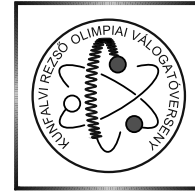


A 2019. évi Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny elméleti feladatai¹



1. Buborékok képződése és mozgása pezsgőben

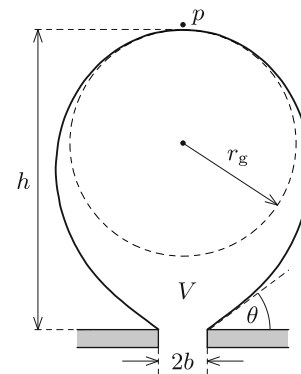
Szilveszteri koccintáskor megfigyelhetjük, hogy a pezsgőben buborékfonalak alakulnak ki, azaz a buborékok a pohár aljának vagy oldalfalának bizonyos pontjairól indulva libasorban emelkednek a felszín felé. A buborékok képződésének oka, hogy a pezsgő előállításakor az italt nagy (2-5 atmoszféra) nyomás alatt szén-dioxiddal telítik, ami légköri nyomáson túltelített oldatot eredményez, így a CO_2 gáz formájában fokozatosan kiválik a folyadékból. Ez a kiválás a pohár belső falának mikroszkopikus egyenetlenségeinél, szennyeződéseinél történik meg legnagyobb valószínűséggel, ezek az ún. nukleációs magvak. Ha egy buborékkezdemény már kialakult, akkor a gáz-folyadék határfelületen tovább folytatódik a CO_2 kiválása egészen addig, amíg a buborék olyan nagyra hízik, hogy nagy része leválik a magról. Ekkor csak egy apró buborékkezdeményt hagy maga után, amely szintén növekedésnek indul.

Ebben a feladatban a buborékok leválásának és emelkedő mozgásának leírásával foglalkozunk egy olyan egyszerű modell segítségével, amely bizonyos feltételek mellett a részletes számolások és kísérletek szerint is jól közelíti a valóságot.

1.A. Buborékok képződése és leválása

Tegyük fel, hogy a pohár alján lévő egyik nukleációs mag egy kicsiny, b sugarú, kör alakú bemélyedés, amelyen *lassan* egy buborék fejlődik (1. ábra). Egy adott pillanatban a buborék térfogata V , magassága h , görbületi sugara a legfelső pontjában r_g , illeszkedési szöge a pohár aljához képest θ . A folyadék nyomása közvetlenül a buborék tetejénél p .

A buborékra a folyadék hidrosztatikai nyomásától származó F_1 erő, a bezárt CO_2 -gáz nyomásából származó F_2 erő, illetve a bemélyedésnél ható, felületi feszültségből származó F_3 erő hat.



1. ábra

1.A.1. Fejezzük ki az F_1 erőt a folyadék (pezsgő) ρ sűrűsége, a g nehézségi gyorsulás, valamint az 1. ábrán feltüntetett mennyiségek segítségével!

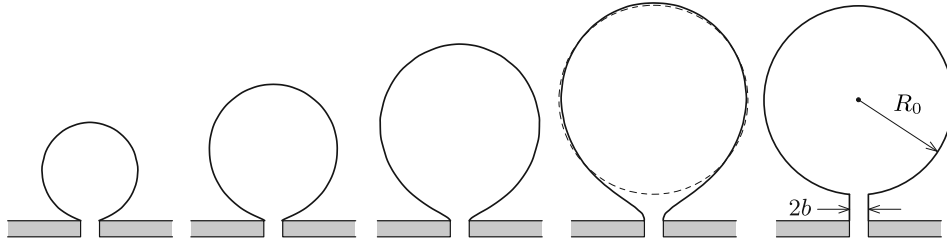
1.A.2. Fejezzük ki az F_2 erőt a folyadék σ felületi feszültsége és az 1. ábrán látható mennyiségek segítségével!

1.A.3. Adjuk meg az F_3 erőt a σ felületi feszültség és az 1. ábrán látható paraméterek segítségével!

