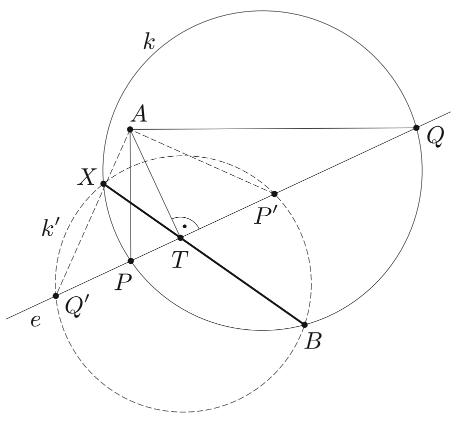
Matematika feladatok megoldása

B. 4970. *Adott a síkon két pont A és B, továbbá egy ezeket elválasztó e egyenes. Válasszunk az e egyenesen P és Q pontokat úgy, hogy $PAQ\sphericalangle = 90^\circ$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy létezik egy olyan, B-től különböző pont, amelyen a B, P és Q pontokra illeszkedő kör – a P és Q pontok választásától függetlenül – áthalad.*

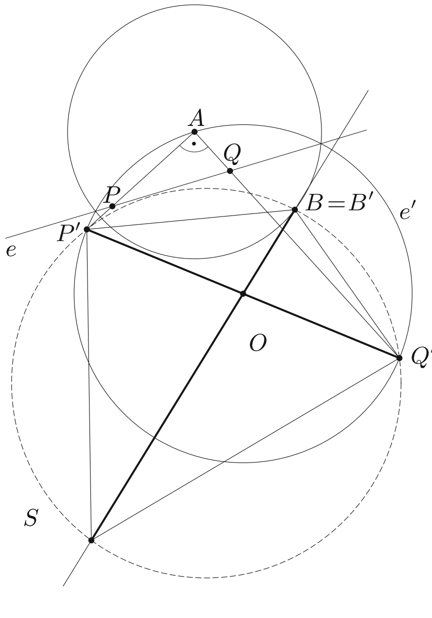
(*5 pont*) Javasolta: *11. C. osztály,* Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

I. megoldás. Legyen az A pont merőleges vetülete az e egyenesre T. Mivel PAQ egy derékszögű háromszög, a PAT és AQT háromszögek hasonlóak, tehát $\frac{PT}{TA}=\frac{AT}{TQ}$, amiből $PT\cdot TQ=AT^2$ (*1. ábra*).

Mivel a T pont helyzete változatlan, így AT^2 állandó P és Q bármely választása esetén, ezért a T pont BPQ körökre vonatkozó hatványa is állandó. Vegyünk két tetszőleges BPQ és $BP'Q'$, a feltételeknek megfelelő kört és legyen ezek B-től különböző metszéspontja X. Az XB egyenes átmegy a T ponton, mert az XB egyenes a két kör hatványvonala, és T hatványa a két körre megegyezik. Tegyük fel, hogy van olyan, a feltételeknek megfelelő BP^*Q^* kör, amely a BPQ kört egy X-től különböző X' pontban metszi. Ennek az új körnek és a BPQ körnek a hatványvonala az $X'B$ egyenes. Azonban ez ellentmondás, mert X és X' a BPQ kör



1. ábra



2. ábra

különböző pontjai, így $T \notin X'B$, és ezzel T hatványa a két körre nem lehetne egyenlő, pedig egyenlő kell, hogy legyen. Így X' egybeesik az X ponttal. Tehát mindegyik kör átmegy az X ponton.

Márton Dénes (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján.

II. megoldás. Invertáljuk az e egyenest és a B pontot az A középpontú, AB sugarú körre. Ekkor B képe önmaga, e képe pedig egy, az A ponton átmenő kör lesz (*2. ábra*).

Legyen ennek a körnek a középpontja O. Az inverzió szögtartó tulajdonsága miatt és $PAQ\sphericalangle = 90°$ következtében $P'AQ'\sphericalangle = 90°$, így a Thalész-tétel megfordítását felhasználva tudjuk, hogy P' és Q' az e' kör egy átmérőjének két végpontja.

A B', P', Q' pontokra illeszkedő kör messe az $B'O$ egyenest S-ben. Ebben a körben a szelőtétel miatt $OP' * OQ' = OB' * OS$, ebből

$$OS = \frac{OP' * OQ'}{OB'}.$$

Mivel az e' körben P' és Q' egy átmérő két végpontja, ezért OP' és OQ' független a P és Q pontok választásától, továbbá OB' is független a P és Q pontok választásától, azaz OS is független a P és Q pontok választásától.

Ezzel beláttuk, hogy a B', P' és Q' pontokra illeszkedő kör a P és Q pontok választásától függetlenül áthalad S-en, továbbá még egyszer invertálva: a B, P és Q pontokra illeszkedő kör a P és Q pontok választásától függetlenül áthalad S inverz képén.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 57 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 45, 4 pontot 1, 3 pontot és 2 pontot szintén 1-1 tanuló. 1 pontos 3, 0 pontos 5, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.

