majd (3) és (4) szorzatából az a oldal hossza kifejezhető:

$$\frac{p_{ab}p_{ac}}{p_{bc}} = \frac{mg}{ac} \cdot \frac{c}{a}, \qquad \text{ahonnan} \qquad a = \sqrt{\frac{p_{bc}}{p_{ab}p_{ac}}\, mg}.$$

Hasonlóképpen adódik a másik két oldal hossza is:

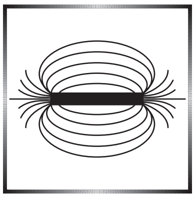
$$b = \sqrt{\frac{p_{ac}}{p_{ab}p_{bc}}\, mg} \qquad \text{és} \qquad c = \sqrt{\frac{p_{ab}}{p_{ac}p_{bc}}\, mg}.$$

A tégla keresett sűrűsége tehát

$$\varrho = \frac{m}{abc} = \sqrt{\frac{p_{ab}p_{bc}p_{ac}}{mg^3}} = 1852\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Hruby Lili (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.)

94 dolgozat érkezett. Helyes 74 megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 10, hiányos (2 pont) 5, hibás 2, nem versenyszerű 3 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5058. *Egy hóbortos alaszkai vállalkozó különleges kalandparkot működtet. Egy nagyon magas jéghegy belsejében csavarvonal alakú bobpályát épít. A csavarvonal tengelye függőleges, átmérője d, menetemelkedése h. A pálya a hegy tetejétől indul, és a hegy aljánál egy rövid, súrlódásmentesnek tekinthető kanyar után s hosszúságú, vízszintes, egyenes szakaszban végződik. A pálya nagyon hosszú (az utasok számára „végtelen hosszúnak” tűnik), és a bobok (amelyeken sem kormány, sem fék nincsen) éppen a vízszintes szakasz végén állnak meg. (Az egyszerűség kedvéért tekintsük a bobokat tömegpontoknak.)*

a) Mekkora a csúszási súrlódási együttható a bob fémteste és a jég között?

b) Mekkora a bobok legnagyobb sebessége?

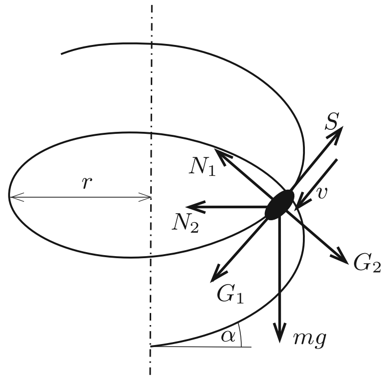
Adatok: $d = 10$ m, $h = 1{,}5$ m, $s = 270$ m.

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A csavarvonal alakú pályán lecsúszó bob sebessége fokozatosan növekszik, emiatt egyre nagyobb lesz a járművet a pályához szorító „nyomóerő”, és ezzel arányosan növekszik a súrlódási erő is. Az állandósult (maximális) sebességnek megfelelő állapotban (amit a bob természetesen nem ér el, csak megközelíti azt) a súrlódási erő megegyezik a nehézségi erő érintő irányú komponensével, a „mozgatóerővel”.

Jelöljük a csavarvonal érintőjének a vízszintes síkkal bezárt szögét α-val! Mivel a csavarvonal vízszintes vetületének sugara $r = d/2$, a görbe meredeksége:

(1) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi}, \quad \text{ebből} \quad \alpha = 2{,}73^\circ.$$



1. ábra

A mozgatóerő (ha a bob és az utasának együttes tömege m) az mg nagyságú nehézségi erőnek a mozgás irányába eső összetevője

(2) $$G_1 = mg\sin\alpha,$$

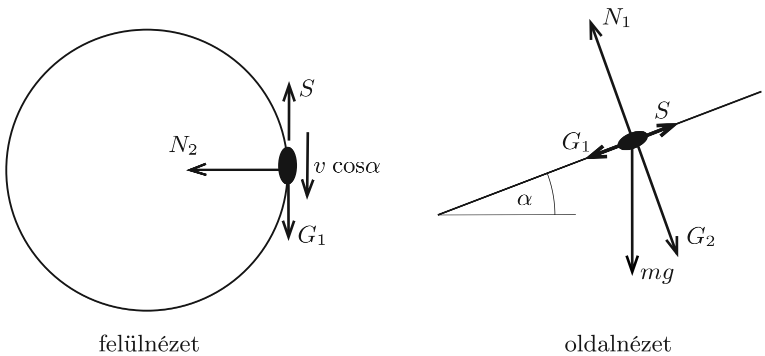
a pálya érintőjére merőleges komponense pedig