¹A versenyt a nemzetközi diákolimpiához hasonló körülmények között Budapesten rendezték meg 2019 márciusában. A feladatokat Vigh Máté állította össze.

1.A.4. Az előző alkérdésekre kapott eredmények felhasználásával írjuk fel a buborék egyensúlyát kifejező egyenletet!

A buborék alakját a hidrosztatikai nyomásból és a felületi feszültségből származó erők együttesen határozzák meg. Ha a buborék mérete sokkal kisebb egy bizonyos κ hosszúságnál, akkor a buborék nagy része (egy vékony „nyaktól” eltekintve) jó közelítéssel gömb alakú marad még a nukleációs magról való leszakadáskor is, ahogy az a 2. ábra első rajzán látható.



2. ábra

1.A.5. Adjunk becslést κ értékére a pezsgő ρ sűrűsége, a g nehézségi gyorsulás és a σ feszültség segítségével! (Feltehetjük, hogy a CO_2 gáz sűrűsége jóval kisebb a folyadék sűrűségénél.)

A továbbiakban tegyük fel, hogy a buborék mérete sokkal kisebb, mint κ ! Ekkor a buborék alakja a leválás pillanatában egy R_0 sugarú gömbbel és a hozzá csatlakozó b sugarú, henger alakú, vékony ($b \ll R_0$), rövid nyakkal modellezhető (lásd a 2. ábra utolsó rajzát).

1.A.6. Fejezzük ki a bemélyedés (és a buborék nyakának) b sugarát az éppen leváló buborék R_0 sugara, valamint ρ , g és σ segítségével! Használjuk fel, hogy $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, ha $|\varepsilon| \ll 1$.

1.A.7. Számítsuk ki az éppen leváló buborék R_0 sugarát, ha $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $\sigma = 50 \text{ mN/m}$ és $b = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$.

1.B. Buborékok felszálló mozgásának leírása

A buborék belsejében lévő szén-dioxid mennyisége a nukleációs magról történő leválás után tovább növekszik. Ennek üteme jó közelítéssel arányos a buborék falának A felszínével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma A,$$

ahol γ egy állandó, ΔN pedig a kicsiny Δt idő alatt a folyadékból kiváló CO_2 -molekulák száma.

A feladat következő részében tételezzük fel, hogy a pezsgő (és a benne lévő buborék) hőmérséklete mindvégig az ideális $T = 15 \text{ }^\circ\text{C}$, a buborék jó közelítéssel gömb alakú marad, a légköri nyomás értéke pedig $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

1.B.1. Adjuk meg a buborék $R(t)$ sugarát a leválás után t idő elteltével R_0 , γ , T , p_0 és univerzális állandó(k) felhasználásával!

A felfelé mozgó buborékra a hidrosztatikai felhajtóerő és a v sebességgel arányos nagyságú ún. Stokes-féle közegellenállási erő hat: $F_{\text{Stokes}} = 6\pi R\eta v$, ahol R a buborék pillanatnyi sugara, η pedig a folyadék belső súrlódását jellemző ún. viszkozitás.

1.B.2. Adjuk meg a buborék $v(t)$ sebességét a leválás után t idő elteltével R_0 , γ , T , p_0 , ρ , g , η és univerzális állandó(k) felhasználásával!

A pohárban $H = 10$ cm magasan áll a pezsgő. A pohár aljáról induló buborék $t_0 = 1,2$ s alatt éri el a felszínt. A pezsgő viszkozitása $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Pa·s. Ha az **1.A.7.** alkérdésben nem sikerült meghatározni a leváló buborék R_0 sugarát, akkor azt vegyük $R_0 = 0,16$ mm-nek!

1.B.3. Mekkora a buborék $R(t_0)$ sugara, amikor eléri a felszínt? Adjuk meg a sugár számszerű értékét is!

