3., \ldots, k$-adik sorában, de a $(k+1)$-edik sorában már nem? (A fenti példában $k=2$, mert $s_1\cdot s_2=-2<0$, de már $s_2\cdot s_3=4>0$.)

(*5 pont*)

B. 5034. Bizonyítandó, hogy ha egy konvex négyszög szögei α, β, γ, δ, és egyik sem derékszög, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\delta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta).$$

(*3 pont*) *Surányi János* feladata

B. 5035. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n \geqslant 8$ csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor több, mint

$$\frac{(n-5)^4}{64}$$

egyszínű, négy hosszú kör keletkezik.

(*6 pont*) *Pálfi Máté* (Budapest) javaslata nyomán

B. 5036. Az M pontból két érintőt húztunk egy O középpontú derékszögű hiperbolához. Az egyik érintő a hiperbola egyik aszimptotáját a P, a másik érintő a másik aszimptotát a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy az OM egyenes felezi a PQ szakaszt.

(*5 pont*)

B. 5037. Adott egy P poliéder. A P-t feldaraboljuk a $P_1, \ldots, P_k$ poliéderekre, valamint a $Q_1, \ldots, Q_k$ poliéderekre is úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek egybevágóak. Mutassuk meg, hogy kijelölhetünk P belsejében néhány pontot úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a P_i és Q_i poliéderek belsejébe ugyanannyi (legalább egy) pont esik. (Minden poliéder helyzete rögzített a térben.)

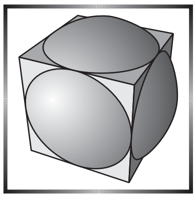
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (752–754.)



A. 752. Legyenek k, s és n pozitív egész számok úgy, hogy $s < (2k+1)^2$, és legyen R a sík azon (x, y) rácspontjainak halmaza, amelyre $1 \leqslant x, y \leqslant n$. Az R pontrácson a következő eljárást végezzük el. Kezdetben R egy pontját zöldre, a többi pontját fehérre színezzük. Ezután minden lépésben kiválasztunk egy $2k \times 2k$ rácspontból álló S négyzetet, amelynek középpontja zöld, és legalább s fehér pontot tartalmaz, majd az S-beli fehér pontok közül valamelyik s pont színét zöldre változtatjuk. Ezt a lépést addig ismételgetjük, amíg csak található megfelelő S négyzet.

Azt mondjuk, hogy az s szám *k-ritka,* ha létezik olyan C pozitív valós szám, hogy bármely n, bármely kiinduló zöld pont, és a fenti lépések bármely szabályos sorozata után a zöld pontok száma nem lehet nagyobb, mint Cn.

Fejezzük ki a legkisebb k-ritka egész s számot k függvényében.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Sztara Zagora, Bulgária)

A. 753. Legyen a egész szám, és legyen p az $a^3 + a^2 - 4a + 1$ egy prímosztója. Mutassuk meg, hogy van olyan b egész szám, amelyre $p \equiv b^3 \pmod{13}$.

A. 754. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög belső pontja, és legyen Q a P izogonális konjugáltja. Legyen L, M és N a körülírt kör rövidebbik BC, CA, illetve AB ívének felezőpontja. Legyen X_A az LQ félegyenes és a PBC kör metszéspontja, X_B az MQ félegyenes és a PCA kör metszéspontja, és X_C az NQ félegyenes és a PAB kör metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a P, X_A, X_B és X_C pontok egy körön vannak vagy egybeesnek.

Javasolta: *Gustavo Cruz* (São Paulo)

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 484. A Hanoi tornyai nevű játék rendkívül egyszerű. Három rúddal és N darab különböző méretű koronggal játszható. Kezdetben az egyik rúdon N korong helyezkedik el, alul a legnagyobb, majd fölötte rendre a kisebbek. Ekkor a másik két rúd üres. A játék szabályai szerint az egyik rúdról egy másikra kell átrakni a korongokat úgy, hogy minden lépésben egy korongot lehet áttenni, de nagyobb korong nem tehető kisebb korongra.

Peti is elkezdte játszani a játékot, de nem ért a végére. A játékot egy ilyen állapotban találjuk meg. Készítsünk programot, amely megad egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel ez az állapot előállítható.

A program standard bemenetének első sorában annak a rúdnak a sorszáma szerepel, amelyen kezdetben az összes korong volt. A következő sorban három szám, az egyes rudakon található korongok száma van. A következő három sorban az adott rúdon található korongok mérete szerepel csökkenő sorrendben. A kimenet első sora egyetlen számot tartalmaz, az állapot eléréséhez szükséges lépések L számát. A következő L sor mindegyikében két szám található, egymástól pontosan egy szóközzel elválasztva. Az első szám megadja a rudat amelyről, a második pedig azt a rudat, amelyre átkerül a felső korong. Feltételezhetjük, hogy Peti legfeljebb 10 koronggal játszik.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**

`2`
`2 2 0`
`3 2 / 4 1 /`
	`6`
	`2 1 / 2 3 / 1 3 / 2 1 / 3 2 / 3 1`

Beküldendő egy `i484.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 485 (É). Magyarország nagyobb közúti, vasúti, jelentősebb gyalogos és kerékpáros hídjainak, völgyhídjainak adatai állnak rendelkezésünkre a hidak.txt, kapcsolo.txt, funkcio.txt, hely.txt és a telepules.txt állományokban. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

1. Készítsünk új adatbázist `i485` néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a forrásállományokkal azonos néven. Vegyük figyelembe, hogy több hídnak nem minden adata ismert.
2. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő adattípusokat és kulcsokat. A táblákba ne vegyünk fel új mezőt.

Táblák:

hidak (id, nev, athidalas, atadas, hossz, nyilas)

id	a híd azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a híd neve (szöveg);
athidalas	a pillérek közötti legnagyobb távolság méterben (szám);
atadas	a híd mit ível át (szöveg) például: Tisza, völgy, vasútállomás stb.;
hossz	a híd teljes hossza méterben (szám);
nyilas	a hídpályának a föld- vagy vízfelszíntől mért távolsága méterben (szám).

kapcsolo (hidid, funkcioid)

hidid	a híd azonosítója (szám), ez a kulcs;
funkcioid	a híd funkciójának azonosítója (szám), ez a kulcs.

funkcio (id, nev);

id	a funkció azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a funkció neve (szöveg) például: közúti, kerékpáros, stb.

hely (hidid, telepulesid)

hidid	a híd azonosítója (szám), ez a kulcs;
telepulesid	a település azonosítója (szám), ez a kulcs.

telepules (id, nev, megye)

id	a település azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a település neve, amelyhez legalább az egyik hídfő tartozik (szöveg);
megye	a település megyéjének neve (szöveg).

Készítsük el a következő feladatok megoldását. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok viszont ne. A megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

3. A tervezett, vagy épülőben lévő hidak átadási éve nem ismert. Soroljuk fel ezeknek a hidaknak a nevét, hosszát és adjuk meg, hogy mit ívelnek át. (3uj)
4. Ritkának gondolhatjuk a kerékpáros és gyalogos hidakat. Lekérdezés segítségével soroljuk fel ezeknek a hidaknak a nevét, hosszát, funkcióját és korát a mai dátumhoz képest. A lista a kor szerint csökkenően jelenjen meg. (4ritka)
5. A hidak nem feltétlenül településen belül vannak, hanem többet össze is köthetnek. Lekérdezéssel határozzuk meg ezeket a hidakat az összekötött települések nevével együtt. (5osszekot)
6. Adjuk meg megyénként az adatbázisban szereplő hidak számát. Ha egy híd különböző megyében lévő településeket köt össze, többször számolhatjuk. A lista a hidak száma szerint csökkenően jelenjen meg. (6megyenkent)
7. Határozzuk meg azoknak a hidaknak a nevét, amelyeknek *„közúti”* és *„vasúti”* funkciója is van egyszerre. A listában minden hídnév egyszer jelenjen meg. (7tobbfunkcios)
8. A települések nevét nem mindig tudjuk pontosan. Paraméteres lekérdezés segítségével adjuk meg egy településnév részletéhez az illeszkedő településeket és településeken lévő hidak nevét. (8reszlet)
9. Határozzuk meg lekérdezés segítségével az oszlopok sorrendjétől eltekintve a minta szerint, hogy Budapesten melyik hídtípusból hány darab van. A többfunkciósokat mindegyikhez számoljuk be. (9osszesites)

Közúti (db)	Vasúti (db)	Gyalogos (db)	Kerékpáros (db)
22	2	0	0

Beküldendő egy tömörített `i485.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott adatbázis-kezelő nevét és verziószámát.

Letölthető fájlok: `hidak.txt`, `kapcsolo.txt`, `funkcio.txt`, `hely.txt`, `telepules.txt`.

I. 486. Monte Carlo városában két egyenrangú út keresztezi egymást. A város vezetése azon gondolkodik, hogy a kereszteződést körforgalommá építse át. Az átépítést abban az esetben végeznék el, ha az autók átlagos áthaladási ideje a körforgalomban kisebb lenne, mint a kereszteződésben. Készítsünk programot, amely adott közlekedési viszonyok mellett megadja a kereszteződés és a körforgalom esetén az átlagos áthaladási időt!

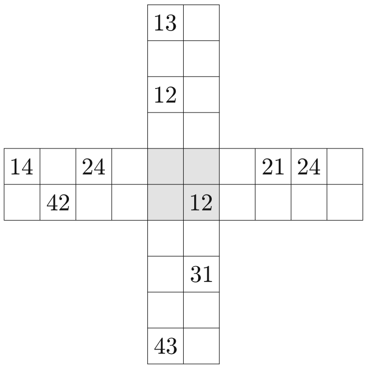
A város autósai különösen udvarias emberek, akik a következő szabályok betartásával közlekednek:

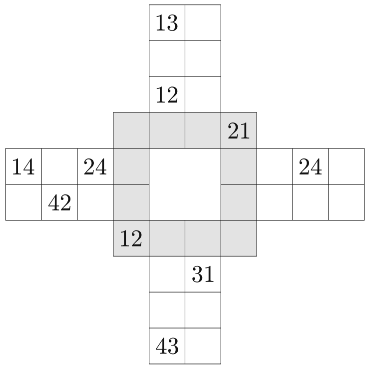
1. a kereszteződésben, illetve a körfogalomban mindig az érkezés sorrendjében történik az áthaladás;
2. ha több autó egyszerre érkezik, akkor az kezdheti meg az áthaladást, akinek az a legkevesebb ideig tart; ha több ilyen jármű is van, akkor a jobbkéz-

szabály alapján kezdik meg az áthaladást; ha mindegyik jármű ilyen, akkor véletlenszerűen választanak egyet, és ő kezdi meg az áthaladást, majd azután alkalmazzák a jobbkéz-szabályt;

3. két autó egyszerre is beléphet a kereszteződésbe abban az esetben, ha útjuk nem keresztezi egymást;
4. a körforgalomban haladó járműnek elsőbbsége van az oda belépni akaró járműhöz képest.