(3) $$G_2 = mg\cos\alpha.$$

Jelöljük a jégpálya által a bobra kifejtett nyomóerőt $\boldsymbol{N}$-nel, aminek a pálya érintősíkjába eső, de az érintőre merőleges komponense N_1, az erre merőleges (a csavarvonal függőleges tengelye felé mutató) összetevője pedig N_2. A súrlódási erő:

(4) $$S = \mu|\boldsymbol{N}| = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}.$$

Megjegyzés. Feltételezzük, hogy a jéghegyben az alagút kör keresztmetszetű, így a kanyarodó bob a szabadtéri pályákhoz hasonlóan „be tud állni" a pálya megfelelő részébe.



2. ábra

A mozgásegyenletek (a *2. ábrán* látható irányokban):

(5) $$G_1 - S = 0,$$

(6) $$G_2 - N_1 = 0,$$

(7) $$N_2 = \frac{m(v_{\max}\cos\alpha)^2}{r}.$$

Felírhatjuk még a munkatételt a vízszintes pályaszakaszon történő fékeződésre:

$$\mu m g \cdot s = \frac{1}{2} m v_{\max}^2. \tag{8}$$

Az (1)–(8) összefüggésekből algebrai átalakítások után μ-re a következő (hiányos) negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$16 \frac{s^2 \cos^4 \alpha}{d^2} \mu^4 + \mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,$$

ami $x = \mu^2$-re nézve másodfokú. Az adatok behelyettesítése után ezt kapjuk:

$$11\,611{,}14\, x^2 + 0{,}997\,7\, x - 0{,}002\,27 = 0.$$

Ennek pozitív gyöke: $x = 4 \cdot 10^{-4}$, ahonnan a csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}02$. A bobok legnagyobb sebessége (8)-ból számolható:

$$v_{\max} = \sqrt{2\mu g s} = 10{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 37\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn. 10. évf.)
dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–3 pont) 17 dolgozat.

P. 5059. *Mennyi idő alatt esik be egy test a Napba, ha a Naptól* 50 CSE *távolságból, kezdősebesség nélkül indul? Mennyi idő alatt teszi meg a pályája felét?*

(*5 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata nyomán

Megoldás. A Napba esést felfoghatjuk egy elfajult (elhanyagolhatóan kicsi kistengelyű) ellipszispályán való keringésként. A Napba esés ideje a T keringési idő fele. Kepler III. törvénye szerint a $2a$ nagytengelyű ellipszisnél

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{állandó} = 1\ \frac{\text{év}^2}{\text{CSE}^3}.$$

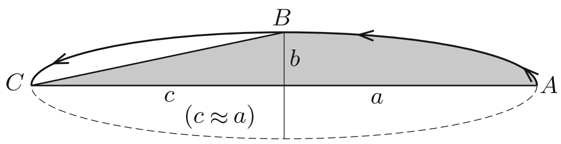
(Az állandó nagyságát a Föld adataiból kaptuk meg.)

Az 50 CSE távolságból a Napba eső test mozgásának ideje megegyezik az $a = 25$ CSE félnagytengelyű ellipszis menti mozgás keringési idejének felével:

$$T_{\text{esés}} = \frac{1}{2} \sqrt{1\ \frac{\text{év}^2}{\text{CSE}^3} \cdot (25\ \text{CSE})^3} = 62{,}5\ \text{év}.$$

Kepler II. törvénye szerint az *ábrán* látható $A \to B$ és $A \to C$ utak megtételéhez szükséges időtartamok aránya a szürkén jelölt rész területének és a fél ellipszis területének arányával egyezik meg:

$$\frac{T_{AB}}{T_{AC}} = \frac{\frac{ab\pi}{4} + \frac{bc}{2}}{\frac{ab\pi}{2}} \approx \frac{\frac{ab\pi}{4} + \frac{ab}{2}}{\frac{ab\pi}{2}} = \frac{\pi + 2}{2\pi} = 0{,}818.$$

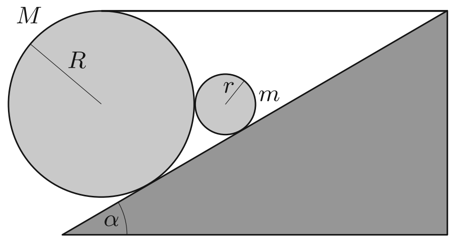


(Kihasználtuk, hogy $b \ll a$ esetén $c \approx a$.) A pálya felének megtételéhez szükséges idő tehát $0{,}818 \cdot 62{,}5$ év $= 51{,}1$ év.