Matematikai segítség: Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} + \text{konstans.}$$

2. Ponttöltés mozgása oszcilláló elektromos térben

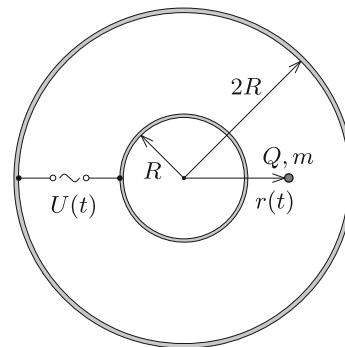
Egy gömbkondenzátor két koncentrikus, R és $2R$ sugarú, igen jól vezető fémgömbhéjből áll; a gömbök közötti térben vákuum van. A kondenzátor fegyverzetei közé egy váltóáramú feszültségforrást helyezünk, amit egy-egy sugárirányú, egyenes vezetékkel csatlakoztatunk a gömbökhöz (3. ábra). A gömbökre kapcsolt feszültség $U(t) = U_0 \cos \omega t$ módon változik az idő függvényében.

2.1. Határozzuk meg a gömbkondenzátor kapacitását! A választ R és univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!

Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája nem túl magas, a kondenzátor feszültsége (az igen jól vezető gömbök miatt) „követi” a feszültségforrást, a fáziskésés lényegében zérus (ez a kvázisztatikus eset). Ha azonban a váltakozó feszültség ω körfrekvenciája megközelít egy bizonyos ω_1 értéket, akkor a rendszer induktív ellenállása számottevő lesz, így a kvázisztatikus közelítés nem alkalmazható.

2.2. Adjunk nagyságrendi becslést ω_1 értékére, ha $R = 10$ cm. Ismert továbbá, hogy a vákuum dielektromos állandója $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm²), permeabilitása $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am).

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\omega \ll \omega_1$! A gömbök közötti térben, a feszültségforrással átellenes oldalon egy $+Q$ töltésű, m tömegű kis porszem található. Feltételezhetjük, hogy a porszemre ható nehézségi erő hatása a feladat során végig elhanyagolható. Jelöljük a porszem gömbök középpontjától mért távolságát r -rel! Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája sokkal nagyobb egy bizonyos ω_2 értéknél,



3. ábra

akkor a gyöngy mozgása felbontható egy lassú, sodródó mozgásra és egy körül gyorsan oszcilláló, kis $A(t)$ amplitúdójú rezgőmozgásra: $r(t) = r_0(t) + A(t) \cos \omega t$, ahol $A(t) \ll r_0(t)$, valamint $A(t)$ és $r_0(t)$ lassan változó függvények. Ez azt jelenti, hogy teljesülnek az $\ddot{r}_0(t)$, $\ddot{A}(t)$, $\dot{A}(t)\omega \ll A(t)\omega^2$ relációk (a mennyiség fölé tett pont és kettőspont az első és második idő szerinti deriváltat jelöli).

2.3. *Adjunk nagyságrendi becslést ω_2 értékére m , Q , R és U_0 segítségével! Számítsuk ki ω_2 becsült értékét $R = 10$ cm, $m = 10^{-16}$ kg, $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$ C, $U_0 = 1,0$ V esetén!*

A következő feladatokban tegyük fel, hogy $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_1$! A porszem gyorsulása az

$$(2.1) \quad \ddot{r}(t) = \frac{\alpha}{r(t)^2} \cos \omega t$$

egyenlet szerint változik az idő függvényében, ahol α állandó paraméter.

2.4. *Fejessük ki az α paraméter értékét m , Q , R és U_0 segítségével!*

2.5. *Az említett közelítések segítségével adjuk meg a gyors oszcilláció $A(t)$ amplitúdóját α , $r_0(t)$ és ω felhasználásával!*

A (2.1) egyenlet egy periódusidőre vett átlagolásával összefüggést állapíthatunk meg a porszem lassú, sodródó mozgását leíró $r_0(t)$ függvény és annak $\dot{r}_0(t)$ gyorsulása között. A lassan változó mennyiségek – $A(t)$ és $r_0(t)$ – egy periódus alatt alig változnak, így az időátlagolás során állandónak vehetők.

