Az ARS háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AR alapja $\sqrt{2}$ hosszú, szárai $\sqrt{5}$ hosszúak, így az alapjához tartozó m magasságra felírhatjuk:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad m = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Az $APQR$ alapú, O csúcsú gúla térfogata $V_1 = \frac{\sqrt{3}r}{3}$; az APS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}r}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}r$$

(ekkora a PQS alapú gúláé is); az ARS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}r}{3} = \frac{1}{2}r$$

(egyenlő az RQS alapú gúláéval).

Mivel $V_1 + 2V_2 + 2V_3 = V$;

$$\frac{\sqrt{3}}{3}r + 2\frac{\sqrt{6}}{6}r + 2\frac{1}{2}r = 1; \quad r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right) = 1.$$

Ebből

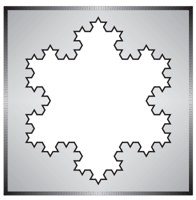
$$r = \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3} = (\text{két lépésben gyöktelenítve a nevezőt}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0{,}42.$$

(*Megjegyzés.* Minden olyan poliéderre, amelynek van minden lapját érintő beírt gömbje igaz, hogy $\frac{Ar}{3} = V$.)

Németh László
Fonyód

C gyakorlat megoldása



C. 1489. *Egy sakktábla bal alsó sarkában áll egy sötét futó, jobb alsó sarkában pedig egy világos futó. Mindkét futó a saját színén haladva egyesével lép felfelé haladva a táblán véletlenszerűen jobbra vagy balra, míg el nem érik a felső sort. Mennyi a valószínűsége, hogy a sötét futó a világos futótól jobbra érkezik a felső sorba?*

Megoldás. A futó ugyanakkora valószínűséggel lép balra felfelé, mint jobbra felfelé, ha mindkét irányba léphet egy mezőről. Vannak azonban olyan mezők, ahonnan csak az egyik irányba mehet.

Nézzük először a sötét futót. Annak a valószínűsége, hogy a bal alsó mezőn járt, 1, hiszen onnan indul. Innen csak egy irányban haladhat tovább: a 2. sor 2. mezőjére, ezért annak a valószínűsége is 1, hogy a 2. sor 2. mezőjén járt:

$$p_{(1,1)} = p_{(2,2)} = 1.$$

Innen két irányba mehet, mindkettőbe $\frac{1}{2}$ valószínűséggel:

$$p_{(3,1)} = p_{(3,3)} = \frac{1}{2}.$$

A 3. sor 1. mezőjéről biztosan a 4. sor 2. mezőjére megy, ahová még ezen kívül a 3. sor 3. mezőjéről is léphet. Ezért ennek a valószínűsége

$$p_{(4,2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

a 4. sor 4. helyének pedig

$$p_{(4,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Hasonlóan számolható a többi valószínűség is:

$$p_{(5,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \qquad p_{(5,3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{8},$$

$$p_{(5,5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}; \qquad p_{(6,2)} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} = \frac{10}{16},$$

$$p_{(6,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \qquad p_{(6,6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16};$$

$$p_{(7,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{16} = \frac{10}{32}, \qquad p_{(7,3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{32},$$

$$p_{(7,5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{32}, \qquad p_{(7,7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32};$$

$$p_{(8,2)} = \frac{10}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{32} = \frac{35}{64}, \qquad p_{(8,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{32} = \frac{21}{64},$$

$$p_{(8,6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{7}{64}, \qquad p_{(8,8)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{64}.$$

Látható, hogy minden sorban a sötét mezőkre lépés valószínűségének összege 1.

Szimmetria miatt a világos futó utolsó sorba eső valószínűségeit könnyű megadni.

Ha a sötét futó a 8. mezőn van, akkor a világos bárhol lehet, mindig tőle balra lesz. Ennek a valószínűsége

$$\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{64}.$$

Ha a sötét futó a 6. mezőn van, akkor a világos az 1., 3., vagy 5. mezőn lehet, így ennek a valószínűsége

$$\frac{7}{64}\cdot\left(\frac{1}{64}+\frac{7}{64}+\frac{21}{64}\right)=\frac{203}{64^2}.$$

Ha a sötét futó a 4. mezőn van, akkor a világos az 1., vagy a 3. mezőn lehet, így ennek a valószínűsége

$$\frac{21}{64}\cdot\left(\frac{7}{64}+\frac{1}{64}\right)=\frac{168}{64^2}.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
8	$\frac{1}{64}$	$\frac{35}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{35}{64}$	$\frac{1}{64}$
7	$\frac{10}{32}$		$\frac{15}{32}$		$\frac{6}{32}$		$\frac{1}{32}$	
6		$\frac{10}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{16}$		
5	$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{1}{8}$			
4		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					
2		1						
1	1							

Végül, ha a sötét futó a 2. mezőn van, akkor a világos csak az 1. mezőn lehet, ennek a valószínűsége pedig $\frac{35}{64}\cdot\frac{1}{64}=\frac{35}{64^2}$.

Tehát

$$\frac{1}{64}+\frac{203}{64^2}+\frac{168}{64^2}+\frac{35}{64^2}=\frac{470}{64^2}\approx 0{,}115$$

annak a valószínűsége, hogy a sötét futó a világostól jobbra érkezik.

Ajtai Boglárka (Földes Ferenc Gimn., Miskolc, 11. évf.)

Megjegyzés. Nagyon sokan kiszámították, hogy az egyes futók hány különböző útvonalon juthatnak el a sakktábla legfelső sorának egyes mezőire, majd ezt osztották az összes lehetséges eljutás útvonalainak számával, és így jutottak az egyes mezőkre vett eljutási valószínűségekhez. Azonban a feladat szövege szerint a futók nem az útvonalak közül választhattak véletlenszerűen, hanem minden egyes lépésben aközött, hogy jobbra fel vagy balra fel lépjenek (amennyiben ez nem jelentette a sakktábláról való lelépésüket). A sakktábla szélén csak egyféle lépés volt lehetséges 1 valószínűséggel, ami azt eredményezte, hogy az egyes útvonalak nem azonos valószínűséggel következtek be. Így ez a megoldás hibás.

27 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 3 versenyző: Ajtai Boglárka, Molnár István, Spányik Teodor. 3 pontos 19, 2 pontos 4, 1 pontos 1 dolgozat.

Valószínűségszámítás a honlapon és a KöMaL-archívumban

A valószínűségszámítási feladatok megoldásaiban általában a szokásosnál több szokott lenni a hibás gondolatmenet. Aki szeretné magát kicsit képezni ebben a témában, több cikket is tudunk ajánlani. (Hasonlóan kigyűjthetők a feladatok megoldásainak a szövegei is.)