Boros Máté (ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll., 12. évf.)

52 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 4 dolgozat.

P. 5069. *Egy α hajlásszögű lejtőre M tömegű, R sugarú, tömör hengert helyeztünk, amit egy vízszintes kötél köt össze a lejtő tetejével az* ábrán *látható módon. A test mellett található még egy m tömegű, r sugarú tömör henger. A két henger közötti súrlódás elhanyagolható, és az M tömegű henger nem emelkedik meg. Legalább mekkora az R sugarú henger és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható, ha a hengerek nem csúsznak meg a lejtőn?*



Adatok: $\alpha = 30°$, $R = 3r$, $M = 3m$.

(*5 pont*) Közli: *Takács Árpád,* Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium

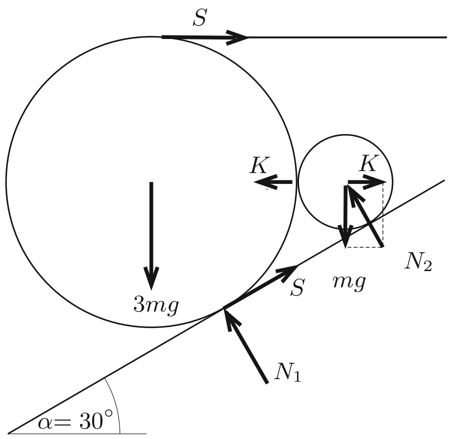
Megoldás. A geometriai adatokból következik, hogy a hengerek tengelye ugyanolyan magasságban van. Mindkét test nyugalomban van, tehát a rájuk ható erők eredője és ezen erők eredő forgatónyomatéka a két hengerre külön-külön nulla. A vektorok összege akkor lehet nulla, ha a vízszintes és a függőleges vektorkomponensek előjeles összege külön-külön nulla.

Mielőtt felírnánk ezeket az összefüggéseket, a következő megállapításokat tehetjük:

– A két henger között ható erő vízszintes (az érintősíkjukra merőleges), hiszen a hengerek közötti súrlódás elhanyagolható.

– A kis henger és a lejtő között nem hat súrlódási erő, még akkor sem, ha a felületük nem csúszós. Ha ugyanis fellépne ilyen erő, akkor annak lenne forgatónyomatéka a kis henger szimmetriatengelyére, míg a másik két erő (a nehézségi erő és a nagy henger által kifejtett erő) hatásvonala átmegy a szimmetriatengelyen, tehát a forgatónyomatékuk nulla.

– A nagy hengerre ható erők közül csak a lejtő által kifejtett (a lejtő esésvonalával párhuzamos) súrlódási erőnek és a kötél által kifejtett (vízszintes irányú) kényszererőnek van (a henger szmmetriatengelyére vonatkoztatott) forgatónyomatéka. Mivel az erőkarok egyenlő (R) hosszúságúak, a két erő nagysága is ugyanakkora.



Vegyük fel a hengerekre ható erőket – a fentiek figyelembevételével – az *ábrán* látható módon!

A kis hengerre ható három erő zárt vektorháromszöget alkot, emiatt

$$K = mg\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{mg}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

A nagy hengerre ható vízszintes erőkomponensek egyensúlyából

$$S(1+\cos 30^\circ) - K - N_1 \sin 30^\circ = 0,$$

vagyis (1)-et is felhasználva

$$S\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}mg. \tag{2}$$

Végül a függőleges erők egyensúlyának feltétele:

$$\frac{1}{2}S + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 = 3mg. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletrendszer megoldása:

$$N_1 = \left(4 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) mg \approx 2{,}85\, mg, \qquad S = \frac{4}{2+\sqrt{3}}mg \approx 1{,}07\, mg.$$

(Látható, hogy a nagy henger valóban nem emelkedik fel a lejtőről, hiszen $N_1 > 0$.)