2.6. *Az eddig használt közelítéseket és a 2.5. alkérdés eredményét felhasználva fejezzük ki a lassan sodródó mozgás $\dot{r}_0(t)$ gyorsulását $r_0(t)$, α és ω segítségével!*

2.7. *Feltételezve, hogy a $t = 0$ időpillanatban a porszem a kisebb fémgömb felületének közeléből indult, határozzuk meg, mekkora sodródási sebességgel ér el a porszem a nagyobb gömbhöz! Az eredményt m , Q , R , U_0 és ω segítségével adjuk meg!*

Matematikai segítség: Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konstans.}$$

2.8. *Adjuk meg a porszem sodródási sebességének számszerű értékét akkor, amikor eléri a nagy gömböt! Legyen $\omega = 2 \cdot 10^5$ 1/s, $R = 10$ cm, $m = 10^{-16}$ kg, $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$ C, $U_0 = 1,0$ V!*

3. Száloptikás giroszkóp

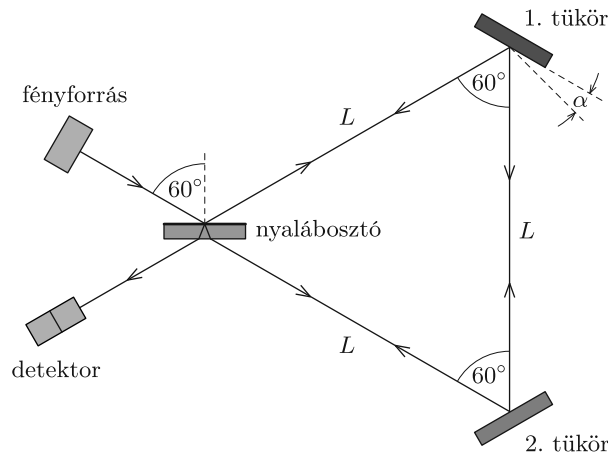
A mechanikus giroszkóp a pörgettyű elvén működő eszköz, amelynek lelke egy olyan lendkerék, amelynek szimmetriatengelye a háromtengelyű felfüggesztésnek köszönhetően szabadon el tud fordulni. A felpörgetett kerék a perdületmegmaradás miatt a felfüggesztés mozgásakor is megőrzi eredeti forgástengelyét, így alkalmas irányok megtartására és szögsebességmérésre is.

A száloptikás giroszkóp csak a felhasználási módjában hasonlít a mechanikus giroszkópra, hiszen ez is alkalmas egy forgó koordináta-rendszer szögsebességének meghatározására. Az eszköz lényegében egy ún. Sagnac-féle interferométer

száloptikás változata, amelyben az interferáló fényhullámok fáziskülönbsége függ a koordináta-rendszerrel együtt forgó eszköz szögsebességétől. Ez a feladat a száloptikás giroszkóp működési elvével foglalkozik.

3.A. A Sagnac-féle interferométer

A Sagnac-féle interferométer egyik változatát a 4. ábra mutatja. Ez az eszköz két ideális siktükörből és egy nyalábosztóból áll, amelyek egy L oldalú szabályos háromszög alakjában vannak elrendezve. A nyalábosztóra 60° -os beesési szögben I_0 intenzitású, λ hullámhosszúságú monokromatikus síkhullám esik a fényforrásból. A nyalábosztó egy dielektromos (szigetelő) anyagból készült vékony plánparallel lemez, amelynek felső lapja féligáteresztő tükörként viselkedik, azaz a rá eső fény intenzitásának felét visszaveri, másik felét pedig átengedi. A nyalábosztó alsó lapja egy vékony bevonatnak köszönhetően nem tükröző.