A feladatban tekintsünk minden autót egyforma hosszúságúnak, valamint feltételezzük, hogy azonos sebességgel haladnak. Mozgásukat úgy értelmezzük, hogy egységnyi idő alatt az ábrán látható négyzetháló egy cellájából a haladásnak megfelelő, oldalával szomszédos cellába lépnek át, ha az a cella üres (vagyis nem áll ott autó, vagy az ott álló autó tovább tud lépni a cellába belépő autóval egy időben).





A kereszteződés és a körforgalom négyzethálós felbontása az ábra szerint történjen. A példában a négy csatlakozó útszakaszt az óramutató járása szerint az 1, 2, 3, 4 számok, az autókat kétjegyű számok jelölik: a tízesek helyén annak az útszakasznak a sorszáma van, ahonnan érkezik, az egyesek helyén ahová tart az autó.

A szimulációs programban az útszakaszok L hosszúak legyenek, tehát egy útszakaszon sávonként L négyzet csatlakozzon a kereszteződéshez, illetve a körforgalomhoz. Minden esetben összesen N számú autóval induljon a szimuláció, melyek mindegyike a kereszteződés, illetve a körforgalom felé tart. Az autók egyike sem fordul vissza, tehát mindegyik egy másik útszakaszon halad tovább. A program adja meg, hogy S számú szimuláció esetén mennyi az átlagos áthaladási idő. Ez az idő egyenlő egy-egy autó esetén a kereszteződés vagy körforgalom miatti várakozás és áthaladás idejével, tehát attól az időegységtől kezdődik, amikor az autó várakozni kényszerül a bevezető úton, vagy várakozás nélkül belép a kereszteződésbe, illetve körforgalomba, és akkor ér véget, amikor onnan kilép. Így egy 1-es útszakaszról a 4-es útszakaszba tartó, jobbra kanyarodó autó a kereszteződés esetén legkevesebb 2, a körforgalom esetén legkevesebb 4 időegység alatt halad át.

A program a standard bemenetről olvassa be L, N és S értékét, majd a standard kimenet egy sorába írja az átlagos áthaladási időket a kereszteződés és körforgalom esetén. Korlátok: $10 \leqslant L \leqslant 100$, $L \leqslant N < 4L$, $100 \leqslant S \leqslant 10\,000$.

Beküldendő egy `i486.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I/S. 36. Hányféleképpen lehet felépíteni egy N egység magasságú 2×2-es alapú oszlopot, $1\times 1\times 2$ méretű téglatestekből? Ez a szám nagyon nagy is lehet, ezért az 1 000 000 007-es maradékát adjuk meg.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot.

Kimenet: adjuk meg, hogy hányféleképpen tudjuk felépíteni az oszlopot. A forgatással egymásba vihető építéseket is különbözőnek tekintjük.

Korlátok: $1\leqslant N\leqslant 10^6$.

Időlimit: 0,1 mp.

Bemenet	**Kimenet**
`3`	`32`

Beküldendő egy `is36.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 135. Adott egy terület domborzati térképe, amelyre gondolatban egy $N\times N$-es négyzethálót terítünk. A négyzetháló minden négyzetéhez hozzárendelünk a térkép alapján egy magasság értéket. Szeretnénk bejárni a terület felét, azaz a négyzetek legalább felét (páratlan N esetén felső egészrészt véve). A bejárás során egy-egy négyzetről csak egy vele oldalszomszédos négyzetre tudunk átmenni, ha a két négyzet magasság értékének különbsége legfeljebb D. Adjuk meg azt a legkisebb D értéket, amivel be tudjuk járni a terület legalább felét, ha a bejárás tetszőleges négyzetről indulhat.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot; a következő N sor mindegyike N számot tartalmaz: az i. sor j. száma az i. sor j. négyzetének magasságértékét adja meg.

Kimenet: a legkisebb D egész szám, amivel megvalósítható a bejárás.

Korlátok: $1\leqslant N\leqslant 500$, $0\leqslant$ egy négyzet magassága $\leqslant 10^6$.

Időlimit: 0,3 mp.

Bemenet (a `/` jel a sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`5 / 0 0 0 3 3 / 0 0 0 0 3 / 0 9 9 3 3 9 9 9 3 3 / 9 9 9 9 3`	`3`

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. június 10.

A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiáról

(egy háromszoros olimpikon visszaemlékezése)

A csillagok már az ősi időkben is lenyűgözték az embereket, így nem meglepő, hogy a mai napig legtöbbünket csodálattal tölt el a csillagos ég látványa, a megkapó csillagászati felvételek. Sajnos a mindennapi élet folyamatos gyorsulásával és a fényszennyezés növekedésével az égbolt látványa egyre inkább háttérbe szorult. Ám igen megkapó tud lenni ezen csodák tudományos háttere is: a felfoghatatlan távolságok, extrém körülmények, a „tiszta fizika és matematika” birodalma elképesztően gyönyörű és különleges.

A Nemzetközi Fizikai Diákolimpia néhány résztvevője éppen ezért keveselte a csillagászati vonatkozású feladatokat versenyükön. Ez az igény hozta létre annak csillagászati testvérét – így született meg a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia (International Olympiad on Astronomy and Astrophysics, IOAA). Az első versenyt 2007-ben rendezték Thaiföldön, akkor 21 ország részvételével zajlott. Azóta minden évben megrendezésre került, és a résztvevő országok száma a kétszeresére nőtt, így tavaly Pekingben már mintegy 200 diák mérte össze tudását. Ugyan immár egy teljesen különálló, elismert tudományos diákolimpia, az eredetét nem lehet nem észrevenni, hiszen a verseny nagy része egy speciális fizikai diákolimpiának is tekinthető. Hasonló tudást igényel, ám egy adott témában sokkal mélyebbet. Tisztában kell lennünk az általános összefüggéseken túl például a különleges csillagászati jelenségek természetével, az észlelések kiértékelésének menetével, a csillagászati koordináta-rendszerek használatával és az ellipszispályák tulajdonságaival, de az alapvető fizikai folyamatok ismerete is elengedhetetlen.

Az IOAA felépítésében is eléggé hasonló a többi diákolimpiához: a körülbelül 10 napos esemény alatt három különálló rész kerül megrendezésre. Az elméleti forduló során különféle érdekes és gyakran igen komplex számításokat igénylő csillagászati problémákat kell megoldani. Ennek eredménye adja az elérhető pontok felét. A pontok negyedét éri az adatfeldolgozási forduló, ahol többnyire szakcsillagászok által korábban végzett tudományos észleléseket kell feldolgozni, ábrázolni és elemezni. Ugyanilyen súlyozással számít bele az eredménybe az olimpia során valamelyik este önállóan végzett távcsöves észlelés is, ami általában az égbolt és a távcsőkezelés alapvető ismeretét kívánja meg. Az olimpia során ezenfelül van egy csapatverseny is, ahol különféle nemzetek tagjai alkotnak együtt egy csapatot, és egy érdekes, szokatlan feladatot kell megoldaniuk közösen – de ez az értékelés szempontjából teljesen különálló egység. Így magába a diákolimpiai eredménybe csak az egyéni feladatok megoldása során elért pontszám számít bele. Egy nemzeti csapat legfeljebb 5 diákból és 2 tanárból áll, de ettől lehetnek eltérések. Néhány ország ugyanis két csapatot, azaz összesen 10 diákot is indíthat a versenyen. Ezek az egykori alapító országok, illetve azok az országok, ahol már rendeztek csillagászati olimpiát. Olykor előfordul, hogy a két tanáron (vezetőn) túl ún. megfigyelők is részt vesznek a versenyen, ha ez indokolt. Az érmek odaítélése is hasonlít a társolimpiákéhoz: az első helyezettek eredményéhez képest bizonyos százalék elérése szükséges az arany-, az ezüst- és a bronzéremhez, illetve a dicsérethez (honourable mention). Így végül nagyjából a versenyzők fele kap elismerést.

A feladatsort a szervező ország bizottsága állítja össze, de mielőtt azt a diákok megkapják, az összes többi tanár is megismeri és véleményezi azt. Ekkor hosszú órákat töltenek azzal, hogy részletesen átolvassák, valamint véleményezzék a feladatokat, és ha esetleg hibát találnak, azt kijavítsák. Ezek után a csapatok vezetői lefordítják az angol nyelvű feladatsort a diákok anyanyelvére, így egyik versenyzőnek sem okozhat hátrányt, ha nem érti tökéletesen az angol szöveget. Mivel a tanáraink már azelőtt megismerik a feladatokat, hogy mi azt megkapnánk, szigorú elkülönítés van érvényben: a tanárok a diákoktól legalább néhány kilométerre, de gyakran más városban vannak elszállásolva, és a verseny végéig a versenyzőknek a kommunikációs eszközeiket is le kell adniuk, így véletlenül se szivároghat be hozzájuk a feladatok szövege. (Meglepő kikapcsolódási élmény a mobilok hiánya ...)

Az IOAA maga nem csupán egy verseny, hiszen a körülbelül 10 napos rendezvényből nagyjából csak 4 napon keresztül zajlik a „megmérettetés”. A bő egy hét, főleg a versenyek után, nagyon különleges kikapcsolódással telik el, kirándulásokkal és ismerkedéssel. Rengeteg hozzám hasonló korú, de teljesen különböző hátterű és kultúrájú fiatallal köthettem ismeretséget, ám egy dolog mindenkit összekötött: a tudományok, főleg a csillagászat iránti rajongás. Természetesen 200 diákkal képtelenség megismerkedni, ez a szellem mégis egyfajta közösséggé kovácsolt minket. Számos olyan embert is megismertem, akivel azóta is tartom a kapcsolatot. Volt olyan, akivel az első olimpiámon barátkoztam össze, és a három év során végig egymással (is) versenyeztünk. (Ugyan mindig kicsit előttem végzett, de csak örülni tudtam a sikereinek.) Jóllehet legtöbbjükkel elvesztettem a rendszeres kapcsolattartást, de a közelmúltban kitörő örömmel konstatáltam, hogy azon a konferencián, amelyen hamarosan részt veszek, az egyik régi, lengyel olimpikon ismerősöm is előadást fog tartani. Biztos vagyok benne, hogy ott fogjuk folytatni, ahol Thaiföld után abbahagytuk.

A verseny mindig más országban zajlik, idén éppen Magyarország szervezi a 13. IOAA-t. A diákok Keszthelyen, a tanárok pedig Hévízen lesznek elszállásolva 2019. augusztus 2–10. között. Az előkészületek már nagyban zajlanak, és minden szervező és érintett diák izgatottan várja az eseményt. A verseny hivatalos oldala: `www.ioaa2019.hu`, itt azok számára is végigkövethető lesz a verseny, akik idén lemaradtak róla. A következő olimpia Kolumbiában lesz 2020-ban, amire a magyar csapat kiválasztása már a 2019/2020-as tanév elején megkezdődik. Az ezzel kapcsolatos információk a `www.bajaobs.hu/ioaa/` oldalon lesznek elérhetők.