B. 4978. *Legyen $n \geqslant 3$ egész szám és α tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}.$$

(*5 pont*)

Megoldás. A kétszeres szögeke vonatkozó $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosságot $2\cos^2 x = \cos\ 2x + 1$ formában tagonként alkalmazva kapjuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n}\right) + 1\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n}\right)\right) + n.$$

Pontosan azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

A megoldás további részében a komplex számok trigonometrikus alakját használjuk. Legyen

$$z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Ekkor algebrai azonosság alapján

$$\frac{\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1}{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)-1}=\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^{2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Az $n\geqslant 3$ feltétel miatt $\frac{4}{n}$ nem lehet páros egész szám, így a nevezőben szereplő $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1\neq 0$. Viszont a számláló, $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1=0$, tehát

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Most használjuk fel a trigonometrikus alakban adott komplex számok szorzására vonatkozó azonosságot tagonként:

$$0=\big(\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha)\big)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left((\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha))\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)+i\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Tudjuk, hogy ez a komplex szám nulla, emiatt a valós része is nulla:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Az eredeti állításhoz visszatérve tehát beláttuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=n,\quad\text{vagyis}\quad\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 62 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 38, 4 pontot 10 versenyző. 3 pontos 5, 2 pontos 5 dolgozat. 1 pontot 3, 0 pontot 1 tanuló kapott.

B. 4983. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x^2+2x-3-\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}}=\frac{2}{x^2-2x-3}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Laczkó László* és *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, hogy a gyökjel alatt álló tört milyen valós x-ekre lesz nagyobb vagy egyenlő, mint 0. Ez csak akkor lehet, ha mindkettő pozitív vagy negatív (a számláló lehet 0 is, a nevező viszont nem).

A számláló és a nevező is szorzattá alakítható:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),$$
$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3).$$

Ha az ezekből adódó függvényeket ábrázoljuk, látható, hogy a megoldások csak a $(-\infty;-3]$, a $(-1;1]$, illetve a $(3;\infty)$ intervallumokból kerülhetnek ki. Induláskor megengedhetjük, hogy a számláló 0 legyen, de mivel ekkor az egyenlet jobb oldala nem 0, ezért sem az $x=-3$, sem az $x=1$ nem gyöke az egyenletnek.

Ezek után szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-2x-3)-mal.

Két eset lehetséges: ha negatív, illetve ha pozitív számmal szoroztunk. Vizsgáljuk részletesen először azt az esetet, amikor x^2-2x-3 pozitív. Ekkor tudjuk, hogy $x>3$, vagy $x<-1$. Beszorzás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)-\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}-2=0.$$

Legyen $a=\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}$. Így az egyenlet a következő lesz:

$$a^2-a-2=0.$$

Ennek gyökei: $a_1=2$ és $a_2=-1$. A második gyök nem megfelelő, hiszen a gyökös kifejezés csak pozitív lehet. Ebből az következik, hogy $a^2=4$. Tehát a megoldandó egyenlet a következő lesz:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)=4.$$

Ha kibontjuk és 0-ra rendezzük az egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$x^4-10x^2+5=0.$$

Ez x^2-re másodfokú:

$$x_{1,2}^2 = 5 + 2\sqrt{5} \quad \text{és} \quad x_{3,4}^2 = 5 - 2\sqrt{5}\,.$$

Ezekből négy gyököt kapunk:

$$x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,.$$

Közülük azonban csak kettő esik megfelelő intervallumba, így csak az $x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ és az $x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ megoldásai az eredeti egyenletnek.

Most nézzük meg, mi történik akkor, ha a nevező, amivel szorzunk negatív. Mivel a gyökjel alatt pozitív szám (vagy 0) lehet, ezért az $x^2 + 2x - 3$ is negatív. Ekkor az egyenlet úgy néz ki, hogy (-1)-et kiemelve tudjuk az $(x^2 - 2x - 3)$-at a gyökjel alá vinni:

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3)} - 2 = 0.$$

Így a gyökjel alatt két negatív szám szorzata áll, ami adhat újabb megoldásokat. Ismét új ismeretlent bevezetve: legyen $b = \sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3)}$. A kapott egyenlet most

$$b^2 + b - 2 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása csak $b = 1$ (a $b = -2$ értéket nem veheti fel a gyökös kifejezés). A megoldandó egyenlet az lesz, hogy:

$$x^4 - 10x^2 + 8 = 0.$$

Ezt x^2-re megoldva kapjuk, hogy:

$$x_1^2 = 5 + \sqrt{17} \quad \text{és} \quad x_2^2 = 5 - \sqrt{17}\,.$$

Ebből azt a 4 gyököt kapjuk, hogy:

$$x_1 = \sqrt{5 + \sqrt{17}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + \sqrt{17}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,.$$

Ezek közül csak kettő esik megfelelő intervallumba, az $x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}$ és az $x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,$.

Tehát az eredeti egyenletnek összesen 4 gyöke van:

$$x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,.$$

Major Botond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A leggyakrabban előforduló hiba a dolgozatokban és általában is az, hogy azt a két megoldást is adó esetet figyelmen kívül hagyják, amikor mindkét másodfokú kifejezés negatív értéket vesz fel.

Összesen 163 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 39, 3 pontot 32 tanuló. 2 pontos 45, 1 pontos 34 tanuló dolgozata. 0 pontos 7, nem versenyszerű 5 dolgozat, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.