4. ábra

A nyalábosztón való áthaladás után a fény az óramutató járásával megegyező, és azzal ellentétes irányban is végigpattog a tükrökön, míg végül mindkét hullám újra a nyalábosztóhoz érkezik. Itt a hullámok ismét kettéválnak fele-fele intenzitásarányban, így a hullámok egy része a fényforrásba visszajutva egyesül, másik része pedig (egymással interferálva) a detektorba jut.

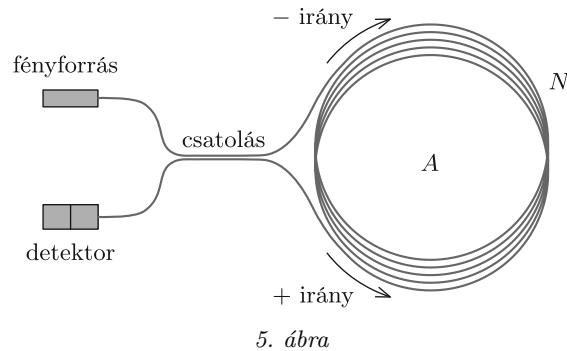
3.A.1. Az interferométer alaphelyzetében mekkora intenzitást mér a detektor, és mekkora intenzitású fény jut vissza a fényforrásba?

3.A.2. Az interferométer 1. tükörét kicsiny α szöggel elforgatjuk a 4. ábrán látható módon. Változik-e, és ha igen, hogyan változik a detektor által mért intenzitás α függvényében?

3.B. A száloptikás Sagnac-féle interferométer, mint giroszkóp

A 4. ábrán bemutatott interferométert optikai szálak segítségével is meg lehet valósítani (5. ábra). Az optikai szálak fényvezető magjának törésmutatójáról tételezzük fel, hogy 1-hez közeli érték. A használt fény hullámhossza λ , a fényforrásból kiinduló intenzitás a szálban I_0 . Az egyenlő intenzitású nyalábosztást két optikai

szál közötti csatolással valósítják meg: ha a két szál fényvezető magja elég közel helyezkedik el egymáshoz, az elektromágneses hullám „átcsatolódhat” az egyik szálból a másikba. Ha a csatoláshoz egy bejövő hullám érkezik, akkor a két továbbhaladó hullám egymáshoz viszonyított fáziskülönbsége $\pi/2$ lesz. A fényforrás felől érkező nyaláb két fele az óramutató járásával azonos (–), illetve azzal ellentétes (+) irányban halad végig N darab, egyenként A területű hurkon, míg a csatoláson újra áthaladva a detektorba, valamint a fényforrásba jut.



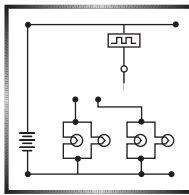
5. ábra

Ha az 5. ábrán látható interferométert a kör alakú hurkok középpontja körül Ω szögsebességgel megforgatjuk, akkor a + és – irányba haladó hullámok hullámhossza a Doppler-effektus miatt kicsit megváltozik. Így a detektor által mért intenzitás Ω függvénye lesz.

3.B.1. Határozzuk meg a + és – irányba terjedő hullámok ϕ fáziskülönbségét, amikor a detektorba érnek! A választ λ , A , N és Ω univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!

3.B.2. Adjuk meg a detektor által mért intenzitást a + és – irányba terjedő hullámok ϕ fáziskülönbsége és I_0 segítségével!

3.B.3. Egy tipikus száloptikás giroszkópban 200 m hosszú optikai szál van feltekerve egy $d = 10$ cm átmérőjű, függőleges tengelyű csévetestre. Mekkora fáziskülönbséget mérhetünk a két nyaláb között Budapesten a Föld forgása miatt? (Budapest földrajzi szélessége kb. 47° .)



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 652. Egy test nyugalomból indulva egy egyenes mentén mozog úgy, hogy gyorsulása időben egyenletesen növekszik a kezdeti zérus értékről másodpercenként 2 m/s^2 értékkel. Mekkora a test sebessége az indulást követően 4 másodperc múlva? (4 pont)