Minden ország másképpen válogatja ki a versenyzőit. Magyarországon ez egy többlépcsős folyamat, miközben a diákoknak van lehetőségük fejlődni is. A tanév elején indul egy háromfordulós verseny. Az egyes fordulókban a versenyzők feladatokat oldanak meg a saját iskolájukban. A legjobban teljesítők meghívást kapnak a tavasszal rendezett országos döntőbe. A döntő eredménye alapján nagyjából 10 diák kerül be az olimpiai kerettagok közé. Őket innentől egy szakmai csapat készíti fel különféle foglalkozások során. A közös felkészülés végén, több megmérettetés eredménye alapján dől el a végső sorrend.

Én 7. osztályos koromtól kezdve jártam a Polaris Csillagvizsgáló szakkörére, és azóta rendszeresen használtam távcsövet, ezáltal igen jó égboltismerettel, de kevésbé megalapozott fizika- és matematikatudással indultam neki a felkészülésnek a 9. osztályban. Nagyon fiatal voltam még ekkor, és alig értettem a felkészítőket, de amikor csak lehetett, követtem a kerettagokat, és hálás vagyok, hogy nem adtam akkor fel és halasztottam el egy évvel a kezdést. Ez a kis alaptudás és tapasztalat olyannyira segített, hogy 10. osztályban már képviselhettem országunkat a nemzetközi versenyen Indiában. Ezt követően eljuthattam még Thaiföldre és Kínába is.

A versenyek során azt tapasztaltam, hogy azok a társaim, akik hiányos égboltismerettel, de valamivel biztosabb fizikatudással vágtak neki – akár pár évvel később – a felkészülésnek, végül hasonló eredményeket értek el, mint én. Ehhez persze legtöbbjük sokat gyakorolt az ég alatt, de ismertem olyat is, aki elhanyagolta a versenynek ezt a részét, ám fizika- és matematikatudásának biztossága révén mindig kiválóan teljesített. Így tényleg bárkit tudok bátorítani a részvételre, akit érdekel a csillagászat és a fizika, hiszen összességében úgy vélem, hogy ha az ember hajlandó némi energiát belefektetni a felkészülésbe, igazán nem számít a csillagászattal kapcsolatos háttere. A feladatok megoldása során többször is szükség lehet bonyolultabb matematikai összefüggések, például egyszerűbb szférikus geometria vagy az ellipszis koordinátageometriai tulajdonságainak használatára. Kezdetben azonban az sem gond, hogy ha valaki azt sem tudja, hogy mik ezek, mert a felkészülés során könnyedén el lehet őket sajátítani.

Nem csak az olimpia maga tud szórakoztató és kapcsolatépítésekkel teli lenni, hiszen már az itthoni felkészülés során is számos barátra tettem szert. A felkészítéseken általában intenzíven dolgoztunk, de azok kivétel nélkül fantasztikus hangulatban teltek el, és a fáradtság ellenére nem hagytam volna ki egyiket sem. Azt szerettem ebben a közegben, hogy itt nem éreztem magam különcnek azért, mert tanulni szerettem volna, illetve mert szeretem a csillagászatot és a tudományokat. Mindig megtaláltuk a többiekkel a közös hangot, és gyakran akkor is fent maradtunk hajnalig, ha borult volt az ég. Ekkor az időt beszélgetéssel és játékkal ütöttük el. Ugyan technikailag egymás ellenfelei voltunk, végig segítettük egymást, és örültünk, ha ezzel a másik ember több lett, és jobb eredményt ért el általa.

Sokkoló volt tudomásul vennem, hogy azok után, hogy 4 éven keresztül mindig ott voltam a versenyzők között a csapatban, mégis eljött a pont, amikor már én is kiöregedtem. Szerencsére számomra nem állt meg itt az olimpia, hiszen felkészítőként visszatérhettem, és jóllehet ez más, de ugyanolyan szórakoztató tevékenység, mint a versenyzés. Ennek a fejezetnek legalább nincs vége, és örülök, ha hozzájárulhatok a fiatalabbak sikereihez.

Én már el sem tudom képzelni az életemet a verseny nélkül. Hatalmas lehetőséget adott abban, hogy kitűnjek azon a területen, amit valóban szeretek, és amiben tehetséges vagyok. Az olimpiának köszönhetem rengeteg barátomat, azt, hogy bekerülhettem az egyik kitűnő külföldi egyetemre, a jelenlegi, fantasztikus kutatói állásomat, és a rengeteg tapasztalatot – nem csak az elméleti tudás tekintetében. Az utak során olyan helyekre juthattam el és olyan kultúrákkal találkozhattam, amelyek kifejezetten szemléletformáló hatással voltak rám, így megláttam a helyem a világban. Megismertem saját értékeimet és határaimat, azokat feszegetve. Megtanultam győzni és csúfosan elbukni, majd ezután felállni és tovább küzdeni.

Világos Blanka
University of Birmingham

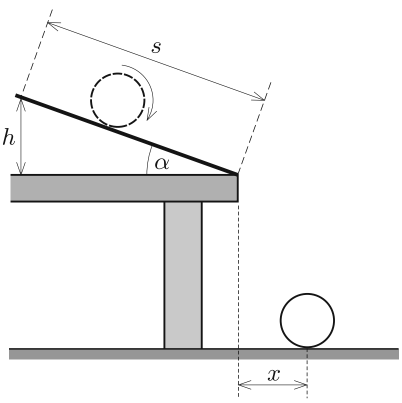
Mérési feladatok megoldása

M. 381. *Készítsünk* A4*-es írólapból (vagy annak egy részéből) ragasztással papírhengert! Gurítsuk le a hengert az asztal tetején elhelyezett, éppen az asztal széléig érő lejtőről!*

Mérjük meg, milyen messzire érkezik egy csúszásmentesen legördülő papírhenger az asztal szélének függőleges vetületétől! Hogyan függ ez a távolság a papírhenger átmérőjétől? Eredményeinket hasonlítsuk össze egy forgás nélkül lecsúszó és leeső kicsiny test (például egy pénzérme) vízszintes irányú elmozdulásával!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. *Mérési eszközök: lejtő, asztal, mérőszalag, vonalzó, olló, ragasztószalag, papírlapok.*



Mérési elrendezés és a mérés menete

A lejtőt az asztal tetejére helyeztem. Az asztal szélével egyvonalban jelet tettem a padlóra, és odatettem a mérőszalag végét. A papírhengert és a pénzérmét a lejtőn mindig ugyanarról a helyről indítottam, majd a földre érkezés helyét a mérőszalag segítségével határoztam meg. A papírhengernél a padlóval történő első érintkezési pontját figyeltem, a leérkező érménél a pénzdarab „elejét” tekintettem. Az érménél öt mérésből, a papírhengernél különböző átmérőknél tíz-tíz mérésből átlagoltam.

Mérési adatok
$h = 26{,}3$ cm,
$s = 73{,}5$ cm,
$\alpha \approx 22°$.

A pénzérme mért adatai (N a mérés sorszáma):

N	1	2	3	4	5
x [cm]	31,3	33	33	33,7	35,7

A papírhengerek mért adatai különböző d átmérő esetén:

$d_1 = 8{,}9$ cm

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x [cm]	13	14	11	10	10	12	11	9	10	7

és így tovább összesen hat különböző átmérőjű papírhengernél . . .

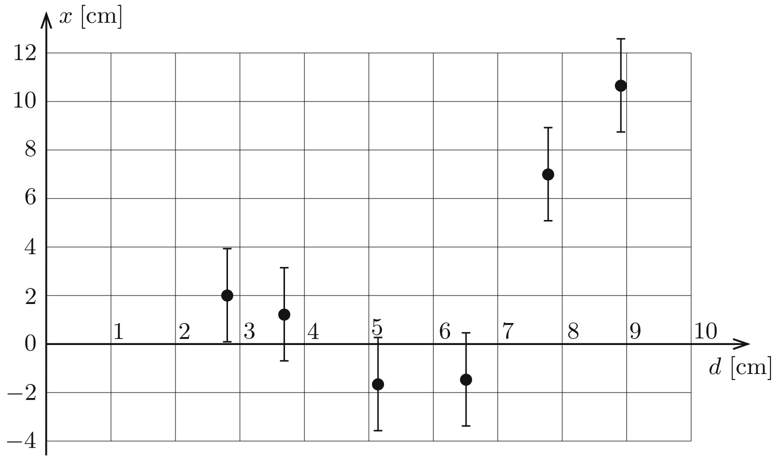
$d_6 = 2{,}8$ cm

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x [cm]	0	0	2	4	2	3	2	1	3	3

A papírhengerekre vonatkozó adatok összesítése:

d [cm]	8,9	7,7	6,5	5,1	3,7	2,8
$x_{\text{átlag}}$ [cm]	10,7	6,8	−1,3	−1,6	1,1	2,0

A mért adatok meglehetősen nagy szórása azt mutatja, hogy az eredmények hibája kb. ±2 cm.



A papírhenger vízszintes elmozdulása a henger átmérőjének függvényében

Hibaforrások:

– a papírhenger deformálódik, alakja eltérhet a hengertől,

– a hosszmérés pontatlansága (nem számottevő),

– a leérkezés helyének pontatlan meghatározása (ez a legjelentősebb hibaforrás),

– a papírhenger „könnyűsége” miatt már a viszonylag kis légáramlat is befolyásolja a mérést.

Az egyes hibaforrásokat nehéz számszerűen jellemezni, az egész mérés pontatlanságáról leginkább a mérési adatok erős szórása árulkodik.

Tapasztalatok

Amint az várható volt, a pénzérme sokkal távolabb érte el a padlót, mint a papírhenger, hiszen rá a tömegéhez képest sokkal kisebb közegellenállási erő hat. Igaz ugyan, hogy a csúszási súrlódási erő jobban fékezi a mozgást, mint a gördülési ellenállás, de – a tapasztalat szerint – a légellenállás mindkét hatásnál jelentősebb.

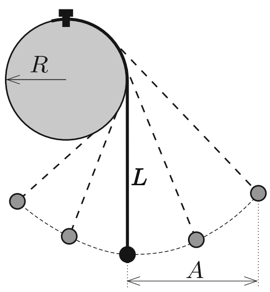
A mérés során megfigyelhetjük, hogy a henger egy eléggé szokatlan pályán mozog. Azt is észrevehetjük, hogy az $x-d$ grafikon egy viszonylag bonyolult görbe, a jelenséget tehát nem lehet egyszerűen megmagyarázni. A papírhenger egyszerre végez forgó- és haladó mozgást, így a légellenálláson kívül az ún. *Magnus-hatás* is megjelenik. (A forgó henger felülete és a vele érintkező levegő közötti „súrlódás" hatására a levegőben „cirkuláció" alakul ki, és ez a haladó mozgás irányára merőleges erőt eredményez.)

Meglepő tapasztalat, hogy a papírhenger vízszintes irányú x elmozdulása bizonyos hengerátmérők esetén negatív is lehet, vagyis a forogva eső henger visszakanyarodhat az asztal felé. Ezt a furcsa viselkedést a Magnus-hatás okozhatja.

Pácsonyi Péter (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 11. évf.)

17 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csépányi István, Kondákor Márk, Kozák Áron, Olosz Adél és Pácsonyi Péter mérési jegyzőkönyve. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 2 dolgozat.