A nagy henger nem csúszik meg a lejtőn, ha $S \leqslant \mu N_1$, vagyis a tapadó súrlódási együttható

$$\mu \geqslant \frac{S}{N_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-2\right)} = \frac{18-8\sqrt{3}}{11} \approx 0{,}38.$$

Horváth Ádám (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.) és
Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

64 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 15, hiányos (1–3 pont) 12, hibás 1 dolgozat.

P. 5076. *Egy optikai rácsot a résekre merőlegesen, de a rács síkjához képest ferdén, 45°-os szögben világítunk meg monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel. Határozzuk meg az elhajlási kép intenzitásmaximumainak számát és irányát, ha a rácsállandó*

a) $d = \lambda$;

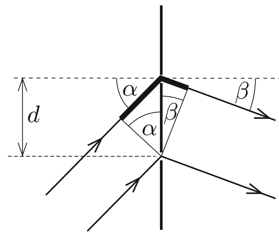
b) $d = 5\lambda$.

(*5 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc* (Budapest)

Megoldás. Akkor keletkezik intenzitásmaximum, ha az *1. ábrán* vastagabban jelölt rész (optikai útkülönbség) a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$d\sin\alpha + d\sin\beta = m\lambda \quad (m\in\mathbb{Z}),$$

$$\beta = \arcsin\left(m\frac{\lambda}{d} - \sin\alpha\right).$$



1. ábra

Készítsünk táblázatot $\beta(m)$-ről a $-1 \leqslant m\frac{\lambda}{d} - \sin\alpha \leqslant +1$ tartományba eső egész m-ekre! (A kiszámított szögeket egész fokra kerekítve adtuk meg.)

a) $d=\lambda$:

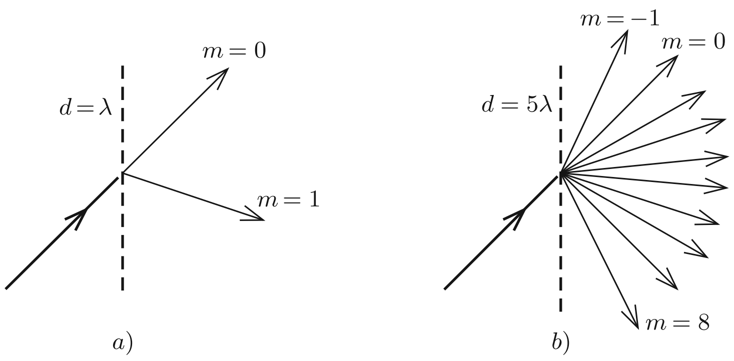
m	0	1
β [°]	−45	17

b) $d=5\lambda$:

m	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
β [°]	−65	−45	−30	−18	−6	+5	+17	+29	+44	+63

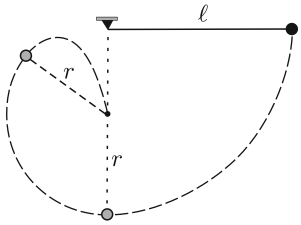
Fülöp Sámuel Sihombing (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Az elhajlási kép intenzitásmaximumai mind a beeső fénysugárhoz képest, mind pedig a rács síkjához képest aszimmetrikusan helyezkednek el (*2. ábra*). Az elhajlási maximmok száma $2d/\lambda$-hoz közeli egész szám.



2. ábra

9 dolgozat érkezett. Helyes Csépányi István, Fülöp Sámuel Sihombing, Makovsky Mihály és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

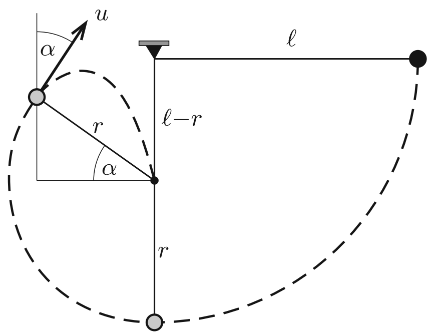


P. 5088. *Egy ℓ hosszúságú fonálingát vízszintesen kitérítünk, majd elengedünk. Amikor a fonál eléri a függőleges helyzetét, egy szögbe ütközik, s innen kezdve már csak az alsó, r hosszúságú része lendül tovább.*

Mekkora az r/ℓ arány, ha az ingatest, miután felfelé haladva letér valahol a körpályáról, szabadon mozogva pontosan a szögbe ütközik?