M. 382. *Egy vékony, hajlékony, nyújthatatlannak tekinthető fonál egyik végét egy R sugarú, vízszintes tengelyű, rögzített henger „tetejéhez" erősítjük, a másik végére pedig egy kis méretű testet akasztunk. Egyensúlyi állapotban a fonál függőleges darabja $L=3R$ hosszúságú. A testet az ábrán látható módon kitérítjük, majd magára hagyjuk. A test mozgásának periódusideje – viszonylag nagy kezdeti kitérésnél – függ az A „amplitúdótól". Mérjük meg néhány különböző A esetén, hogy hány százalékkal tér el ezen inga (ún. evolvens-inga) $T(A)$ lengésideje az L hosszúságú fonálinga $T_0=2\pi\sqrt{L/g}$ lengésidejétől!*



(*6 pont*) *Christiaan Huygens* (1629–1695) nyomán

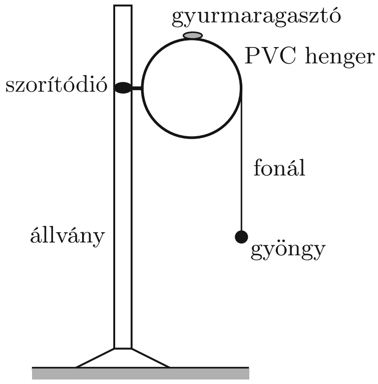
Megoldás. *Eszközök: vékony fonál, gyöngy, PVC henger, állvány, szorítódió (a rögzítéshez), állvány, gyurmaragasztó, hajlékony vonalzó, hagyományos vonalzó, filctoll (a jelöléshez), stopper.*

A mérhető x ívből az A amplitúdó a következőképpen számítható ki: A fonál teljes hossza (a gyurmaragasztótól a gyöngyig):

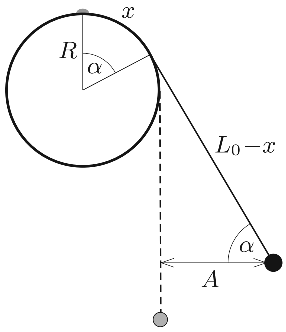
$$L_0=\frac{R\pi}{2}+3R.$$

A fonálnak a hengerre simuló darabjához tartozó szög (radiánban):

$$\alpha=\frac{x}{R}.$$



A mérési elrendezés



Elméleti megfontolás
(az A amplitúdó méréséhez)

Az amplitúdó:

$$A = (L_0 - x)\cos\alpha - (R - R\sin\alpha) = \left(\frac{R\pi}{2} + 3R - x\right)\cos\alpha - R(1 - \sin\alpha).$$

Az R sugarat megmérve, majd x-et változtatva és azt is mérve meghatározható az $A(x)$ amplitúdó.

A mérés menete

1. Először lemértem a henger külső átmérőjét (15,0 cm), ebből adódott, hogy a sugara $R = 7{,}5$ cm.

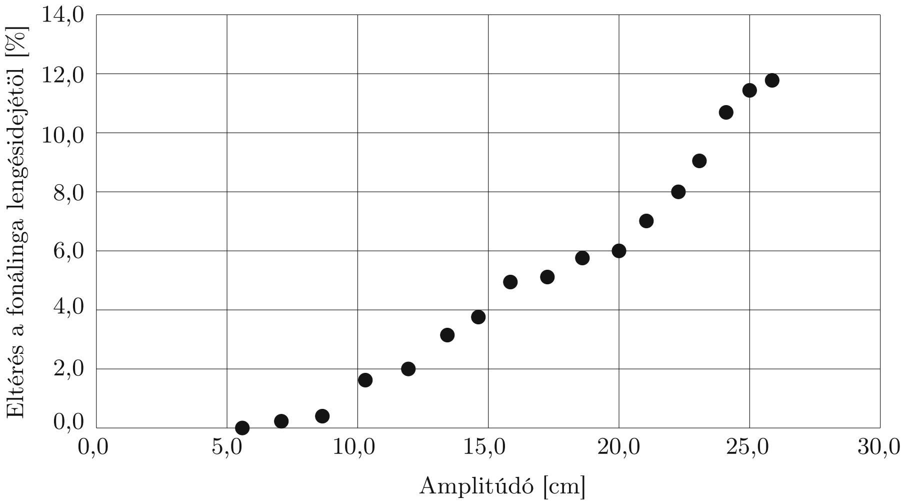
2. Rögzítettem a hengert a dióra, azt pedig a Bunsen-állványra. A fonalat ráragasztottam a „henger tetejére” a gyurmaragasztóval, majd rákötöttem a gyöngyöt úgy, hogy a fonál függőleges darabja $3R = 22{,}5$ cm legyen.

3. Ezután a fonál rögzítési helyétől kiindulva 2 cm-től 10 cm-ig beosztást készítettem 0,5 cm-es osztásközökkel. Ehhez a hajlékony vonalzót és a filctollat használtam.

4. Ezt követően az ingát kitérítettem úgy, hogy a (feszesen tartott) fonál és a henger legszélső érintkezési pontja éppen egy beosztásra essen. Itt elengedtem a gyöngyöt, és mértem 5 lengés idejét.

5. A mérést minden kezdőhelyzet esetén ötször végeztem el, és a mérési eredményeket, valamint a belőlük számított mennyiségeket táblázatba foglaltam és grafikusan szermléltettem. A táblázat tartalmazta 17 különböző x érték mellett a kiszámított α(rad) szöget és az A amplitúdót, 5-5 időmérési adatot, azok 1 lengésre vonatkoztatott átlagát ($T_{\text{átlag}}$), az időadatok statisztikus szórását, valamint a $T_{\text{átlag}}$ lengésidőnek és egy $3R$ hosszúságú matematikai inga kiszámított T_0 lengésidejének $\Delta T = T_{\text{átlag}} - T_0$ eltérését. (A táblázatot terjedelmi okokból nem közöljük. – A Szerk.)

6. Ábrázoltam a $\Delta T/T_0$ relatív eltérés százalékos értékét az A amplitúdó függvényében:



A mérési hiba becslése

A lengésidő hibáját a többszöri mérés adatainak szórásából becsültem meg. Ez a (statisztikus) hiba kb. 0,4–0,6% nagyságú volt. (Ennél bizonyára sokkal nagyobb lehet a lengések csillapodásából származó, de számszerűen nehezen becsülhető szisztematikus hiba.)

A távolságmérések bizonytalansága: $\Delta R=\pm0{,}1$ cm, $\Delta x=\pm0{,}1$ cm, ezekből adódóan a kiszámított amplitúdó hibája: $\Delta A=\pm0{,}2$ cm.

A mérési hiba okai:
– Az idő pontatlan mérése + reakcióidő.
– A hosszúságmérés pontatlansága.
– Nem egyforma elengedés a lengés indításakor („kis lökés”).
– Közegellenállás.

Az eredmények értékelése

1. A grafikonról leolvasható, hogy kis kezdeti értékek esetén a lengésidő jó közelítéssel valóban a rögzített felfüggesztésű (matematikai) inga T_0 lengésidejével egyezik meg.

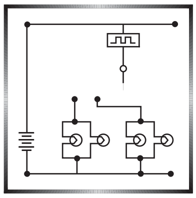
2. Nagyobb (a henger sugarával összemérhető, vagy azt számottevően meghaladó) amplitúdók esetén a lengésidő határozottan eltér T_0-tól, a százalékos eltérés és A között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat áll fenn.

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyakorló Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A mérés látszólag egyszerű volt, de valójában több – egymásnak részben ellentmondó – szempont miatt egyáltalán nem könnyű. A lengésidő pontos meghatározását általában sok lengés idejének mérése teszi lehetővé. Jelen esetben a lengés csillapodása és a periódusidőnek az amplitúdótól való függése azt igényelné, hogy csak kevés (sőt, esetleg csak egyetlen egy) lengést vizsgáljunk, ami egyszerű stopper helyett elektronikus időmérést (fénykapu alkalmazását) igényelné. Az inga fonalát célszerű igen vékonyra és hajlékonyra választani, ennek azonban a szakítószilárdsága szab határt. Az inga nehezékét érdemes lenne minél nagyobb tömegűnek, de minél kisebb méretűnek választani, ezt azonban az anyagának sűrűsége és a fonál szakítószilárdsága korlátozza. A közegellenállás hatása a szokásos ingás méréseknél az amplitúdó csökkentésével mérsékelhető; esetünkben azonban ez sem valósítható meg, hiszen a mérés célja éppen a lengésidő amplitúdófüggésének kimutatása, és ez a hatás csak nagyobb kitéréseknél mutatkozik számottevőnek.

11 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Kondákor Márk, Kozák Áron, Olosz Adél és Pácsonyi Péter mérési jegyzőkönyve. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (3–4 pont) 4 dolgozat.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 660. *Egy falhoz kötött, vízszintesen kifeszített, rugalmas szalagon egy csiga mászik* 1 m/h *sebességgel. A csiga a faltól indul, a szalag kezdeti hossza* 2 m. *Az indulástól számított minden óra végén a szalagot a végénél fogva* 1 *méterrel megnyújtjuk. Az indulás után mennyi idővel érkezik a csiga a szalag végére?*

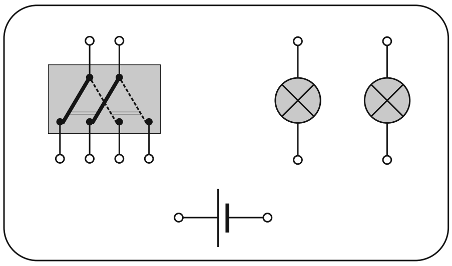
(*4 pont*)

Megoldás. Mivel a szalag nyújtásakor az egész szalag egyenletesen nyúlik, a nyújtás során az a számadat marad *változatlan*, hogy a csiga a szalag hányadrészénél járt. Az első órában megtett 1 m-t, ami az eredetileg 2 m-es szalag hosszának a fele. Amikor 3 m-esre nyújtjuk a szalagot, a csiga akkor is a szalag felénél lesz, 1,5 m-re a céltól. Mielőtt újra megnyújtanánk a kötelet, a csiga ebből az 1,5 m-ből megtesz 1 m-t, így 0,5 m marad a falig, ami a 3 m-es szalaghossznak az $\frac{1}{6}$-a. Ismét megnyútjuk a szalagot 1 m-rel, így az 4 m-es lesz, aminek a hatodát, $\frac{2}{3}$ m-t kell még a csigának megtennie. Ha 1 métert 1 óra alatt tesz meg, akkor $\frac{2}{3}$ métert $\frac{2}{3}$ óra alatt. Kétszer telt el 1-1 óra és még $\frac{2}{3}$ óra.

A csiga tehát az indulásától számított 2 óra és 40 perc múlva ér el a szalag másik végére.

Osváth Klára (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

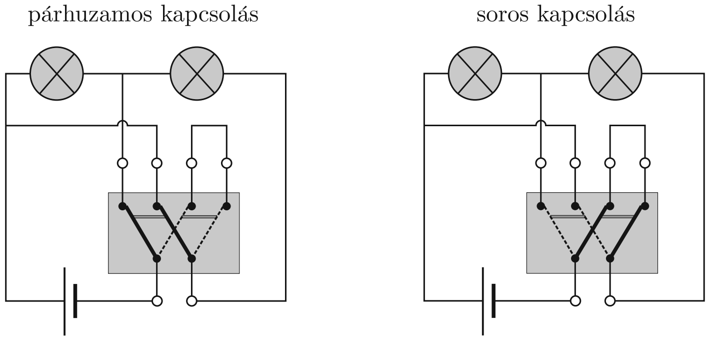
71 dolgozat érkezett. Helyes 57 megoldás, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 3 dolgozat.



G. 663. *Az* ábrán *két izzólámpa, egy zsebtelep és egy olyan kettős kapcsoló látható, amely egyszerre vált át két érintkezőt. Tervezzünk a megadott eszközökből olyan áramkört (vagyis rajzoljuk meg a vezetékeket), hogy a kapcsoló egyik állásában a két lámpa sorosan, a másik állásában párhuzamosan legyen bekötve!*

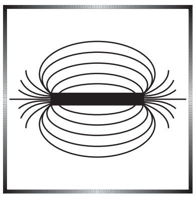
(*3 pont*)

Megoldás. Egy lehetséges megoldást mutat az *ábra*:



Hruby Lili (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. hibás 16 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5084. *Hogyan változik meg egy tükörre merőlegesen beeső fény hullámhossza, ha a tükör v sebességgel mozog a rá eső fénnyel azonos irányban?*

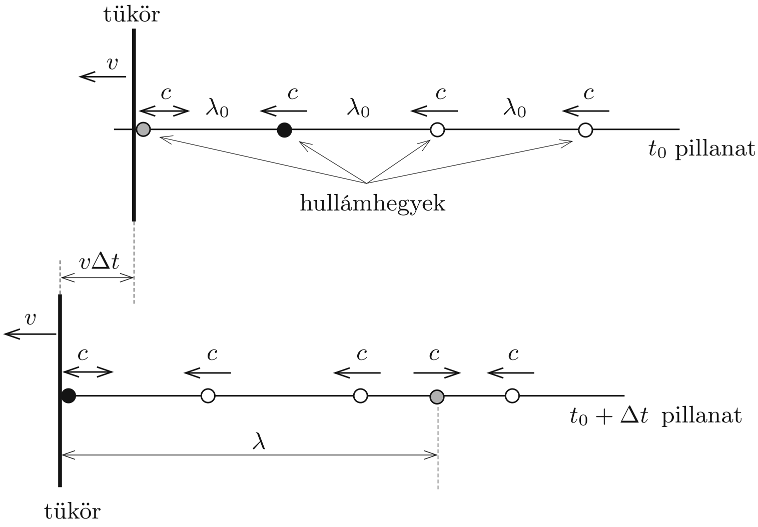
a) $v=150\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

b) $v=150\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Feltételezzük, hogy a fényforrás a választott koordináta-rendszerben áll, a tükör pedig állandó v sebességgel távolodik a fényforrástól. Legyen ekkor a fény eredeti hullámhossza λ_0, a viszavert fény hullámhossza pedig λ. A hullámhossz – definíció szerint – két szomszédos hullámhegy távolsága valamely időpillanatban.

Rajzoljuk le a balra mozgó tükör és a tükör felé jobbról közeledő hullámhegyek helyzetét egy olyan t_0 időpillanatban, amikor az egyik (szürkén jelölt) hullámhegy éppen eléri a tükröt (lásd az *ábra* felső részét). A következő (fekete körrel jelölt) hullámhely ekkor még λ_0 távolságnyira van a tükörtől.



A következő hullámhegy Δt idővel később éri el a tükröt. Ezalatt a tükör elmozdulása $v\Delta t$, így a fekete körrel jelölt hullámhegynek $c\Delta t = \lambda_0 + v\Delta t$ utat kell megtennie. Ezek szerint

$$\lambda_0 = (c - v)\Delta t. \tag{1}$$

Igaz továbbá, hogy Δt idő alatt az előző (szürke) hullámhegy $c\Delta t$ távolsággal mozdul el jobbra, tehát a feketén jelölt hullámhegytől

$$\lambda = (c + v)\Delta t \tag{2}$$

távolságra kerül. Ez a távolság éppen a visszavert fény hullámhossza.

A (2) és (1) egyenletek hányadosa:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{c+v}{c-v},$$

ez éppen a feladat kérdésére adott válasz.

a) Ha

$$v = 150\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}5 \cdot 10^{-6} c \ll c,$$

akkor $\lambda \approx \lambda_0$, tehát a fény hullámhossza a tükör mozgása miatt gyakorlatilag *nem változik*. A kicsiny változás mértéke:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2v}{c-v} \approx 2\frac{v}{c} = 1{,}0 \cdot 10^{-6}.$$

b) Amennyiben

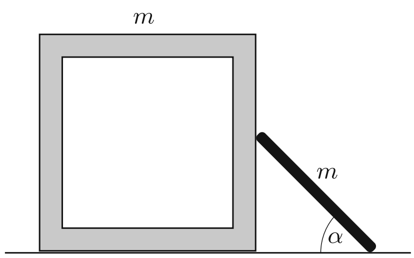
$$v = 150\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = \frac{c}{2},$$

a megváltozott hullámhossz:

$$\lambda = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\lambda_0 = 3\lambda_0.$$

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont)15 dolgozat.



P. 5090. *Vízszintes talajon egy m tömegű, kocka alakú doboz áll. A doboz egyik lapjának közepéhez egy ugyancsak m tömegű, vékony, homogén pálca támaszkodik. Kezdetben mindkét testet rögzítetten tartjuk. A pálca és a talaj által bezárt szög $\alpha = 45^\circ$.*

Mekkora gyorsulással indul el a doboz, ha a testeket elengedjük? (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Berke Martin,* Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium

Megoldás. A doboz és a rúd közötti nyomóerőt jelölje N_1, a talaj által a rúdra kifejtett erőt pedig N_2. Vízszintes irányban teljesül a lendületmegmaradás törvénye: a doboz és a rúd vízszintes irányú sebességének nagysága minden pillanatban megegyezik, és ezáltal a vízszintes gyorsulásuk is minden pillanatban azonos nagyságú (de ellenkező irányú). A rúd középpontjának függőleges gyorsulása a_y. Jelölje a doboz oldalhosszát ℓ, ekkor a rúd hossza $\sqrt{2}\frac{\ell}{2}$. Használjuk fel, hogy a rúd forgásának következtében a rúd felső vége a mozgás kezdeti szakaszában nem válik el a doboztól. A felső végpont vízszintes gyorsulása tehát a_x. A rúd szöggyorsulását jelölje β, a rúd végpontjainak a tömegközépponthoz viszonyított érintőleges (tangenciális) gyorsulását pedig a^* (a végpontok centripetális gyorsulása most még nulla, hiszen az indulás pillanata érdekes számunkra).

A következő összefüggéseket írhatjuk fel:

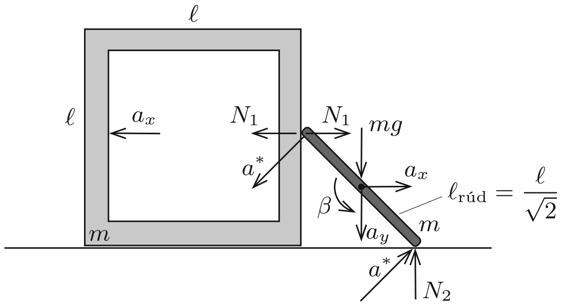
$$N_1 = ma_x, \qquad mg - N_2 = ma_y,$$

mivel a rúd a talajról nem emelkedik el:

$$\frac{a^*}{\sqrt{2}} = a_y,$$

a rúd dobozzal érintkező pontjára:

$$\frac{a^*}{\sqrt{2}} - a_x = a_x, \qquad a^* = \beta\frac{\ell}{2\sqrt{2}},$$



a rúd tömegközéppontjára:

$$\sum M = \Theta\beta \quad \to \quad N_2\frac{\ell}{4} - N_1\frac{\ell}{4} = \frac{m}{12}\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{4a^*}{\sqrt{2}\ell}.$$

Innen kezdve a további munka már csak egyenletrendezés. N_1-et és N_2-t kifejezhetjük a_x és a_y segítségével, ez utóbbiakat pedig a^*-gal. Mindezeket a forgást leíró egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$a^* = \frac{6\sqrt{2}}{13}g,$$

és végül a doboz kezdeti gyorsulására

$$a_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,a^* = \frac{3}{13}g$$

adódik.

Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

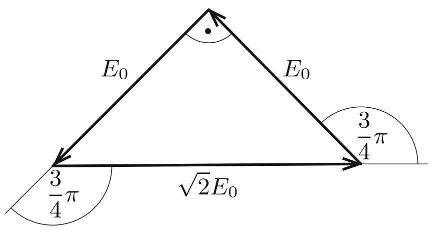
40 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 24 dolgozat.

P. 5097. *Egy átlátszatlan lapon három vékony rés található, a szomszédos rések távolsága d. A középső rés szélessége $\sqrt{2}$-ször nagyobb, mint a szélső két rés szélessége. A réseket a lap síkjára merőlegesen λ hullámhosszúságú lézernyalábbal világítjuk meg, a diffrakciós képet az L távolságra lévő ernyőn észleljük. A nulladrendű maximumtól milyen távolságra van az ernyőn az első nulla intenzitású hely? (Tegyük fel, hogy $\lambda \ll d \ll L$!)*

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. Az egyes résekből érkező fény (időben szinuszosan változó) elektromos terének amplitúdója a rés szélességével arányos. Ha a szélső résekből érkező hullám amplitúdója E_0, akkor a középső résből érkezőé $\sqrt{2}E_0$.

Az egyes résekből érkező hullámok között fáziseltolódás lép fel, ezt a váltóáramoknál megtanult forgóvektoros ábrázolással vehetjük figyelembe. Ha a középső résből származó $\sqrt{2}E_0$ nagyságú térerősségét választjuk referenciának, akkor a másik két rés járulékának a referenciához viszonyítva $\pm\Delta\varphi$ szöggel elforgatott, E_0 nagyságú térerősségvektor felel meg. ($\pm\Delta\varphi$ a középső és a szélső rések járuléka közötti fáziseltolódás.)