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Legyen a körpályáról való letérés pillanatában a test sebessége u, a fonálnak a vízszintessel bezárt szöge pedig α (lásd az *ábrát*).



A körpályáról letérésnek pillanatában a fonálerő nulla, tehát a test fonálirányú gyorsulását a nehézségi erő fonálirányú komponense biztosítja:

$$mg\sin\alpha + 0 = m\frac{u^2}{r},$$

vagyis

(1) $$u^2 = rg\sin\alpha.$$

A test további pályája a ferde hajításnak megfelelő parabola, amely áthalad a fonalat megakasztó szög pontján.

$$ut\sin\alpha = r\cos\alpha,$$

$$\frac{g}{2}t^2 - ut\cos\alpha = r\sin\alpha.$$

Az idő kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$\frac{r^2g}{2u^2}\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - r\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = r\sin\alpha, \quad \text{vagyis} \quad \frac{rg}{2u^2} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

majd ebből (1) felhasználásával

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{tehát} \qquad \alpha = 35{,}26^\circ,$$

valamint

(2) $$u^2 = rg\sin\alpha = \frac{rg}{\sqrt{3}}$$

adódik.

Az energiamegmaradás szerint

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg(\ell - r - r\sin\alpha),$$

ahonnan (2)-t is felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\,\frac{rg}{\sqrt{3}} = g\left(\ell - r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right).$$

Innen a keresett arány:

$$\frac{r}{\ell} = 2\big(2-\sqrt{3}\,\big) \approx 0{,}54.$$

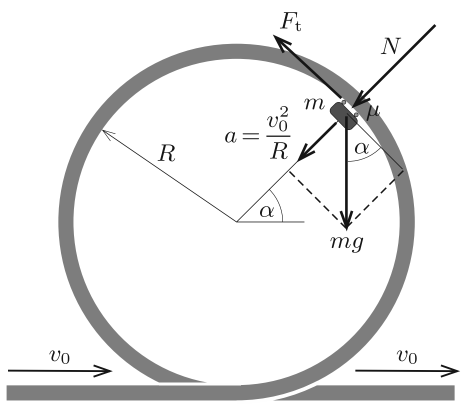
Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 5 dolgozat.

P. 5099. *Egy hullámvasút kocsija egy függőleges síkban fekvő, kör alakú pályán halad úgy, hogy a saját motorját és fékjét használva a sebességét állandó értéken tartja. Legalább mekkora sebességet kell tartania ahhoz, hogy az R sugarú pályán megcsúszás nélkül tudjon végighaladni, ha a tapadó súrlódás együtthatója μ? Hol csúszna meg, ha a sebessége ennél kicsit kisebb lenne? A kocsi elég kicsi a pálya sugarához képest.*

(*6 pont*) Közli: *Takács László,* Baltimore, USA

I. megoldás. Tekintsük az *1. ábrán* látható módon az α szöggel jellemzett helyen a kocsira ható erőket, és bontsuk fel ezeket sugárirányú (radiális) és érintőirányú (tangenciális) összetevőkre! (A körpálya középpontja irányába mutató radiális vektorkomponenseket, illetve az óramutató járásával ellentétes irányú tangenciális komponenseket tekintjük pozitívnak.)



1. ábra

Ha a kocsi állandó v_0 sebességgel mozog, a mozgásegyenletei:

(1) $\quad mg\cos\alpha - F_t = 0,$

(2) $$\frac{mv_0^2}{R} = N + mg\sin\alpha.$$

(Itt F_t a kocsira ható tapadó súrlódási erő, N pedig a sínek által kifejtett radiális nyomóerő.) Mivel a csúszásmentesség feltétele $|F_t| \leqslant \mu N$, (1) és (2) alapján fennáll:

$$\mu mg|\cos\alpha| \leqslant \mu\frac{mv_0^2}{R} - \mu mg\sin\alpha,$$

vagyis

$$(4)\qquad \mu\frac{v_0^2}{Rg}\geqslant \mu\sin\alpha+|\cos\alpha|.$$

A továbbiakban ($\cos\alpha$ előjelétől függően) két esetet kell vizsgálnunk.