1. ábra

Nulla intenzitású hely ott alakul ki, ahol a három térerősségvektor eredője nulla, vagyis ez a három térerősség zárt vektorháromszöget alkot (*1. ábra*). A térerősségek nagyságából következik, hogy ez a háromszög derékszögű és egyenlő szárú, tehát

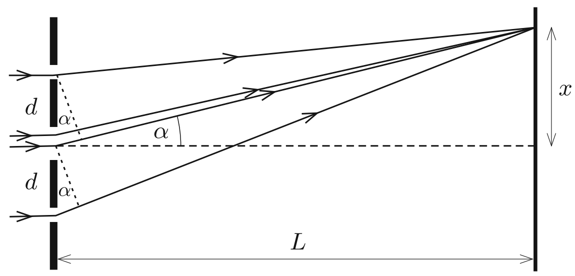
$$\Delta\varphi = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

Az átlátszatlan lap normálisához képest α szögben elhajló sugaraknál a szomszédos rések járuléka között az útkülönbség $d\sin\alpha$, tehát

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,d\sin\alpha$$

fáziskülönbség alakul ki (*2. ábra*). Ez akkor egyezik meg a már kiszámított $\frac{3}{4}\pi$-vel, ha

$$\sin\alpha = \frac{3}{8}\,\frac{\lambda}{d}.$$



2. ábra

Másrészt az L távolságban lévő ernyőn a nulladrendű maximumtól x távolságban lévő ponthoz tartozó elhajlási szögre fennáll, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{L}.$$

Mivel $\lambda \ll d$, $\sin\alpha \ll 1$, így

$$\frac{x}{L} = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha = \frac{3}{8}\,\frac{\lambda}{d},$$

vagyis a keresett távolság:

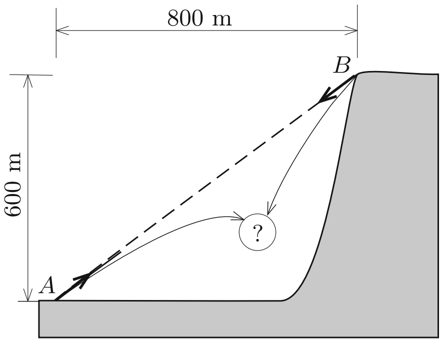
$$x = \frac{3}{8}\,\frac{\lambda L}{d}.$$

Hisham Mohammed Almalki (Rijád, Manarat Al-Riyadh School, 11. évf.)

5 dolgozat érkezett. Helyes Csépányi István, Elek Péter, Fiam Regina és Hisham Mohammed Almalki megoldása, kicsit hiányos (4 pont) Tran Quoc Dat dolgozata.

P. 5100. *Két ágyúval pontosan ugyanabban a pillanatban tüzelnek egymás felé az* ábrán *látható A és B pontból. Az A ágyú lövedékének torkolati sebessége* 40 m/s, *míg a B ágyúé* 60 m/s. *Eltalálják-e a lövedékek egymást? Ha igen, akkor hol és mikor? Ha nem, akkor hol csapódnak be a talajba?*

(4 pont) *Amerikai feladat*



Megoldás. Jelöljük a vízszintes elmozdulásokat x, a függőlegeseket pedig y indexekkel! Az AB egyenesnek a vízszintessel bezárt α szögére teljesül, hogy

$$\sin\alpha = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}.$$

A lövedékek vízszintes irányú sebessége a mozgás során nem változik, nagyságuk:

$$v_{Ax} = \frac{4}{5}v_A = 32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \qquad v_{Bx} = \frac{4}{5}v_B = 48\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az egymással szemben haladó lövedékek vízszintes irányú *relatív* sebessége 80 m/s, a találkozásig tehát

$$t_0 = \frac{800\mathrm{m}}{80\ \mathrm{m/s}} = 10\ \mathrm{s}$$

idő telik el; feltéve, hogy a találkozás egyáltalán létrejön. De mivel

$$y_A(t_0) = v_{Ay}t_0 - \frac{g}{2}t_0^2 \approx -250\ \mathrm{m} < 0,$$

a lövedékek nem találkozhatnak a levegőben, mert mindkettő már korábban leesik a földre.

A földet érés helye és időpontja a függőleges irányú mozgásra vonatkozó összefüggésből kapható meg. A kezdősebességek:

$$v_{Ay} = \frac{3}{5}v_A = 24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \qquad v_{By} = \frac{3}{5}v_B = 36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

így az A ágyú lövedéke

$$t_A = \frac{2v_{Ay}}{g} \approx 4{,}9\ \mathrm{s}$$

ideig mozog és, és az ágyútól

$$s_A = v_{Ax} t_A \approx 157 \text{ m}$$

távolságban csapódik a talajba.

Hasonló módon kapjuk a B lövedék mozgásának idejét:

$$600 \text{ m} = v_{By} t_B + \frac{g}{2} t_B^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad t_B \approx 8{,}0 \text{ s.}$$

A becsapódás távolsága az ágyútól:

$$s_B = v_{Bx} t_B \approx 384 \text{ m.}$$

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 10. évf.) és
Tran Quoc Dat (Furen International School, Singapore, 12. évf.)

86 dolgozat érkezett. Helyes 54 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 18, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 387. Vágjunk ketté egy közelítőleg gömb alakú narancsot, majd az egyik „félgömböt” tegyük egy változtatható hajlásszögű lejtőre úgy, hogy a domború felület érintkezzen a lejtővel. A lejtő felülete legyen annyira érdes, hogy a félgömb ne csússzon meg rajta. Növeljük a hajlásszöget egészen addig, amíg a félgömb megdőlve még egyensúlyban marad a lejtőn. Készítsünk az elrendezésről fényképet! Mérjük meg a maximális hajlásszöget, és szerkesszük meg a félgömb súlypontjának helyét!

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

G. 673. Egy téglatest alakú akváriumot lassan feltöltünk vízzel. Hányszor nagyobb nyomóerő hat a teli akvárium egy-egy oldalfalára ahhoz képest, mintha csak egyharmadáig volna feltöltve?

(*3 pont*)

G. 674. Budapest és Veresegyház között munkanapokon kétféle vonat közlekedik: az egyik személy, a másik gyorsított személy. Internetes menetrend (pl. `elvira.mav-start.hu`) alapján állapítsuk meg mindkét járat átlagsebességét! Hogyan változnak az átlagsebességek, ha a vonatnak a menetrendtől eltérően 10 percig várakoznia kell a szemből érkező, késésben lévő ellenvonatra?

(*3 pont*)

G. 675. Egy síktükröt fektetünk a vízszintes padlóra, továbbá felette is elhelyezünk egy vele szembenéző síktükröt, amelynek a közepén egy fekete folt van. A felső tükröt elengedjük, ami így g gyorsulással szabadesésbe kezd. Mekkora és milyen irányú a folt tükörképeinek gyorsulása?

(*4 pont*)

G. 676. 2019. január 21-én hajnalban Magyarországról jól látható teljes holdfogyatkozás volt, ami valamivel több, mint egy órán át volt élvezhető. Mitől függ, hogy mennyi ideig tart a holdfogyatkozás teljességi fázisa?

(*4 pont*)

P. 5132. Gépkocsival útnak indulunk. Az autópálya elejére érve a gépjármű sebességét és az indulástól számított átlagsebességét mérő készülék kijelzőjén 37 km/h látható. Ettől kezdve a legnagyobb megengedett sebességgel (130 km/h) haladunk.

a) Adjuk meg, hogyan változik az átlagsebesség az idő függvényében! Milyen körülmények befolyásolják ezt a függvényt?

b) Mennyi idő múlva fogjuk azt látni, hogy az – egész értékre kerekített – átlagsebességünk 130 km/h?

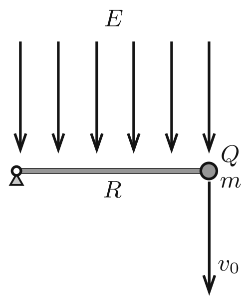
(*4 pont*) Közli: *Härtlein Károly,* Budapest

P. 5133. Egy állócsigán átvetett fonál végeire m tömegű testeket rögzítünk. Az egyik test alá ℓ hosszú fonálon még egy m_1 tömegű testet akasztunk, így az m_1 tömegű test a talajtól h magasságban lesz. A rendszert elengedve, mennyi idő telik el a két test leérkezése között?

Adatok: $m = 2$ kg, $m_1 = 1$ kg, $\ell = 2$ m, $h = 3$ m.

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5134. Igen vékony, elhanyagolható tömegű, $R = 0{,}64$ m hosszú rúd egyik vége vízszintes tengelyhez csatlakozik, a másik végén egy $m = 5$ g tömegű, $Q = 6\cdot 10^{-7}$ C töltésű gömböcske van rögzítve. Az egész szerkezetet függőlegesen lefelé irányuló, $E = 2\cdot 10^5$ V/m erősségű homogén elektromos térben helyezzük el. A rudat az *ábra* szerint vízszintes helyzetbe hozzuk.



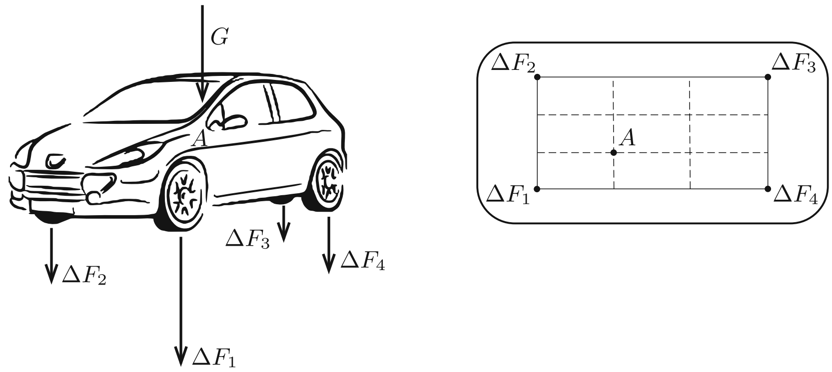
a) Mekkora függőlegesen lefelé mutató v_0 sebességet kell adnunk a gömböcskének, hogy miután a rúd 3/4 fordulatot megtéve megakad, és egyben megszűnik a gömböcske rögzítése, további mozgása során visszakerüljön a kiindulási pontjába?

b) Mekkora szöget zár be a vízszintessel a sebessége, amikor áthalad ezen a ponton?

c) Mekkora a kiindulási helyre való érkezési és indulási sebességek nagyságának aránya?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5135. Vízszintes talajon álló autóba beszálló, $G = 840$ N súlyú vezető tömegközéppontja az *ábrán* látható A pontba kerül. (A méreteket az ábra jobb oldali része felülnézetből, méretarányosan mutatja. Az A pont a kerekek által meghatározott téglalapban a bal első és a jobb hátsó kereket összekötő átló első harmadolópontja.) Mennyivel nő meg az egyes kerekekre ható nyomóerő a vezető nélküli esethez képest? A kerekek rugói egyformák, és követik a Hooke-törvényt.



(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5136. A és B oldalú, téglalap alakú kép két felső sarkához egy fonál két végét rögzítjük, és egy szögre akasztjuk. Legalább milyen hosszú legyen a fonál, hogy a kép stabilan a szimmetrikus helyzetben maradjon? A szög és a fonál közötti súrlódás elhanyagolható, és a kép tömegközéppontja egybeesik a téglalap geometriai középpontjával.

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

P. 5137. Egy 31 900 m^3 térfogatú, hidrogénnel töltött léghajó a vele azonosan 20 °C hőmérsékletű és 95,3 kPa nyomású száraz levegőben áll.

a) Mekkora a levegő felhajtóereje?

b) Mekkora lenne a felhajtőerő 70% relatív páratartalmú, ugyanakkora hőmérsékletű és nyomású levegőben?

(*4 pont*) *Nagy Béla* (1881–1954) feladata

P. 5138. Víz lehűlését vizsgáljuk elhanyagolható hőkapacitású, egyforma edényekben. A víz kezdeti hőmérséklete mindegyik esetben 80 °C, a célérték 40 °C. A környezet hőmérséklete 30 °C, ami a mérések során nem változik.

(*i*) Elsőnek azt mérjük, hogy 2 liter 80 °C hőmérsékletű víz t_0 idő alatt hűl le 40 °C-ra.

(*ii*) Másodszor csak addig várunk, amíg a kiindulási 2 liter 80 °C hőmérsékletű víz 50 °C-ra hűl le (ez t_1 időt vesz igénybe), majd gyorsan kiöntünk belőle 1 litert, aminek a helyére 1 liter, 30 °C-os vizet öntünk.

(*iii*) Ezután úgy ismételjük meg a mérést, hogy a kezdeti 2 liter 80 °C-os vízből azonnal kimerünk 1 litert, aminek a helyére 1 liter 30 °C-os vizet öntünk. Az így keletkezett 2 literes keverék t_2 idő alatt éri el a kívánt 40 °C-ot.

(*iv*) Végezetül a kezdeti 2 liter 80 °C-os vizet hagyjuk lehűlni 60 °C-ra, majd nagyon gyorsan 1 litert kiöntünk belőle, helyére 1 liter 30 °C-os vizet juttatunk, és hagyjuk a keveréket 40 °C-ra hűlni. Ekkor a teljes hűlési idő t_3.

Melyik a leglassabb és melyik a leggyorsabb hűtési módszer? Fejezzük ki t_0 segítségével t_1-et, t_2-t és t_3-at! Feltételezhetjük, hogy egy test hőmérséklet-változásának üteme egyenesen arányos a test és a környezete közötti hőmérséklet-különbséggel, azaz alkalmazható a Newton-féle lehűlési törvény.

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5139. Egyszínű fénysugár érkezik a vízben lévő, 75°-os törőszögű üvegprizma határfelületéhez 45°-os beesési szöggel, majd a kétszeres törést követően kilép belőle.

a) Hogyan és hány százalékkal változik a fény hullámhossza, amikor az üvegből a vízbe kilép?

b) Mekkora szöggel térül el a kétszer megtört fénysugár a beeső fénysugár irányához képest?

c) Mekkora beesési szög esetén nem lépne ki a fénysugár a prizmából a második határfelületre érkezés után?

Az üveg abszolút törésmutatója $\frac{3}{2}$, a vízé $\frac{4}{3}$.

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

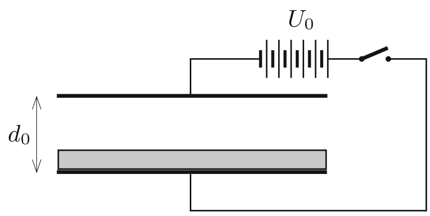
P. 5140. Newton-gyűrűket állítunk elő plánparalel üveglemezre helyezett síkdomború üveglencsével, átmenő fényben. Az üveg törésmutatója 1,5, a lencse fókusztávolsága 2,7 méter, az alkalmazott fény hullámhossza 0,6 μm.

a) Mekkora a negyedik világos gyűrű sugara?

b) Hogyan változik meg a gyűrűrendszer, ha a lencsét kicsit eltávolítjuk a plánparalel lemeztől?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5141. Az *ábrán* látható, vákuumban lévő síkkondenzátor lemezei vízszintesek, távolságuk $d_0 = 4$ cm. Az alsó lemezre egy $d_0/4$ vastagságú alumíniumlemezt helyezünk, és a kondenzátorra nagyfeszültséget kapcsolunk.



a) Mekkora legyen U_0, hogy a lemez felemelkedjék?

b) Adott U telepfeszültségnél mekkora vastagságú alumíniumlemez emelkedhet fel a d_0 lemeztávolságú síkkondenzátor alsó fegyverzetéről?

c) Van-e olyan feszültség, amely mellett biztosan megemelkedik az alumíniumlemez, akármekkora (d_0-nál kisebb) a vastagsága?

(Feltételezzük, hogy az alumíniumlemez mindvégig vízszintes marad. A kondenzátor fegyverzeteinek mérete sokkal nagyobb d_0-nál, a széleffektusok elhanyagolhatóak.)

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

P. 5142. Egy M tömegű űreszköz r sugarú körpályán, állandó v_0 nagyságú sebességgel kering a Nap körül, mozgását csak a Nap gravitációs hatása befolyásolja. Az űreszközt a Földről arra utasítják, hogy indítson útjára egy teljesen fekete, gömb alakú szondát, amelynek tömege m, sugara R, anyagának sűrűsége pedig ϱ. A kibocsátás után a szonda ugyanazon a pályán kering a Nap körül, mint a kibocsátó. Tegyük fel, hogy anyaga jó hővezető, így a gömb hőmérséklete pályára állása után állandó, $T = 180$ K. A Nap sugárzását tekintsük egy $T_\odot = 5778$ K hőmérsékletű abszolút fekete test sugárzásának! A Nap tömege $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, sugara $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8$ m, luminozitása (összes sugárzási teljesítménye) pedig $L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W.

a) Határozzuk meg számszerűen az űreszköz és a szonda pályájának r sugarát csillagászati egységben kifejezve! 1 CSE $= 1{,}496 \cdot 10^8$ km.

b) Számítsuk ki a gömbre eső fotonok által a szondára kifejtett erő F_f nagyságát! A választ r, R, $L_\odot$ és c függvényében adjuk meg, ahol c a fénysebesség vákuumban.

c) Határozzuk meg a gömb v' sebességének nagyságát, ha mozgását csak a Nap gravitációs hatása és a sugárnyomás befolyásolja! A választ az r, R, $L_\odot$, ϱ, v_0 és c mennyiségekkel kifejezve adjuk meg!

Azért, hogy a szonda az r sugarú körpályára kerülhessen, kicsit le kell lassítani. Ezt úgy érik el, hogy az űreszköz mozgásával ellentétes irányban, ahhoz képest Δv nagyságú sebességgel indítják. Az űreszköz a saját mozgásának stabilitása érdekében legfeljebb $\Delta p_{\max} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$ nagyságú impulzust adhat át a szondának.

d) Számítsuk ki numerikusan a gömb sugarának legnagyobb ($R_{\max}$) értékét, amely mellett az űreszköz mozgása még stabil marad! Tegyük fel, hogy $m \ll M$ és $\Delta v = v_0 - v' \ll v_0$! (Felhasználhatjuk, hogy $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, ha $|x| \ll 1$.) A hiányzó adatokra adjunk észszerű nagyságrendi becslést!

(*6 pont*) *Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia* csehországi válogatóversenyének feladata

❄

Beküldési határidő: 2019. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 5. May 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 288): **Exercises up to grade 10: C. 1546.** Find the integer solutions of the equation $(x-8)(x-10)=2^y$. (*American competition problem*) **C. 1547.** Let K denote the midpoint of side EF in a regular hexagon $ABCDEF$. Find the point L on the broken line $ABCD$ for which the area of triangle AKL is $\frac{2}{5}$ of the area of the hexagon. (Based on a problem by *T. Bakos*) **Exercises for everyone: C. 1548.** Ann selects a few fields of a 3×3 table. Then row by row and column by column, she tells Bill how many selected fields there are in that row or column. In how many different ways may Ann select her fields so that Bill cannot find out from the given information which fields she selected? **C. 1549.** Let F be the midpoint of a line segment AB, and let Z be an arbitrary point on line segment AF. Draw a perpendicular to AB at F, and mark a distance $FX=FA$ on it. Draw another perpendicular to AB at B, and mark a distance $BY=AZ$ on it such that X and Y lie on the same side of line AB. What may be the size of the angle XZY? (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **C. 1550.** Find all positive integers n satisfying $n\cdot(1!+2!+3!+\dots+n!)=(n+1)!$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1551.** In a triangle ABC, the lengths of medians AD and BE are 3 cm and 6 cm, respectively, and the area of the triangle is $3\sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2$. Determine the length of the third median, given that it is different from the other two. **C. 1552.** Prove that if $0<a<1$ and $0<b<1$ then $\log_a \frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\geqslant 1$. (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza)

New exercises – competition B (see page 289): **B. 5030.** Prove that every integer greater than 1 can be represented as a sum of numbers of the form $2^p\cdot 3^q$ greater than 1 such that no term of the sum is a divisor of another term. (For example, $23=9+8+6$, $11=9+2$ or $12=12$.) (*4 points*) (A problem of *Paul Erdős*) **B. 5031.** Let F be a point on the extension of side AD of parallelogram $ABCD$ beyond vertex D. Line segment BF intersects side CD at G and diagonal AC at E. Show that $\frac{1}{BE}=\frac{1}{BG}+\frac{1}{BF}$. (*3 points*) **B. 5032.** In the interior of an isosceles triangle, what is the locus of points for which the distance from the base is the geometric mean of the distances from the legs? (*4 points*) **B. 5033.** The $\binom{n+1}{2}$ numbers $a_{1,1},a_{1,2},\dots,a_{1,n},a_{2,1},a_{2,2},\dots,a_{2,n-1},\dots,a_{k,1},\dots,a_{k,n+1-k},\dots,a_{n,1}$ are called an inverted Pascal pyramid of order n if $a_{k,j}=a_{k-1,j}+a_{k-1,j+1}$ for an arbitrary $2\leqslant k\leqslant n$ and $1\leqslant j\leqslant n+1-k$. An example of an inverted Pascal pyramid of order 3 is shown below:

$$\begin{array}{ccccc} & & a_{3,1}=2 & & \\ & a_{2,1}=1 & & a_{2,2}=1 & \\ a_{1,1}=-2 & & a_{1,2}=3 & & a_{1,3}=-2 \end{array}$$

Let s_k denote the sum of the numbers in row k of the pyramid, that is, $s_k=a_{k,1}+a_{k,2}+\dots+a_{k,n+1-k}$. A pyramid is said to have a sign change in row k $(k>1)$ if $s_{k-1}\cdot s_k<0$. Given the value of n, what is the largest possible k if a pyramid of order n has sign changes in rows 2, 3, ..., k, but no sign change in row $(k+1)$? (In the example above, $k=2$ since $s_1\cdot s_2=-2<0$ but $s_2\cdot s_3=4>0$.) (*5 points*) **B. 5034.** Prove that if none of the angles α, β, γ, δ of a convex quadrilateral are right angles then $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\cdot\tan\delta(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta)$. (*3 points*) (A problem of *J. Surányi*) **B. 5035.** The edges of a complete graph on $n\geqslant 8$ vertices are coloured in two colours. Prove that the number of cycles formed by four edges of the same colour is more than

$\frac{(n-5)^4}{64}$. (*6 points*) (Based on a problem proposed by *M. Pálfi,* Budapest) **B. 5036.** From a point M, two tangents are drawn to a right-angled hyperbola of centre O. One tangent intersects an asymptote at point P, and the other tangent intersects the other asymptote at point Q. Prove that line OM bisects the line segment PQ. (*5 points*) **B. 5037.** A polyhedron P is divided into the smaller polyhedra $P_1, \ldots, P_k$ and also divided into the smaller polyhedra $Q_1, \ldots, Q_k$ such that the polyhedra P_i and Q_i are congruent for all $i = 1, \ldots, k$. Show that it is possible to select some points in the interior of P such that there are the same number of points (at least one) in the interior of polyhedra P_i and Q_i for all $i = 1, \ldots, k$. (The position of each polyhedron is fixed in the space.) (*6 points*)