1. Ha $\cos\alpha>0$, vagyis a kocsi a motorját használva a pálya jobb oldali részén felfelé halad, akkor

$$(5)\qquad \mu\frac{v_0^2}{Rg}\geqslant \mu\sin\alpha+\cos\alpha.$$

A súrlódási együtthatót érdemes $\mu=\operatorname{tg}\varepsilon$ alakban felírni (ε az ún. súrlódási határszög), mert ennek segítségével (5) így írható:

$$\frac{v_0^2}{Rg}\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\geqslant\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\sin\alpha+\cos\alpha,$$

azaz

$$(6)\qquad \frac{v_0^2}{Rg}\cdot\sin\varepsilon\geqslant\sin\alpha\sin\varepsilon+\cos\alpha\cos\varepsilon\equiv\cos(\alpha-\varepsilon).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek minden $-90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ szögre, így $\alpha=\varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a csúszásmentes mozgás sebességére a

$$(7)\qquad v_0\geqslant\sqrt{\frac{Rg}{\sin\varepsilon}}=\sqrt{Rg\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon+\sin^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}}}=\sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}}$$

alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az $\alpha_{1.\text{krit.}}=\varepsilon=\operatorname{arctg}\mu$ kritikus helyzet közelében megcsúszik.

2. Ha $\cos\alpha<0$, vagyis a kocsi a fékeit használva a pálya bal oldali részén lefelé halad, akkor

$$(8)\qquad \mu\frac{v_0^2}{Rg}\geqslant \mu\sin\alpha-\cos\alpha,$$

vagyis

$$(6)\qquad \frac{v_0^2}{Rg}\sin\varepsilon\geqslant\sin\alpha\sin\varepsilon-\cos\alpha\cos\varepsilon\equiv-\cos(\alpha+\varepsilon).$$

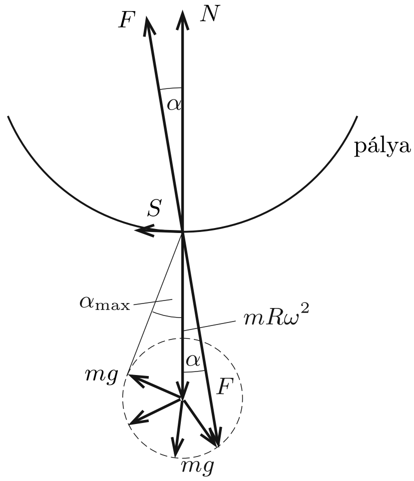
Ennek az egyenlőtlenségnek minden $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 270^\circ$ szögre, így $\alpha=180^\circ-\varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a sebességre ismét a (7)-nek megfelelő alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az

$$\alpha_{2.\text{krit.}}=180^\circ-\varepsilon=180^\circ-\operatorname{arctg}\mu$$

kritikus helyzet közelében megcsúszik.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Írjuk le a mozgást a hullámvasút kocsijában ülő ember vonatkoztatási rendszerében. Ebben a rendszerben az összesen m tömegű, ω szögsebességgel mozgó kocsira állandó $mR\omega^2$ nagyságú és mindig „lefelé” (a kör középpontjával ellentétes irányba) mutató „centrifugális erő”, valamint egy mg nagyságú, de változó irányú (egyenletesen körbeforduló) nehézségi erő hat (*2. ábra*).



2. ábra

Ezen két erő $\boldsymbol{F}$ eredőjével tart egyensúlyt a sínek által kifejtett $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$ erő, amelynek a „felfelé” iránnyal bezárt α szöge legfeljebb $\operatorname{arctg}\mu$ lehet, hiszen $|\boldsymbol{S}| \leqslant \mu|\boldsymbol{N}|$.

A 2. ábrán látható, hogy α legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor a centrifugális erő és a nehézségi erő vektora derékszögű háromszöget határoz meg, és

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{mg}{\sqrt{\left(mR\omega^2\right)^2-(mg)^2}} \leqslant \mu.$$

Innen kapjuk, hogy a kocsi sebessége:

$$v_0 = R\omega \geqslant \sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}}\,.$$

Ha a sebesség a kritikus értéknél egy kicsit kisebb, a kocsi a pálya azon pontjánál csúszik meg, ahol kör középpontjából nézve a vízszintessel bezárt szög éppen $\operatorname{arctg}\mu$.

Hisham Mohammed Almalki (Rijád, Manarat Al-Riyadh School, 11. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 6 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 386. Készítsünk egy minél hosszabb lengésidejű, a levegőben lengő torziós ingát, és méréssel határozzuk meg a lengésidőnek a torziós szál hosszától való függését!

(*6 pont*) *Eötvös Loránd* (1848–1919) nyomán