New problems – competition A (see page 291): **A. 752.** Let k, s and n be positive integers such that $s < (2k+1)^2$, and let R be the set of lattice points (x, y) in the plane, satisfying $1 \leqslant x, y \leqslant n$. On the grid R we perform the following procedure. Initially, we colour one point of R green; all other points in R are coloured white. On every move, we choose a square S, consisting of $2k \times 2k$ lattice points in such a way that the center of S is green and it contains at least s white points; then we re-colour s white points of S to green. We repeat this step as long as there is a suitable square S. We say that the number s is *k-sparse*, if there exists a positive real number C such that, for every n, for every choice of the initial green point, and for every valid sequence of moves, the total number of green points in the grid cannot exceed Cn. Determine the least k-sparse positive integer s in terms of k. (Proposed by: *Nikolai Beluhov,* Stara Zagora, Bulgaria) **A. 753** Let a be an integer, and let p be a prime divisor of $a^3 + a^2 - 4a + 1$. Show that there is an integer b such that $p \equiv b^3 \pmod{13}$. **A. 754** Let P be a point inside the acute triangle ABC, and let Q be the isogonal conjugate of P. Let L, M and N be the midpoints of the shorter arcs BC, CA and AB of the circumcircle of ABC, respectively. Let X_A be the intersection of ray LQ and circle PBC, let X_B be the intersection of ray MQ and circle PCA, and let X_C be the intersection of ray NQ and circle PAB. Prove that P, X_A, X_B and X_C are concyclic or coincide. (Proposed by: *Gustavo Cruz,* São Paulo)

Problems in Physics

(see page 312)

M. 387. Cut an approximately spherical orange into two parts and place one of the two "hemispheres" on a slope, with the curved part of the orange touching the surface of the slope. Use a slope whose angle of elevation can easily be changed, and the surface of which is rough enough so the orange does not slip on it. Increase the angle of elevation of the slope, until the orange stays at rest in a slant position. Take a picture of the orange on the slope. Measure the maximum angle of elevation of the slope, and construct the centre of mass of the hemisphere.

G. 673. A cuboid-shaped aquarium is slowly filled with water. By what factor the force exerted on a wall of the cuboid is greater when the aquarium is fully filled with water than when the aquarium is filled only to one third of its height? **G. 674.** Between Budapest and Veresegyház there are two types of trains: passenger trains and fast passenger trains. Determine the average speeds of both types of trains using a railway timetable available on the internet (for example `elvira.mav-start.hu`). How will the average speeds of the trains change if the train has to wait ten minutes for another train coming from the opposite direction? **G. 675.** A plane mirror is placed horizontally on a horizontal floor, and above it another plane mirror, facing towards the first one is placed as well. There is a small black spot in the middle of the top mirror. The mirror at the top is released and begins to fall at an acceleration of g. What are the magnitudes and the directions of the acceleration of the images of the spot? **G. 676.** At dawn on 21 January 2019 there was a total eclipse of the Moon, which could be seen from Hungary, and was observable for more than an hour. What factors does the length of the total eclipse of the Moon depend on?

P. 5132. We set off on a journey by car. The meter, which shows the average speed of the car from the start of the journey, reads 37 km/h when we reach the motorway. From that time onward, we travel at the greatest allowed speed (130 km/h). *a*) Determine how the average speed of the car changes as a function of time. What circumstances affect this function? *b*) How much time elapses until the value of the average speed – rounded to the nearest integer – is going to be 130 km/h? **P. 5133.** Objects of mass m are attached to the ends of a thread wound through a standing pulley. Below one of the objects another object of mass m_1 is hung by means of a thread of length ℓ, so the object of mass m_1 will be at a height of h, measured from the ground. After releasing the system, how much time elapses between the instants when the two objects hit the ground? *Data:* $m = 2$ kg, $m_1 = 1$ kg, $\ell = 2$ m, $h = 3$ m. **P. 5134.** One end of a very thin negligible-mass rod of length $R = 0.64$ m is attached to a horizontal axle, whilst to its other end a small sphere of mass $m = 5$ g and of charge $Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C is fixed. The whole structure is placed into vertically downward uniform electric field of strength $E = 2 \cdot 10^5$ V/m. The rod is put into the horizontal position shown in the *figure*. *a*) What vertically downward initial speed v_0 should the small sphere be given in order that after 3/4 of a complete revolution the rod gets stuck, and at the same time the small sphere is ceased to be fixed to the rod, and flies back exactly to its initial position? *b*) What is the angle between the velocity of the small sphere and the horizontal, when the sphere passes its initial position? *c*) What is the ratio of the speed of the sphere when it passes its initial position to that of its initial value? **P. 5135.** The centre of mass of the driver of weight $G = 840$ N, when he is sitting in the car, is at point A as shown in the *figure*. (The scale figure on the right shows the top view of the car. Point A is the first left trisecting point of the rectangle determined by the wheels of the car.) By what amount are the magnitudes of the forces exerted on the wheels of the car increased when the driver is sitting in the car compared to the case when he is not in the car? The springs at the wheels are alike and they all obey Hooke's law. **P. 5136.** Both ends of a thread are attached to the top two vertices of a rectangular picture of sides A and B, and then the picture is hung to a peg. What should the least length of the thread be in order that the picture remain in a stable symmetric position? Friction between the peg and the thread is negligible, and the centre of mass of the picture coincides with the geometric centre of the rectangle. **P. 5137.** The gasbag of an airship of volume 31 900 m^3 is filled with hydrogen and is staying at rest in air. The values of the temperature and the pressure of the ambient dry air are the same as those of the hydrogen in the gasbag: the temperature is 20 °C and the pressure is 95.3 kPa. *a*) Calculate the buoyant force of the air. *b*) What would the value of the buoyant force be if the ambient air had 70% relative humidity, at the same pressure and at the same temperature? **P. 5138.** The cooling of water is investigated in alike containers of negligible heat capacity. In each case the initial temperature of the sample of water is 80 °C, and the aimed final temperature is 40 °C. The temperature of the environment is 30 °C, which does not change during the measurements. (*i*) Firstly it was measured that 2 litres of water cooled from 80 °C to 40 °C in a time of t_0. (*ii*) Secondly, we waited only until the 2 litres of water initially having a temperature of 80 °C cooled to a temperature of 50 °C (which took a time of t_1). Then 1 litre of water was quickly poured out and was replaced with 1 litre of water at a temperature of 30 °C. (*iii*) Then the measurement was repeated such that 1 litre of the initial 2 litres of water at a temperature of 80 °C was poured out and immediately replaced by 1 litre water at a temperature of 30 °C. The mixture reached the temperature of 40 °C in a time of t_2. (*iv*) Finally the 2 litres water of initial temperature 80 °C, was left to cool to 60 °C, and then quickly 1 litre of water was poured out and replaced by 1 litre of water of temperature 30 °C, and then the mixture was left to cool to a temperature of 40 °C. The total time of cooling in this case was t_3. Which is the quickest and which is the slowest way of cooling? Express the times of t_1, t_2 and t_3 in terms of t_0. It can be assumed that the rate of cooling of an object is proportional to the temperature difference between the object and the environment, that is Newton's law of cooling can be applied. **P. 5139.** A monochromatic light beam enters into a glass prism of vertex angle 75°. The prism is in water, and the angle of incidence of the light beam is 45°. The light beam emerges from the glass after two refractions. *a*) How and by what percent does the wavelength of the light change when the light emerges from the glass and enters into the water? *b*) By what angle does the direction of the light beam which emerges from the glass after the two refractions change with respect to that of the incident ray? *c*) At what angle of incidence would the light beam not emerge from the prism at the second boundary? The refractive index of glass is $\frac{3}{2}$, and that of the water is $\frac{4}{3}$. **P. 5140.** Newton's rings are created by a plano-convex lens placed to a plan-parallel glass sheet illuminated by light of wavelength 0.6 μm. The refractive index of glass is 1.5, the focal length of the lens is 2.7 m. *a*) What is the radius of the fourth bright ring? *b*) How will the (dark and bright) ring pattern change if the lens is moved a bit further from the plan-parallel glass sheet? **P. 5141.** The plates of a parallel-plate condenser shown *in the figure* are horizontal and they are at a distance of $d_0 = 4$ cm from each other. The condenser is in vacuum. An aluminium sheet of width $d_0/4$ is placed on the lower plate, and high voltage is connected to the condenser. *a*) What should the value of U_0 be in order that the sheet rise? *b*) At a given applied voltage of U what is the width of the aluminium sheet that can rise from the lower plate of the condenser of plate distance d_0? *c*) Is there a voltage value at which the sheet surely rises, independently of the width of the sheet (provided that it is less than d_0)? (Assume that the aluminium sheet remains horizontal all the time. The sides of the condenser plates are much greater than d_0, and finite-size effects are negligible.) **P. 5142.** A spacecraft of mass M revolves around the Sun along a circular path of radius r, at a constant speed of v_0. Its motion is affected only by the gravity of the Sun. Scientists on Earth intend to launch an absolutely black and perfectly spherical probe from the spacecraft. The radius of the probe is R, its mass is m, and it is made of some material of density ϱ. The sphere is intended to be put to a circular trajectory of radius r (same as for the mother spacecraft) around the Sun. Assume that the sphere conducts heat sufficiently well so that it is able to maintain uniform temperature (which we denote by T) and that this temperature stabilises at $T = 180$ K after the launch. Assume that the Sun is a black body of temperature $T_\odot = 5778$ K, its mass is $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, and its radius is $R_\odot = 6.96 \cdot 10^8$ m. The value of the solar luminosity to be used throughout this question is $L_\odot = 3.83 \cdot 10^{26}$ W. *a*) Find the value of r in astronomical units (1 AU $= 1.496 \cdot 10^8$ km). *b*) Find the magnitude of the force F_r, which is the force exerted on the sphere by the radiation. Write your answer in terms of r, R, $L_\odot$ and c, where c is the speed of light in vacuum. *c*) Find the speed of the sphere v' when the radius of its orbit is r. Write your answer in terms of r, R, $L_\odot$, ϱ, v_0 and c. You should assume that the motion of the sphere is affected only by the gravity of the Sun and the radiation pressure discussed in question *b*). Notice that in order to maintain the sphere's circular orbit at radius r, we have to slow it down a little. This can be achieved be launching it opposite to the direction of spacecraft's motion at a speed Δv relative to the spacecraft. Also, in order to avoid dangerous destabilisation of the spacecraft's motion, the maximum admissible impulse the spacecraft can impart on the sphere is $\Delta p_{\max} = 1$ kg m s^{-1}. *d*) Find (numerically) the maximum radius $R_{\max}$ of the sphere, at which any dangerous destabilisations of the spacecraft during the launch can be avoided. Assume that $m \ll M$ and $\Delta v = v_0 - v' \ll v_0$. Use the approximation $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, if $|x| \ll 1$. For the missing data give reasonable estimations.